بسم الله الرحمن الرحیم

۱۳۸۷۶۸

دانشگاه ارومیه

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش آنالیز

دوگان دوم جبرهای لیپشیتس حقیقی از توابع مختلط

استاد راهنما

آقای دکتر علی عبادیان و

آقای دکتر استاد باشی

نگارش

رضا خلیلی

تابستان ۸۸

پایان نامه آقای/خانم رضا خلیلی به تاریخ ۸۸/۶/۴

شماره — مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه بسیار خوب و نمره ۱۷/۲۵ هفده و بیست و پنج صدم

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر علی عبادیان و دکتر نسرین استادباشی

۲- استاد مشاور: دکتر —

۳- داور خارجی: دکتر رسول آقاملاری

۴- داور داخلی: دکتر سعید مهش

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر هوشیار قهرمانلو

تقدیم به

پدر ، مادر مهربانم

و همسر فداکارم

تقدیر وتشکر

حال که با عنایت پروردگار متعال کار این پایان نامه با موفقیت به پایان رسیده، وظیفه خود می دانم که از زحمات اساتید راهنمای گرامی، جناب آقای دکتر علی عبادیان و جناب آقای دکتر سعید استاد باشی که در طول این مدت با راهنمایی و ارشاداتشان مرا در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند تشکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از همه اساتید کارکنان دانشکده علوم همکلاسیهای خوبم بخصوص خانواده عزیزم کمال تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

۱.۰ چکیده

در این پایان نامه دوگان دوم جبر های لیپشیتس حقیقی از توابع مختلط که توسط "$D.AliEbadian$" و "$D.Alimohammadi$" در سال ۲۰۰۳ مطرح شده است را بررسی می کنیم.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل است که به طور مختصر قسمت های مختلف آن را در اینجا شرح می‌دهیم:

در فصل اول مقدماتی از آنالیز حقیقی و تابعی را یادآور می‌شویم. به دلیل اینکه مباحث این فصل در آنالیز حقیقی و تابعی تدریس می‌شود، اثبات قضایای مربوطه را به مراجع مناسب ارجاع داده‌ایم.

در فصل دوم جبرهای تابعی باناخ حقیقی را آورده‌ایم که از قسمتهای مهم پایان نامه است. در این فصل تعریف جبر باناخ حقیقی از [۱۲] و ارتباط جبرحقیقی با مختلط ساز آن، تعریف برگشت توپولوژیک، $C(X,\tau)$، جبر یکنواخت حقیقی ارائه شده است.

در فصل سوم که شامل دو بخش است. اولی جبرهای لیپشیتس است که با آوردن تعاریف و قضایای مقدماتی این مبحث که در اثبات قضایای اصلی پایان نامه ار آن استفاده شده است، می‌پردازیم. بخش دومی جبرهای لیپشتس حقیقی ست که از مرجع [۲] گرفته شده است، فقط به تعریف و صورت قضایای که مورد نیاز است اشاره شده است و اثبات آنها به مرجع مربوطه ارجاع می‌شود.

در فصل چهارم که مهمترین فصل پایان نامه است دوگان دوم جبرهای لیپشیتس حقیقی را مورد بررسی قرار می دهیم.

این فصل شامل بخشهای، نشاندن $(\mathrm{lip}(K,\tau,\alpha),\|\cdot\|_\alpha)$ در $(C_\circ(W),|||\cdot|||)$ و دوگان دوم $\mathrm{lip}(\mathrm{K},\tau,\alpha)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نتیجه خواهیم گرفت، کلاس جبرهای لیپشیتس حقیقی $Lip(K,\tau,\alpha)$ وسیع تر از کلاس جبرهای لیپشیتس $Lip(K,\alpha)$ است.

همچنین جبرهای لیپشیتس توسط "Donald. R. Sherbert" برای اولین بار در سال ۱۹۶۴ معرفی

گردید. با وجودی که مدت‌های مدیدی از شناسائی این جبرها می‌گذرد، لکن هنوز هم مسائل باز بسیاری در این باب وجود دارند.

۲.۰ پیش گفتار

متن این پایان‌نامه بر اساس مرجع [۳] نوشته شده است که مراجع [۲]، [۵] و [۱۲] از مراجع اصلی برای این پایان‌نامه به شمار می‌رود.

فرض می کنیم (K,d) یک فضای متریک فشرده باشد. $\alpha \in (0,1)$ و مجموعه های

$$\Delta = \{(x,y) \in K \times K : x = y\} \qquad V = (K \times K) - \Delta \qquad W = K \cup V$$

را در نظر می گیریم. در سال ۱۹۸۷ "$Bade, Curtis and Dales$" نشان دادند که وجود دارد یک نگاشت خطی ایزومتری از فضای لیپشیتس $(lip(K,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ به درون فضای باناخ $(C_0(W), |||\cdot|||)$، که در آن

$$|||h||| = \|h\|_k + \|h\|_V \quad (h \in C_0(W)).$$

همچنین، دوگان دومی از $(lip(K,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ یکریختی ایزومتری به فضای لیپشیتس $(Lip(K,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ است. اخیراً دکتر علی محمدی و دکتر عبادیان جبر باناخ حقیقی را از توابع لیپشیتس مختلط $(Lip(K,\tau,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ و $(lip(K,\tau,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ تعریف کرده‌اند، که τ یک برگشت توپولوژیک d–ایزومتری در K است. در این پایان نامه نشان می دهیم یک ایزومتری خطی حقیقی از فضای باناخ حقیقی $(lip(K,\tau,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ به داخل فضای باناخ حقیقی $(C_0(W,\tilde{\tau}), |||\cdot|||)$، که $\tilde{\tau}$ برگشت توپولوژیک القاء شده توسط τ روی W است. همچنین، دوگان دومی از $(lip(K,\tau,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ یکریختی ایزومتری به $(Lip_{\mathbb{R}}(K,\tau,\alpha), \|\cdot\|_\alpha)$ است، $Lip_{\mathbb{R}}(K,\tau,\alpha)$ مجموعه توابع حقیقی در $Lip(K,\tau,\alpha)$ است.

فصل ۱

تعریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فضای برداری توپولوژیکی

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی بر X باشد. به‌طوری که

الف) مجموعه های تک عضوی بسته باشند؛

ب) عمل های جمع برداری و ضرب اسکالر در این فضا پیوسته باشند.

در این صورت (X,τ) را یک فضای برداری توپولوژیک می گوییم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و به ازای هر $x, y \in X$، مجموعه های باز U, V موجود باشند که $U \bigcap V = \emptyset, x \in U, y \in V,$. در این صورت X را یک فضای هاسدورف [1] می نامیم

تعریف ۳.۱.۱ فضای توپولوژیک X را فشردهٔ موضعی (موضعاً فشرده [2]) می نامند هرگاه برای هر $x \in X$ یک مجموعهٔ باز U شامل x موجود باشد که $\bar{U}$ فشرده باشد.

واضح است که هر فضای فشرده، فشردهٔ موضعی است، این در حالی است که فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$

[1] Hausdorff

[2] Locally compact

مثال هایی از فضاهایی هستند که فشردهٔ موضعی اند ولی فشرده نمی باشند.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد، می گوییم مجموعهٔ F ازتابع های خطی روی X، فضای X را جدا می کند [۳]، هرگاه برای هر دو نقطهٔ متمایز $x, y \in X$، تابع $f \in F$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) \neq f(y)$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار و X^{**}, X^* به ترتیب فضاهای دوگان و دوگان دوم X باشند نگاشت

$$: X \longrightarrow X^{**}$$

$$x \longrightarrow \hat{x}$$

را که در آن

$$\hat{x}(y^*) = y^*(x) \qquad (y^* \in X^*)$$

نشانندهٔ طبیعی گوییم و برد آن را با نماد $\hat{X}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشند. دراین‌صورت نگاشت نشانندهٔ طبیعی از X^* به X^{**}، یک یکریختی یکمتری ازX بروی $\hat{X}$ است.

اثبات : به قضیه (۳.۱۹) از مرجع [۹] مراجعه شود. ■

[۳] Separate

۲.۱ فضای اندازه و اندازه های بورل

تعریف ۱.۲.۱ فرض می کنیم X یک مجموعه و$\mathfrak{M}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد، $\mathfrak{M}$ را یک σ−جبر در X گوییم هرگاه

الف) $X \in \mathfrak{M}$،

ب) اگر$A \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$،

پ) اگر $A = \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $A_i \in \mathfrak{M}$، آنگاه $A \in \mathfrak{M}$.

مثال ۲.۲.۱ اگر $\mathfrak{M}$ یک σ−جبر در مجموعه‌ی X باشد، آنگاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامیم.

به عنوان مثال اگر X یک مجموعه باشد،آنگاه مجموعه‌ی توانی $P(X)$ ، یک σ−جبردر X است.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. کوچکترین σ− جبر در X را، که شامل تمام مجموعه‌های باز فضای X است، σ−جبربورل [۴] و اعضای آن را مجموعه‌های بورل X می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{M}$ یک σ−جبر بر مجموعه‌ی X باشد. فرض می‌کنیم μ تابعی از $\mathfrak{M}$ بتوی بازه $[۰, \infty]$ باشد. μ را یک اندازه‌ی مثبت گوییم هرگاه جمعی شمارش‌پذیر باشد یعنی اگر $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ گردایه‌ای از اعضای دوبه‌دو مجزای $\mathfrak{M}$ باشد آن‌گاه

$$\mu(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i) = \sum_{n=۱}^{\infty} \mu(A_i)$$

هر فضای اندازه، یک فضای اندازه‌پذیر است که اندازه‌ی مثبتی مانند μ بر σ−جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر خود داشته باشد.

[۴] Borel

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنیم $\mathfrak{M}$، یک σ−جبر بر مجموعه‌ی دلخواه X باشد و μ یک تابع مختلط مقدار جمعی شمارش‌پذیر بر $\mathfrak{M}$ باشد دراین‌صورت μ را یک اندازه‌ی مختلط گوییم.

تذکر ۶.۲.۱ گاهی اندازه‌ی مثبت را اندازه نیز می گوییم.

مثال ۷.۲.۱ فرض می‌کنیم X یک مجموعه و $\mathfrak{M}$، σ− جبر آن باشد به‌ازای هر $x_\circ \in X$ ثابت و هر $E \subset X$، تابع μ را بفرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta_{x_\circ}(E) = \begin{cases} 1 & x_\circ \in E \\ 0 & x_\circ \notin E \end{cases}$$

بوضوح μ یک اندازه‌ی مثبت بر $\mathfrak{M}$ است. این اندازه را جرم یکه‌ی متمرکز در $x_\circ$ می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۱ اگر μ یک اندازه بر x باشد مجموعه ی بورل $E \subset X$ را منظم خارجی می گوییم در صورتی که V باز و .

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V\}$$

و مجموعه بورل $E \subset X$ را منظم داخلی گوییم در صورتی که K فشرده و

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E\}$$

تعریف ۹.۲.۱ اندازه مثبت μ بر X را منظم گوییم در صورتی که هر مجموعه بورل در X هم منظم داخلی و هم منظم خارجی باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱ فرض می کنیم μ یک اندازه مختلط بر فضای هاسدورف و موضعاً فشرده X است به ازای هر مجموعه بورل E قرار می دهیم

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

که سوپرمم روی تمامی گردایه های $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ از مجموعه های بورل از هم جدا گرفته می شود که $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. در این صورت $|\mu|$ یک اندازه مثبت (متناهی) بر X است. $|\mu|$ را تغییر کل μ می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۲.۱ اندازه بورل مختلط μ بر X را منظم گوییم در صورتی که $|\mu|$ یک اندازه منظم باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد، مجموعهٔ همهٔ توابع حقیقی پیوسته روی X را $C_{\mathbb{R}}(X)$ می نامیم.

بسادگی می‌توان دید که $C_{\mathbb{R}}(X)$ یک فضای خطی است که فضای X را جدا می‌کند. همچنین، $C(X)$ با سوپریموم نرم $||f|| = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\}$ تبدیل به یک فضای خطی نرم دار می گردد.

تعریف ۱۳.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. گوییم تابع مختلط مقدار f بر X در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، مجموعه‌ی فشرده‌ای مانند K در X موجود باشد به‌طوری‌که

$$|f(x)| < \varepsilon \qquad (x \in K^c).$$

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. رده‌ی تمام توابعی که در بی‌نهایت صفر می‌شوند [5] را با $C_0(X)$ نشان می‌دهیم. هرگاه $X = \mathbb{R}$، آنگاه به ازای هر $f \in C_0(X)$، $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنیم X، یک فضای توپولوژیک و f تابع مختلط مقداری بر X باشد. بست مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ را که با $supportf$ نمایش می دهیم محافظ [6] تابع f بر X گوییم.

گردایه‌ی تمام توابع مختلط مقدارپیوسته بر فضای توپولوژیک X، که بر X محافظ فشرده دارند را با $C_c(X)$ نشان می‌دهیم.

$C_c(X)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر توابع یک فضای برداری است.

[5] Vanish at infinity

[6] support

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. دراین‌صورت $C_\circ(X)$ تتمیم $C_c(X)$ نسبت به متر تعریف شده بوسیله‌ی نرم سوپریمم آن است.

اثبات : به قضیه (۱۷.۳) در مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تذکر ۱۷.۲.۱ هرگاه X فشرده باشد $C_c(X)$ مجموعه‌ی تمام توابع پیوسته بر X است که آن را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. دراین حالت $C_\circ(X) = C_c(X) = C(X)$.

قضیه ۱۸.۲.۱ فرض می کنیم X یک فضای موضعاً فشرده هاسدورف باشد . به ازای هر $f \in C_\circ(X)$ قرار می دهیم $\|f\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|$. در این صورت $(C_\circ(X), \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ است.

اثبات : به قضیه (۱۷.۳) در مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

نتیجه ۱۹.۲.۱ اگر X فضای فشرده هاسدورف باشد، آنگاه $(C(X), \|\cdot\|)$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۲۰.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، تابع $f : X \to \mathbb{C}$ را کراندار[۷] گوییم هرگاه،

$$\sup_{x\in X} |f(x)| < \infty$$

مجموعه همه توابع پیوسته کراندار از X به $\mathbb{C}$ را با $C_b(X)$ نشان می دهیم .

به آسانی می توان نشان داد که $C_b(X)$ فضای برداری می باشد. با تعریف

$$\|f\| = \sup_{x\in X} \|f(x)\| \qquad (f\in C_b(X))$$

می توان دید که $\|\cdot\|$ یک نرم بر $C_b(X)$ است.

[۷] Bounded

قضیه ۲۱.۲.۱ فرض می کنیم f_n دنباله ای از $C_b(X)$ باشد. در این صورت

۱) دنباله f_n در $C_b(X)$ همگرا به f است اگر و تنها اگر بطور یکنواخت روی X به f همگرا باشد.

۲) اگر f_n روی X بطور یکنواخت به f همگرا باشد آنگاه $f \epsilon C_b(X)$.

اثبات : به قضیه (۸.۴) در مرجع [۸] مراجعه شود. ■

نتیجه ۲۲.۲.۱ می توانیم بگوییم که $C_b(X)$ یک فضای باناخ است.

اثبات : با توجه به قسمت دوم قضیه قبل $C_b(X)$ کامل است. ■

تعریف ۲۳.۲.۱ فرض می کنیم W یک فضای موضعاً فشرده باشد. مجموعهٔ تمام اندازه‌های مختلط بورل منتظم بر W را با نماد $M(W)$ نشان می‌دهیم و برای $\lambda, \mu \in M(W)$ و $c \in \mathbb{C}$ تعریف می‌کنیم:

$$(\mu+\lambda)(E) = \mu(E) + \lambda(E) \quad , \quad (c\mu)(E) = c\mu(E)$$

و

$$||\mu|| = |\mu|(W) \qquad (\mu \in M(W))$$

همراه با جمع وضرب اسکالر و نرم تعریف شده در بالا $M(W)$ یک فضای برداری نرمدار است.

قضیه ۲۴.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. $C_\circ(X)$ زیر فضای بسته از $C_b(X)$ می‌باشد، از این رو یک فضای باناخ است.

اثبات : به قضیه (۱.۷) در مرجع [۷] مراجعه شود. ■

قضیه ۲۵.۲.۱ (قضیهٔ نمایش ریس [۸])

اگر X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد، آنگاه هر تابعک خطی کراندار ϕ بر $C_\circ(X)$ با

[۸] Riesz represention theorem

یک اندازهٔ بورل مختلط منتظم منحصر به فرد مانند μ نموده می‌شود. به این مفهوم که به ازای هر $f \in C_{\circ}(X)$،

$$\phi(f) = \int_X f d\mu$$

و $||\phi|| = |\mu|(X)$

بالعکس، اگر $\mu \in M(X)$ آنگاه تابع ϕ_μ با ضابطهٔ

$$\phi_\mu(f) = \int_X f d\mu \qquad (f \in C_{\circ}(X))$$

یک تابعک خطی کراندار بر $C_{\circ}(X)$ می‌باشد. و $||\phi_\mu|| = ||\mu||$

اثبات : به قضیه (۱۷.۷) در مرجع [۱۰] و به قضیه (۱۹.٦) در مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۲٦.۲.۱ دوگان $C_{\circ}(X)$، $M(X)$ است.

اثبات : نگاشت $\psi : M(X) \to (C_{\circ}(X))^*$ را با ضابطهٔ $\psi(\mu) = \phi_\mu$ تعریف می‌کنیم. که درآن ϕ_μ همان است که در قضیه‌ی نمایشی ریس بیان شد. بنا بر قضیه‌ی نمایشی ریس خوش تعریف ، یک به یک، پوشا و ایزومتری است. ■

قضیه ۲۷.۲.۱ (هان– باناخ).[۹]

هرگاه M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X بوده و f یک تابع خطی کراندار بر M باشد، آنگاه f را می‌توان به یک تابعک خطی کراندار مانند F بر X طوری توسیع داد که $||f|| = ||F||$.

اثبات : به قضیه (١٦.۵) در مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف ۲۸.۲.۱ فرض می کنیم A یک زیر فضای برداری $C(X)$ و ϕ متعلق به دوگان A باشد. اندازه ی مختلط، بورل و منظم μ رایک اندازه‌ی نمایشگر ϕ نامند اگر به ازای هر f متعلق به A، $\phi(f) = \int_X f d\mu$.

---

[۹] Hahn-Banach

قضیه ۲۹.۲.۱ فرض کنیم X یک فضای هاسدورف فشرده باشد و $A \subseteq C(X)$. در این صورت برای هر $\phi \in A^*$، یک اندازه ی نمایشگر منحصربفرد وجود دارد.

اثبات : به بخش (۲۲.۵) در مرجع [۱۴] مراجعه شود. ∎

تعریف ۳۰.۲.۱ (**محمل یک اندازه**) فرض می کنیم X یک فضای فشرده و هاسدورف و μ یک اندازه بورل مختلط بر X باشد. اگر F یک مجموعه بورل در X باشد، گوییم μ بر F متمرکز است هرگاه $|\mu|(X \setminus F) = 0$ ، و یا به طور معادل، هرگاه برای هر مجموعه بورل مجزا از F مانند E داشته باشیم $\mu(E) = 0$. کوچکترین مجموعه بسته ای را که μ بر آن متمرکز است محمل اندازه [۱۰] μ می‌نامیم و آن را به $supp(\mu)$ نمایش می دهیم. به سادگی می توان نشان داد که $supp(\mu)$ با متمم اجتماع کلیه مجموعه‌های باز در X مانند U که $\mu(U) = 0$ برابر است. بنابراین هر اندازه بورل مختلط منظم دارای محمل بسته است.

تعریف ۳۱.۲.۱ یک مجموعه جهت دار[۱۱] مجموعه‌ای چون A مجهز به یک رابطه‌ی دوتایی مانند $\le$ است به طوری که

الف) به ازای هر $\alpha \in A$، $\alpha \le \alpha$،

ب) اگر $\alpha \le \beta$ و $\beta \le \gamma$، آنگاه $\alpha \le \gamma$،

ج) به ازای هر α و β از A عضوی چون γ از A وجود دارد به طوری که $\alpha \le \gamma$ و $\beta \le \gamma$.

تعریف ۳۲.۲.۱ یک تور [۱۲] در فضای توپولوژیکی X نگاشتی چون $\alpha \mapsto x_\alpha$ از یک مجموعه‌ی جهت دار مانند A بتوی X است. معمولاً اگر A معلوم باشد، چنین نگاشتی را با $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ یا $\{x_\alpha\}$ نشان می دهیم.

تعریف ۳۳.۲.۱ زیر مجموعه‌ی $A \subseteq X$ را جاذب می نامیم اگر به ازای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $t = t(x) > 0$ بطوری که $t^{-1}x \in A$ یا $x \in tA$.

[۱۰] support of a measre
[۱۱] directed set
[۱۲] net