بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک (اپتیک و لیزر)

کوانتش بندادی میدان الکترومغناطیسی در دی الکتریک ها در پیمانه لورنتس

توسط:

افسانه بذرافشان

استاد راهنما:

محمد مهدی گلشن

شهریور ۱۳۸۶

به نام خدا

کوانتش بندادی میدان الکترومغناطیسی در دی الکتریک ها در پیمانه لورنتس

به وسیله ی:

افسانه بذرافشان

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

فیزیک

از دانشگاه شیراز
شیراز
جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر محمد مهدی گلشن، استادیار بخش فیزیک (رئیس کمیته) ....

دکتر نعمت الله ریاضی، استاد بخش فیزیک ....

دکتر حمید نادگران، دانشیار بخش فیزیک ....

دکتر عبدالناصر ذاکری، دانشیار بخش فیزیک ....

شهریورماه ۱۳۸۶

تقدیم به پدر و مادر دلسوز و مهربانم

و همسر مهربان، عزیز و فداکارم

سپاسگزاری

اکنون که این رساله به پایان رسیده است، وظیفه خود می دانم که از استاد خوب و مهربانم، جناب آقای دکتر محمد مهدی گلشن، که در انجام این رساله زحمات بسیاری متقبل شده اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از اعضای محترم کمیته دفاع، آقایان دکتر نعمت ا... ریاضی، دکتر حمید نادگران، دکتر عبدالناصر ذاکری و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی، آقای دکتر سعید دعوت الحق به سبب راهنمایی های ارزشمندشان، تشکر می نمایم.

چکیده

کوانتش بندادی میدان الکترومغناطیسی در دی الکتریک ها در پیمانه لورنتس

به وسیله ی

افسانه بذرافشان

در این رساله، کوانتش بندادی میدان الکترومغناطیسی را در یک دی الکتریک خطی، پاشنده و اتلافی در پیمانه لورنتس به طور کامل انجام داده ایم. مدل استفاده شده در این رساله بر اساس مجموعه ای از نوسانگرهای ساده، حمام گرمایی، میدان الکترومغناطیسی و برهم کنش آنها بنا نهاده شده است. با توجه به آنکه لاگرانژی میدان الکترومغناطیسی در پیمانه لورنتس نوشته شده است، تکانه های بندادی طولی ونرده ای، بر خلاف پیمانه کولن، ظاهر گردیده که باعث افزایش درجات آزادی مجموعه می شود. در این مقاله مدهای طولی و نرده ای نیز کوانتیده می شوند. پس از کوانتش میدان الکترومغناطیسی به قطری کردن هامیلتونی پرداخته و عملگرهای خلق و نابودی جدید کل مجموعه را بر اساس عملگرهای خلق و نابودی قدیم می نویسیم و در نهایت تمامی میدانهای برداری و نرده ای موجود را بر اساس عملگرهای خلق و نابودی جدید بسط می دهیم. از آنجا که جابجایی عملگرهای خلق و نابودی جدید با هامیلتونی، متناسب با خود این عملگرها می باشد، پس وابستگی زمانی آنها به راحتی بدست می آید. بر اساس وابستگی زمانی این عملگرهای خلق و نابودی جدید، وابستگی زمانی تمام میدانهای برداری و نرده ای مشخص می گردد.

فهرست مطالب

فصل پنجم

فصل ششم

فصل هفتم

پیوست

فصل اول

۱- مقدمه

الکترودینامیک کوانتومی (QED)، که در آن میدان الکترومغناطیسی کوانتیده است، یک نظریه میدان کوانتومی نسبیتی است و بطور فیزیکی برهمکنش ذرات باردار (و پادذرات) با یکدیگر را بوسیله تبادل فوتونها شرح می دهد. اثر این برهمکنشها را می توان با استفاده از نظریه اختلال محاسبه نمود. هر چند QED آنچه که در یک آزمایش اتفاق خواهد افتاد را پیش بینی نمی کند ولی می تواند احتمال آنچه اتفاق خواهد افتاد را پیش بینی کرده و صحت این پیش بینی ها از روشهای گوناگونی مورد تایید قرارگرفته است. از اینرو و به لحاظ آنکه مطالعه برهمکنش نور کوانتیده و ماده امروزه در هر آزمایشگاهی قابل انجام است، مطالعه میدان الکترومغناطیسی کوانتیده از اهمیت بسزایی برخوردار می باشد [۱].

بنابر نظریه کلاسیکی الکترومغناطیس، انرژی الکترومغناطیس توسط امواج منتقل می شود و از این رو جریان انرژی به طور پیوسته صورت می گیرد. ولی نشان داده شده است که جریان انرژی الکترومغناطیس به شکل پیوسته نیست بلکه به صورت بسته های گسسته انرژی انجام می گیرد. یعنی می توان گفت، که انرژی الکترومغناطیسی کوانتیده است و یک سیستم الکترومغناطیسی می تواند فقط در حالتهای انرژی گسسته معین وجود داشته باشد [۲].

در اوایل قرن بیستم فیزیکدانان زیادی در ارتباط با تابش الکترومغناطیس مشاهدات تجربی انجام دادند که نتایج آنها نمی توانست با نظریه کلاسیک توجیه شود. این تجربیات پدیده های زیر و برخی پدیده های دیگر را در بر می گرفت [۳]

الف) طیف تابش جسم سیاه

ب) اثر فوتوالکتریک

ج) طیف های پرتو X

د) پراکندگی کامپتون

ه) طیفهای خطی اپتیکی

و) گسیل خود به خود

بدین ترتیب می بینیم که نظریه کلاسیکی نور که می تواند تداخل، پراش و قطبش را شرح دهد، قادر به شرح تجربیات فوق نبود. بدین ترتیب اهمیت نظریه کوانتومی میدانهای الکترومغناطیسی قابل درک خواهد بود.

به طور معمول و سنتی کوانتش میدان الکترو مغناطیسی در خلا انجام می پذیرد [۴] ولی اگر بخواهیم میدان الکترومغناطیسی را در حضور ماده کوانتیده کنیم (که این موضوع نیز در

مقالات بسیاری بررسی شده است) بایستی برهمکنش میدان با ماده را نیز در نظر بگیریم . برهمکنش میدان الکترومغناطیسی با ماده به قطبیدگی ماده و تغییر ماهیت آن می انجامد که خود باعث تغییر میدان الکترومغناطیس خواهد شد. کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده، این خاصیت مهم را در بر دارد که اثرات متقابل میدان و نور را مستقیما منظور می کند.

در این رساله نیز سعی شده است که میدان الکترومغناطیسی را در حضور ماده کوانتیده کنیم ولی تفاوت اساسی که این تحقیق با سایر تحقیقات دیگر دارد این است که ما میدان را در حضور ماده ودر پیمانه خاص لورنتس که ناوردای نسبیتی است، کوانتیده خواهیم کرد. این مهم اولین قدم در پیکربندی هموردای نظریه کوانتومی میدانهای الکترومغناطیسی خواهد بود.

شاید مهمترین روش برای توسعه نظریه میدانهای کوانتومی، کوانتش بندادی است. روشهای زیادی برای کوانتش ومحاسبه دامنه های کوانتومی وجود دارد اما استفاده از کوانتش بندادی به عنوان زبان وتفسیر نظریه میدانهای کوانتومی مورد توجه بیشتری قرار گرفته است [۵].

به طور کلی، در نظریه های میدان های کوانتومی، کمیتهای دینامیکی معرف میدان مورد نظر تبدیل به عملگرهایی می شوند که روی حالتهای کوانتومی اثر کرده و از طریق آن کمیتهای فیزیکی قابل اندازه گیری محاسبه و پیش بینی می شوند. یکی از مهمترین نتایج حاصل از کوانتش میدانها، پیش بینی وجود ذرات حامل برهم کنش، از قبیل فوتون (برهم کنش الکترومغناطیسی) گلوانها (برهم کنش قوی) بوزونهای W^+، W^- و Z^0 (برهم کنش ضعیف) گراویتون (برهم کنش گرانشی) می باشد[۶].

به طور اجمال، در نظریه های کوانتش بندادی میدانها، یک چگالی لاگرانژی، که خصوصیات میدان (از قبیل تقارن ها و ...) را در بر می گیرد، معرفی شده بین مختصه تعمیم یافته میدان و تکانه بندادی متناظر با آن رابطه جابجایی برقرار می شود [۷]. چنین روابط جابجایی به طور طبیعی منجر به عملگرهایی، که ذرات حاصل برهم کنش مورد بحث را خلق و یا نابود می کنند خواهد شد. این روش برای کوانتش هر میدان، چه فرمیونی و چه بوزونی، می تواند به کار رود. تاکید می شود که در نظریه مکانیک کوانتومی معمولی تنها یک نوع ذره با رفتار کاملا کوانتومی وجود داشته و در آن از تبدیل ذرات به یکدیگر و یا خلق و نابودی ذرات اثری نیست. نظریه میدان های کوانتومی این نقیصه را کاملا رفع کرده و تبدیل یک ذره به دیگری (به صورت احتمال) را میسر می سازد [۸].

از آنجا که هدف اصلی این رساله کوانتش میدان الکترومغناطیسی در حضور ماده است، در ادامه، به طور خلاصه، روشهایی که برای این منظور گزارش شده است خواهد آمد:

۱. روش تابع گرین :در این روش خواص دی الکتریک به وسیله یک تابع دی الکتریک $\varepsilon(\vec{r},\omega)$ که روابط کرامرز-کرونینگ را ارضا می کند، توصیف می شود. با شروع از معادلات ماکسول، عملگرهای میدان بر حسب تابع گرین معادلات ماکسول کلاسیکی بسط داده می شود به گونه ای که روابط جابجایی بندادی ارضا می شود [۹]

۲. با کوانتیده کردن معادله لانژوین-شرودینگر برای یک نوسانگر هارمونیک میرا و ارتباط دادن این نوسانگرها به هر یک از مدهای میدان تابشی می توان به کوانتش میدان الکترومغناطیس دست یافت.

۳. مدل قطبش میرا :در این روش بر اساس یک مدل میکروسکوپیک، قطبش ماده دی الکتریک با یک یا چند میدان کوانتومی نمایش داده می شود. خاصیت جذب کنندگی محیط به وسیله یک حمام گرمایی که با میدان قطبشی دی الکتریک برهمکنش می کند توصیف می شود [۱۰]. که ما در این تحقیق ودر مرجع [۲۵] از این مدل استفاده کرده ایم.

در تمامی این روشها پیمانه ای متفاوت با پیمانه لورنتس به کار رفته است [۱۴-۱۱]. در پیمانه کولن دو درجه آزادی مربوط به مولفه طولی پتانسیل برداری و پتانسیل نرده ای حذف شده اند ولی در پیمانه لورنتس این دو درجه آزادی وجود دارد. معمولا کوانتش میدان الکترومغناطیسی بر اساس یک مدل میکروسکوپی برای قطبش ماده دی الکتریک همراه با یک یا چند میدان، انجام داده می شود.این مدل ابتدا به وسیله فانو[۱] [۱۵] ارائه وتوسط دیگران تعمیم یافته است. دراین مدل محیط دارای خاصیت جذب کنند گی می باشد که این خاصیت به وسیله یک حمام گرمایی[۲] که با میدان قطبش دی الکتریک بر همکنش میکند توصیف می شود. در این تحقیق مدل مذکور برای کوانتش میدان الکترومغناطیسی که درآن پیمانه لورنتس اعمال شده است، مورد استفاده قرار می گیرد. هرچند که کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد در پیمانه لورنتس امروزه از مطالب کتابهای درسی می باشد [۱۶]، استفاده از این پیمانه در کوانتش میدان در حضور مواد دی الکتریک تاکنون انجام نگرفته است.از آنجا که این پیمانه ناوردای لورنتس می باشد کوانتش میدان الکترومغناطیسی در مواد دی الکتریک در این پیمانه، اولین قدم به سوی کوانتش هموردای میدان الکترومغناطیسی خواهد بود. از دیگر نقاط قوت کوانتش میدان الکترو مغناطیسی در پیمانه لورنتس این است که در چگالی لاگرانژی توصیف کننده مدل، مشتقات زمانی پتانسیل نرده ای مؤلفه طولی پتانسیل برداری، برخلاف پیمانه کولن، ظاهر می شود.

این تفاوت به خاطر آنکه درجات آزادی میدان الکترومغناطیسی را افزایش می دهد به پیچیدگی زیادتری در محاسبات نسبت به مرجع [۱۰] منجر خواهد شد.

در فصل دوم این رساله مروری بر معادلات ماکسول، پیکربندی لاگرانژ و هامیلتونی خواهیم داشت و به معرفی لاگرانژی استاندارد می پردازیم [۱۷]. نشان خواهیم داد که معادلات لاگرانژ نتیجه شده از این لاگرانژی با معادلات موج نتیجه شده از معادلات ماکسول کاملا سازگار است [۱۸]. در نهایت به دلیل راحتی محاسبات در فضای فوریه لاگرانژی

---

[۱] Fano
[۲] Reservoir

معرفی شده را به فضای فوریه انتقال خواهیم داد [۱۹]. علاوه بر این از تمامی مطالب این فصل در فصل های آینده استفاده خواهیم نمود. در فصل سوم کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد در پیمانه کولن را ارائه خواهیم داد [۲۰]. هدف این فصل آن است که کوانتش میدان در پیمانه ای متفاوت با پیمانه لورنتس بررسی شود تا بتوان نتایج فیزیکی یک پیمانه ناوردای لورنتس (پیمانه لورنتس) را با پیمانه ای که تحت تبدیلات ناوردا نیست (پیمانه کولن) مقایسه نمود. در فصل سوم کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد را در پیمانه لورنتس بررسی خواهیم کرد [۲۱]. استفاده از این پیمانه باعث افزایش درجات آزادی سیستم خواهد شد. مشاهده خواهیم کرد که در این پیمانه با مشکلات اساسی از جمله منفی شدن انرژی تابشی و منفی شدن اندازه برخی از حالتها روبرو می شویم. در نهایت با معرفی یک متریک جدید تمامی این مشکلات بر طرف خواهد شد. در فصل پنجم میدان الکترومغناطیسی را در حضور ماده ودر پیمانه کولن کوانتیده خواهیم کرد [۱۰]. در این فصل مشاهده خواهد شد که مولفه طولی پتانسیل برداری صفر انتخاب می شود وپتانسیل نرده ای نیز بر حسب سایر میدانهای برداری نوشته خواهد شد که در نتیجه دو درجه آزادی کم خواهد شد. در فصل آخر میدان الکترومغناطیسی را در حضور ماده و در پیمانه لورنتس کوانتیده خواهیم کرد [۲۵]. مشاهده می شود که دو درجه آزادی مربوط به مولفه طولی پتانسیل برداری و پتانسیل نرده ای در این پیمانه نسبت به پیمانه کولن اضافه خواهد شد. در مراحل کار علاوه بر مشکلات اشاره شده در فصل سوم با مشکل غیر هرمیتی بودن هامیلتونی مواجه خواهیم شد که این مشکل نیز با روش ارائه شده در فصل سوم برطرف خواهد شد. در نهایت میدانهای برداری را بر حسب عملگرهای خلق و نابودی کل سیستم بسط خواهیم داد.

فصل دوم

۲- نظریه لاگرانژی الکترودینامیک کلاسیک

در این فصل ابتدا مروری بر معادلات ماکسول و سپس پیکربندی لاگرانژی خواهیم داشت. سپس به معرفی لاگرانژی استاندارد، که معادلات دینامیکی حاکم بر میدانهای الکترومغناطیسی را نتیجه می دهد، می پردازیم و پیکربندی را به فضای فوریه منتقل می کنیم. خواهیم دید که در فضای فوریه معادلات مورد استفاده، شکل ساده تر با قابلیت فهم بیشتری ظاهر می شوند[۱۹].

۲-۱ معادلات ماکسول و امواج الکترو مغناطیسی

در این بخش معادلات ماکسول معرفی شده و خصوصیتهایی از آن که در این رساله مورد استفاده قرار می گیرد، بررسی می شود.

۲-۱-۱ معادلات ماکسول

معادلات ماکسول، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی و چشمه ها (بارها با چگالی ρ و جریانها با چگالی $\vec{j}$) را به هم مربوط می سازند. معادلات ماکسول در هر نقطه از فضا و در هر لحظه از زمان، در یکای .S.I، به صورت زیر می باشند [۲۲]:

$$\vec{\nabla}.\vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \tag{۲-۱-۱}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{j}(\vec{r},t) + \frac{\partial\vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{۲-۱-۲}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{۲-۱-۳}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t} \tag{۲-۱-۴}$$

در این معادلات $\vec{E}$، میدان الکتریکی، $\vec{B}$ میدان مغناطیسی، $\vec{D}$ بردار جابجایی الکتریکی و $\vec{H}$ شدت میدان مغناطیسی می باشند. البته برای استفاده از این معادلات، ارتباط بین میدانهای الکتریکی، $\vec{E}$، و $\vec{D}$ و نیز میدانهای مغناطیسی، $\vec{B}$ و $\vec{H}$، که به روابط ساختمندی مشهورند، لازم است. برای یک محیط همسانگرد، روابط ساختمندی،

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} \qquad (۵-۱-۲)$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \qquad (۶-۱-۲)$$

که در آن ε گذردهی الکتریکی محیط و μ نفوذ پذیری مغناطیسی است، می باشند.

معادلات ماکسول را می توان به دو دسته تقسیم کرد. معادلات (۲-۱-۱) و (۲-۱-۲)، که در آنها چشمه ها (ρ و $\vec{j}$) ظاهر شده اند، معادلات دینامیکی و معادلات (۲-۱-۳) و (۲-۱-۴) که از آنها، چنانچه خواهیم دید، می توان تعریفی از میدان الکتریکی و مغناطیسی بدست آورد، معادلات سینماتیکی گفته می شود. معادله (۲-۱-۱) شکل دیفرانسیلی قانون گاوس می باشد. شکل دیفرانسیل قانون گاوس را فقط وقتی می توان به کار برد که ρ تابعی پیوسته و معلوم در فضا و زمان باشد. معادله (۲-۱-۲) شکل دیفرانسیلی قانون آمپر-ماکسول بوده و $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ معروف به جریان جابجایی است. این جمله سازگاری معادلات با بقای بار را برقرار می سازد. حضور جریان جابجایی بیانگر این است که تغییر میدانهای الکتریکی در فضا باعث به وجود آمدن میدان مغناطیسی می شود. طبق معادلات (۲-۱-۲) و (۲-۱-۴) بین $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یک رابطه درونی وجود دارد واین میدانها همراه با هم میدان الکترومغناطیس (EM) نامیده می شوند. معادله (۲-۱-۳) بیانگر این نکته است که تک قطبی مغناطیسی وجود ندارد. معادله (۲-۱-۴) شکل دیفرانسیلی قانون القاء فاراده می باشد که از تولید میدان الکتریکی بوسیله میدان مغناطیسی متغیر با زمان حکایت می کند.

در غیاب ماده رابطه میدان الکتریکی و جابجایی به صورت $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ (ε_0 گذردهی خلا) و رابطه بین میدان مغناطیسی و شدت میدان به صورت $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ (نفوذ پذیری خلا) خواهد بود. همچنین می توان با استفاده از (۲-۱-۱) و (۲-۱-۲) نشان داد که:

$$\vec{\nabla}.\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \qquad (۷-۱-۲)$$

این رابطه پایستگی بار را نشان می دهد [۲۲] (پایستگی بار نشان دهنده تقارن است، که در نتیجه آن آزادی در انتخاب پیمانه ای به وجود می آید).

چنانچه می دانیم، هر بردار را می توان به مولفه های عرضی و طولی، که به ترتیب دارای واگرایی و پیچش صفر است تقسیم نمود [۱۹]. با توجه به معادله (۲-۱-۱)، از آنجا که $\vec{\nabla}.\vec{E}_{\perp} = 0$ است پس فقط قسمت طولی میدان الکتریکی به چشمه (چگالی بار الکتریکی) مربوط می باشد:

$$\vec{\nabla}.\vec{E}_{\parallel} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\text{۲-۱-۸})$$

معادله (۲-۱-۳) نشان می دهد میدان مغناطیسی کاملا عرضی است، یعنی مولفه طولی میدان مغناطیسی صفر است ($\vec{B}_{\parallel} = 0$). این مشاهدات حتی در محیطهای همسانگرد نیز صادق است.

با توجه به معادله (۲-۱-۴) چون واگرایی (دایورژانس) پیچش (کرل) هربردارصفراست [۱۹]، پس می توان میدان مغناطیسی را به صورت کرل یک میدان برداری، پتانسیل برداری، $\vec{A}$، معرفی کرد:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \qquad (\text{۲-۱-۹})$$

با توجه به معادله (۲-۱-۴) و ازآنجا که پیچش (کرل) گرادیان هر کمیت نرده ای صفر می باشد [۲۳]، پس می توان $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ را به صورت گرادیان یک کمیت نرده ای، پتانسیل نرده ای، U، نوشت:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (\text{۲-۱-۱۰})$$

۲-۱-۲ تبدیلات پیما نه ای

روابط (۲-۱-۹) و (۲-۱-۱۰) نشان می دهند که میدان الکتریکی $\vec{E}$ ومیدان مغناطیسی $\vec{B}$ تحت تبدیلات پیمانه ای به شکل

$$\vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla} F(\vec{r},t) \qquad (\text{۲-۱-۱۱})$$

$$U(\vec{r},t) \rightarrow U'(\vec{r},t) = U(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t} F(\vec{r},t) \qquad (\text{۲-۱-۱۲})$$

که در آن $F(\vec{r},t)$ تابعی دلخواه از موقعیت و زمان می باشد، ناوردا باقی می مانند [۲۱]. ازآنجا که میدانهای فیزیکی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ یکسان را می توان با پتانسیلهای مختلف $\vec{A}$ و U تعریف کرد، پس پتانسیلها را می توان به صورت اختیاری انتخاب نمود. از آنجا که پیچش پتانسیل برداری توسط رابطه (۲-۱-۹) تعیین شده است، این اختیار در انتخاب $\vec{\nabla}.\vec{A}$ تجلی می گردد. انتخاب واگرایی پتانسیل برداری، به پیمانه الکترومغناطیسی معروف است. دو پیمانه متداولی که

استفاده می شوند، پیمانه لورنتس وپیمانه کولن می باشند. پیمانه لورنتس به شکل زیر می باشد:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r},t) \qquad (۱۳-۱-۲)$$

می توان به راحتی اثبات کرد که همیشه این امکان وجود دارد که در رابطه (۲-۱-۱۱) و (۲-۱-۱۲)، $F(\vec{r},t)$ به گونه ای انتخاب شود که رابطه (۲-۱-۱۳) به وسیله $\vec{A}'$ و U' ارضا شود. توجه می شود که شکل شرط لورنتس از یک دستگاه مرجع به دیگری تغییر نکرده و به عبارتی این شرط ناوردای لورنتس است.

پیمانه کولن که به طور گسترده ای مورد استفاده قرار می گیرد، به شکل زیر است:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t) = 0 \qquad (۱۴-۱-۲)$$

در اینجا نیز می توان نشان داد که اگر $\vec{A}$ شرط کولن را ارضا نکند، می توان $F(\vec{r},t)$ در رابطه (۲-۱-۱۱) را به قسمی انتخاب نمود که $\vec{A}'$ این شرط را برآورده کند [۲۱].

در پایان این زیر بخش به این نکته توجه می شود که اگر در رابطه (۲-۱-۱۱) و (۲-۱-۱۲) پتانسیلهای برداری را به مولفه های طولی و عرضی تفکیک کنیم و با توجه به آنکه گرادیان هر تابع برداری طولی است (پیچش آن صفر می شود)، دیده می شود که تنها مولفه های طولی پتانسیل برداری، همراه با پتانسیل نرده ای ، تحت تاثیر تغییر پیمانه قرار می گیرند.

۲-۱-۳ امواج الکترومغناطیسی

اگر روابط (۲-۱-۹) و (۲-۱-۱۰) را در معادلات (۲-۱-۱) و (۲-۱-۲) جایگذاری کنیم به روابط زیر می رسیم:

$$\nabla^2 U(\vec{r},t) = -\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}.\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) \qquad (۱۵-۱-۲)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} j(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r},t)\right) \qquad (۱۶-۱-۲)$$

دو معادله اخیر معادلات دیفرانسیلی جفت شده و از مرتبه دو در زمان و مکان را تشکیل می دهند [۲۱].

از آنجا که $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ در روابط (۲-۱-۱۵) و (۲-۱-۱۶) ظاهر نشده است، این معادلات، معادلات حرکت برای U نمی باشند، ولی U را به $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ مربوط می سازد.

با استفاده از شرط لورنتس، رابطه (۲-۱-۱۳)، معادلات (۲-۱-۱۵) و (۲-۱-۱۶) به شکل زیر نوشته می شوند:

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)U(\vec{r},t)=\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (۱۷-۱-۲)$$

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}(\vec{r},t) \qquad (۱۸-۱-۲)$$

چنانچه مشاهده می شود، این دو معادله ساختار یکسانی داشته و شکل آن ناوردای لورنتس است. دو معادله اخیر نشان می دهند که پتانسیلهای الکترومغناطیسی (و در نتیجه میدانهای الکترومغناطیسی) رفتاری موجی داشته و در خلا با سرعت c ($c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$) منتشر می شوند.

حال با استفاده از شرط کولن، روابط (۲-۱-۱۵) و (۲-۱-۱۶) به دورابطه زیر تبدیل می شوند:

$$\nabla^2 U(\vec{r},t)=-\frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \qquad (۱۹-۱-۲)$$

$$(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2)\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}U(\vec{r},t) \qquad (۲۰-۱-۲)$$

توجه می شود که رابطه (۲-۱-۱۹) همان معادله پواسون در الکترواستاتیک بوده و شکل آن ناوردای لورنتس نخواهد بود. در غیاب بار خالص و عدم وجود کرانه های محدود حل این معادله را می توان صفر انتخاب نمود که در نتیجه آن پتانسیل برداری در معادله (۲-۱-۲۰) به صورت امواج تختی که با سرعت c منتشر می شوند، ظاهر خواهد شد.

معادلات موج نشان می دهد که میدانها دارای مولفه های عرضی و طولی هستند. بنابراین در اینجا و برای استفاده های بعدی به معرفی بردارهای یکه قطبش می پردازیم. دو جهت قطبش $\hat{\varepsilon}(\vec{k})$ و $\hat{\varepsilon}'(\vec{k})$ را برای هر بردار انتشار $\vec{k}$، به گونه ای که هر سه بردار یکه با هم یک دستگاه متعامد راستگرد تشکیل دهند را در نظر می گیریم. این دو بردار یکه همراه با بردار یکه انتشار، $\hat{k}$ شرایط زیر را ارضا می کنند:

$$\hat{\varepsilon}_{\hat{k}}.\hat{\varepsilon}'_{\hat{k}} = \delta_{\varepsilon,\varepsilon'} \qquad \hat{\varepsilon}.\hat{k} = \hat{\varepsilon}'.\hat{k} = 0 \qquad (۲۱-۱-۲)$$

بنابراین هر میدان برداری را می توان بر حسب این سه بردار یکه بسط داد. به طور مثال میدان برداری $\vec{A}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{A}_{\perp} = \hat{\varepsilon}_{\hat{k}}\hat{A}_{\varepsilon}(\vec{k},t) + \hat{\varepsilon}'_{\hat{k}}\hat{A}_{\varepsilon'}(\vec{k},t) \qquad (۲۲-۱-۲)$$

$$\vec{A}_{\parallel} = \vec{A}.\hat{k} \qquad (۲۳-۱-۲)$$

واضح است قسمت طولی بستگی به انتخاب پیمانه دارد، که در پیمانه کولن $\vec{A}_{\parallel} = 0$ انتخاب می شود.

۲-۲ پیکربندی لاگرانژ و هامیلتونی

در این بخش بدون پرداختن به جزئیات محاسبات به بررسی پیکربندی لاگرانژی و هامیلتونی، برای دو سیستم پیوسته و گسسته خواهیم پرداخت.

۲-۲-۱ سیستم گسسته

برای سیستمی با N درجه آزادی مجزا (سیستم گسسته)، N تا مختصه تعمیم یافته $x_N,\ldots,x_1$ و متقابلا N تا سرعت مربوط به این مختصه های تعمیم یافته $\dot{x}_N,\ldots,\dot{x}_1$، خواهیم داشت، یعنی تعداد متغیرها ۲N می باشد. این امکان وجود دارد که حرکت سیستم را با توجه به اصل وردش مشخص کنیم. در نظریه لاگرانژ وجود یک تابعی به صورت $L(x_j,\dot{x}_j,t)$ در نظر گرفته می شود، که به مختصات تعمیم یافته، مشتق زمانی آنها و شاید به زمان وابسته باشد. در این پیکربندی مسیر حرکت به گونه ای است که انتگرال لاگرانژی نسبت به زمان، (بایستی مختصاتهای ابتدایی و نهایی $x_j(t_1)$ و $x_j(t_2)$ معلوم باشند) بهینه می باشد. انتگرال

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_j(t),\dot{x}_j(t),t)\, dt \qquad (۱-۲-۲)$$

معروف به کنش می باشد و اصل وردش مربوط به آن را اصل کمترین کنش (اصل هامیلتون) گویند [۱۷].

با توجه به اصل کمترین کنش داریم: