بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

مطالعه رهیافت‌های نیل به هامیلتونی نسبیت عام

پایان‌نامه کارشناسی ارشد فیزیک، گرایش ذرّات بنیادین

حمید رضا مستاجران گورتانی

استاد راهنما

دکتر احمد شیرزاد

۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک آقای حمید رضا مستاجران گورتانی

تحت عنوان

مطالعه رهیافت‌های نیل به هامیلتونی کنش نسبیت عام

در تاریخ ۱۳۹۳/۱۰/۱۵ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر احمد شیرزاد
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر بهروز میرزا
۳- استاد مدعو	دکتر مسلم زارعی
۴- استاد ممتحن داخلی	دکتر غلام‌رضا خسروی
سرپرست تحصیلات تکمیلی	دکتر فرهاد شهبازی

تقدیم به

تمامی مهربانانی که همواره در کنارم بوده‌اند.

قدردانی

خداوند بی‌نیاز را سپاس‌گذارم که بهره‌مندی از کمال را برای بنده نیازمندش حق او قرار داده است.
در ابتدا از جناب آقای دکتر شیرزاد بسیار تشکر می‌کنم که با رهنمون‌هایشان همواره یارای من بوده‌اند و بسیار از ایشان آموخته‌ام.
از دوستان گرامی دکتر مهدی صادق و مهدی حاجی‌هاشمی به خاطر خواندن پایان‌نامه و کمک در رفع اشکالات متشکّرم.
از پدر و مادر مهربانم بسیار سپاسگذارم که همواره مرا یاری کرده‌اند.

از مسئولان و خدمت‌گذاران دانشگاه صنعتی اصفهان کمال سپاسگذاری را دارم.
و در آخر نیز از تمامی دوستانی که در کنار من بوده‌اند تشکر می‌کنم.

چکیده

از موضوعات مهم فیزیک گرانش بررسی دینامیک فضا-زمان است که خود دارای گستره‌ای از مسائل است. یکی از آن‌ها به دست آوردن دینامیک و تقارن‌های یک سیستم توسط روش‌های دینامیک قیدی (لاگرانژی و هامیلتونی) است که مورد توجّه این پایان‌نامه قرار گرفته است. ما به طور خاص از دو روش دیراک و روش ماتریس همتافته (معروف به روش فدیف-جکیو) که از روش‌های دینامیک قیدی هستند برای حل دینامیک مورد نظر استفاده کرده‌ایم. نقطه شروع این روش‌ها، کنش سیستم در نظریات مختصات محدود و نظریات میدانی است. نظریه نسبیت عام، یک سیستم نظریه میدانی کلاسیکی است که کوانتش آن مستلزم مسائلی از جمله به دست آوردن هامیلتونی سیستم است. دست یابی به دینامیک نسبیت عام با استفاده از معادلات دینامیکی از طریق روش‌های ذکر شده با دشواریهایی روبه رو است. از جمله روبه‌رو شدن با معادلات دیفرانسیل درجه چهار غیر خطی و یا چگونگی نوشتن هامیلتونی سیستم و یا مسئله تصمیم گیری در مورد جملات مرزی. در برخورد با این دشواری‌ها نظریات و رهیافت‌های مختلفی پیشنهاد شده است. نتیجه‌ی رهیافت‌هایی مثل پالاتینی، $\Gamma - \Gamma$ (گاما-گاما) و چندپایه‌ها به دست آوردن کنش با مشتقات زمانی مرتبه‌ی اوّل است. اساس کار در روش پالاتینی مستقل گرفتن هموستارها و تانسور متریک از یکدیگر و در رهیافت $\Gamma - \Gamma$ صرف‌نظر کردن از جمله‌ی مرزی است که در محاسبه به دست می‌آید. در فرمول‌بندی چندپایه‌ها با استفاده از بسط کنش اوّلیه بر اساس میدان‌های چندپایه به کنش با مشتقات مرتبه اوّل دست می‌یابیم.

یکی از رهیافت‌های نام آشنا روش ADM است که در آن فضا-زمان $d+1$ بعدی را به ابرسطوح d بعدی افراز می‌کنند و ریاضیات متناسب با این افراز را ارائه می‌دهند. در برخی مراجع اشکالاتی به این رهیافت گرفته شده است. از جمله ادعا می‌شود که متغیّرهای ADM بندادی نیستند. در این پایان‌نامه این قبیل اشکالات مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. نشان می‌دهیم که استفاده از متغیّرهای ADM در رهیافت هامیلتون بلااشکال است.

کلمات کلیدی:

هامیلتونی لاگرانژی‌های دارای مشتق مرتبه دوم زمانی، فرمول‌بندی ADM، لاگرانژی و هامیلتونی نسبیت عام(GR)، روش پالاتینی، روش $\Gamma - \Gamma$، روش چندپایه‌ها

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش درآمد

.

طرح مسئله

سه نیروی الکترومغناطیس، ضعیف و نیروی هسته‌ای قوی که در نظریه مدل استاندارد با یکدیگر اتحاد یافته‌اند به همراه نیروی گرانش چهار نیروی بنیادی طبیعت را تشکیل می‌دهند. بینش متفاوت انیشتین نسبت به گرانش به تحولاتی منتهی شد که باعث به وجود آمدن نظریه نسبیت عام شد. انیشتین به گرانش به چشم یک نیرو نمی‌نگریست بلکه برای آن تاثیری هندسی و اثرگذار بر هندسه فضا–زمان قائل بود. کمیّت مشخص کننده‌ی فضا–زمان میدان تانسوری متریک است. به همین دلیل نظریه نسبیت عام علم تحلیل متریک عالم و کشف اثرات این متریک است.

روش‌های اولیه شناخته شده در فیزیک نیوتونی برای حل دینامیک سیستم‌ها مشروط به شناخت نیروها در مکانیک و شناخت تک تک اجزا سیستم در الکترومغناطیس و کشف ارتباط آن ها با یکدیگر است. علی الاصول استفاده از این روش‌ها دینامیک سیستم مورد نظر را می‌دهد. امّا روش دیگری که پایه اولیه‌اش با کشف محاسبات وردشی گذاشته شد و با کارهای هامیلتون و دیگران تکمیل شد روش‌های لاگرانژی و هامیلتونی است. این روش دارای توان بیشتری است و میزان خطای ما را پایین‌تر می‌آورد.

در فیزیک ذرات بنیادی با سیستم‌های پیچیده سروکار داریم. همچنین در این‌جا دیگر به جای تعدادی مختصه

محدود با میدان‌های فیزیکی سروکار داریم. روش‌های محاسبات وردشی در حل دینامیک این دست سیستم‌های نظریه میدانی به خوبی به کار می‌آیند.

شاید دلیل اهمیّت پرداختن به نسبیت عام و حل دینامیک کنش دستگاه و ساختن هامیلتونی آن و کوانتش نسبیت عام و تلاش محققین در کشف زوایای مختلف این کنش، شمولی است که این شاخه از فیزیک دارد. مسئله‌ی هندسه‌ی فضا-زمان مسئله‌ای است که همراه با هر مسئله‌ی فیزیکی دیگری قابل بررسی است. چرا که هر مسئله‌ی فیزیکی در هندسه‌ای روی می‌دهد. اتفاقات فیزیکی اطراف ما که در هندسه‌ی تخت روی می‌دهند این مسئله را متذکّر می‌شوند که شاید قوانین فیزیک در هندسه‌ی فضا-زمان ناتخت صورت دیگری به خود بگیرند؛ بنابراین باید به دنبال صورتی از قوانین باشیم که تحت تاثیر هندسه نباشند. همچنین برای شناخت رویدادهای عالم ناچار به شناخت هندسه‌ی عالم و دینامیک آن هستیم.

به دلیل این‌که فضا-زمان ما چهاربعدی است علاقه‌مند به حل دینامیک کنش در این ابعاد هستیم امّا به دلیل پیچیدگی مسئله در این ابعاد از ابعاد پایین‌تر دو و سه شروع می‌کنیم. همچنین صورت کلی مسئله در dبعد نیز مورد توجه محققین است. از دیگر کارهای مرسوم تغییر شکل کنش از طریق تغییر متغیّر، اضافه کردن جملات اصلاحی به کنش و خطی سازی آن است.

نقطه شروع حل دینامیک یک سیستم فیزیکی نظریه میدانی کنش سیستم است. کنش نسبیت عام معمولی به صورت

$$S = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} R d^4x$$

است که با استفاده از زمینه‌های ریاضیاتی مثل محاسبات تانسوری، هندسه نااقلیدسی و هندسه دیفرانیسل نوشته شده است. میدان‌های حاضر در این کنش که در اسکالر ریچی (R)حضور دارند در فضا-زمان چهاربعدی پنجاه عدد هستند. ده تا مربوط به تانسور چهار در چهار متقارن متریک $(g_{\mu\nu})$ و چهل تا مربوط به هموستار ها $(\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma})$. هموستارها را معمولا در همان ابتدا نسبت به دو اندیس پایین متقارن می‌گیرند به همین دلیل تعداد میدان‌های مستقل حاضر در هموستار چهل می‌شود. این تعداد میدان در صورتی است که از ابتدا میدان‌های هموستار را مستقل از میدان‌های متریک بگریم. البته می‌توان با استفاده از معادلات حرکت هموستارها، آن‌ها را بر حسب تانسور متریک به دست آورد و در معادله‌ی حرکت مربوط به متریک قرار داد. در این صورت تعداد میدان‌ها همان ده عدد می‌شود. به طور معمول هم در کنش نسبیت عام از هموستارخاصی به نام هموستار کریستوفل[۱] استفاده می‌شود که تابعی از میدان متریک است.

[۱]Christoffel Connection

آن‌چه در این نوشته می‌آید

تمرکز اصلی این نوشته بررسی چگونگی دست‌یابی به معادلات دینامیکی و هامیلتونی مربوط به متریک نسبیت عام معمولی و یا همان نسبیت عام بدون ماده است. در مورد نسبیت عام سیر از کنش به معادلات دینامیکی در مرحله‌ی اوّل و حل معادلات دینامیکی در مرحله‌ی دوم با مشکلاتی روبه رو است. به طور خلاصه کنش نسبیت عام دارای چند ویژگی است که حل دینامیک آن را مشکل و پیچیده کرده است. اگر کنش را تنها تابعی از میدان متریک بگیریم این کنش ترکیبی خواهد بود از مشتقات فضا–زمانی مرتبه‌ی اوّل و دوم و خود میدان متریک که در یکدیگر ضرب شده‌اند. به دلیل وجود مشتقات مرتبه‌ی دوم میدان‌های داخل کنش روش وردشی با پیچیدگی‌هایی بر روی مرزها روبه‌رو می‌شود و در مرحله‌ی بعد معادلات به دست آمده از همین روش ما را دچار دو چالش می‌کنند؛ اوّل این که به دلیل غیرخطی بودن نمی‌توان از اصل ترکیب خطی استفاده کرد و دوم این که به دلیل درجه چهار بودن این معادلات حل آن‌ها کار آسان و شناخته شده‌ای نیست. از طرف دیگر ما نوشتن هامیلتونی از روی کنش با مشتقات زمانی درجه‌ی اول را می دانیم امّا برای به دست آوردن هامیلتونی کنش با مشتقات زمانی بالاتر الگویی نداریم. بنابراین یک زمینه کاری گسترده حل این چالش‌ها است.

در فصل بعدی سعی می‌کنیم یک آشنایی اوّلیه با دینامیک قیدی پیدا کنیم و در فصل سوم به بحث در مورد چالش‌های مطرح شده در پاراگراف قبلی می‌پردازیم تا مسئله اصلی پایان‌نامه واضح‌تر شود و در ادامه‌ی این فصل تعدادی از راه حل‌ها را مورد بحث قرار خواهیم داد. این راه حل هاعبارتند از ، روش پالاتینی، روش گاما–گاما $(\Gamma-\Gamma)$ و روش چند پایه ها. البته معمولا این موضوعات دارای گستره‌ای وسیع‌تر و کاربردهای متنوعی هستند که مورد بحث ما قرار نخواهد گرفت. به طور مختصر در رهیافت پالاتینی دو دسته میدان متریک و هموستار از یکدیگر مستقل‌اند که خود این مسئله باعث می‌شود در کنش فقط مشتق مرتبه‌ی اوّل داشته باشیم.

در روش $\Gamma-\Gamma$ از داخل کنش یک جمله‌ی مرزی به دست خواهیم آورد که در مرز با ملاحظاتی از آن صرف‌نظر می‌شود. در نهایت جواب به دست آمده را می‌توان با استفاده از هموستار کریستوفل ساده‌تر کرد. البته با این کار تنها میدان فرمول‌بندی مولّفه‌های مستقل میدان متریک خواهند بود و به جواب به دست آمده در این ساده سازی کنش $\Gamma-\Gamma$ گفته می‌شود. در کنش $\Gamma-\Gamma$ خواهیم دید که تمام جملات مشتق دوم متریک در داخل همان جمله‌ی مرزی حذف شده قرار داشته‌اند.

در روش چندپایه‌ها از فرمول‌بندی دیگری از نسبیت عام به نام فرمول‌بندی نامختصاتی استفاده می‌شود. در این فرمول‌بندی با میدان‌های جدیدی به نام میدان‌های چندپایه روبه رو خواهیم بود و کنش نوشته شده در این فرمول‌بندی دارای مشتقات مرتبه‌ی دو نخواهد بود.

فصل چهارم نیز در مورد راه حل دیگری به نام نظریه ADM است. ما در این فصل پا را کمی فراتر از یک آشنایی ساده با موضوع فصل گذاشته‌ایم و سعی کرده‌ایم یک مرجع نسبتا مناسب و آموزنده برای موضوع ADM

ارائه دهیم. البته برای اطلاعات تکمیلی‌تر باید به کتاب‌های نسبیت عام و گرانش مثل [۷] رجوع کرد. به طور خلاصه در روش ADM فضا–زمان را توسط یک خم زمان‌گونه به برش‌های فضاگونه افراز می‌کنیم که این کار باعث شکسته شدن هموردایی بارز است. در واقع در روش ADM تنها بر روی برش‌ها (ابرسطوح) هموردایی بارز داریم. رهیافت ADM منتقدینی دارد از جمله گروه $(Kuzmin, Kiriushcheva\ \ and\ \ others)$ [۶] در مقالاتشان به این رهیافت ابراز شک می‌کنند و حتی در جایی از قول استیون هاوکینگ می‌گویند که ADM با روح کلّی نسبیت عام در تضاد است[۱]. ما در فصل پنجم به بررسی یکی از اشکالاتی که توسط همین گروه به ADM وارد شده می‌پردازیم و نشان خواهیم داد که چرا این انتقاد وارد نیست. همچنین در فصل ششم به شرح مختصری از یکی از کارهایی توسط همین گروه در زمینه‌ی کنش نسبیت عام معمولی (بدون میدان مادی) و با روش قیدی دیراک انجام شده خواهیم پرداخت.

بحث در مورد مسائل مربوط به صرف‌نظر کردن یا نکردن از جملات مرزی موضوع مطالعاتی مستقلی است که در مقالات محققین پی‌گیری می‌شود. امّا مسئله‌ای که در نسبیت عام با آن برخورد می‌کنیم جملات مرزی است که فرض اوّلیه در مورد وردش میدان‌ها، ما را مجاز به صرف‌نظر کردن از آن نمی کند. ما مختصرا در پیوست الف به این مسئله فقط اشاره خواهیم کرد.

در آخر اشاره می نماییم که در سرتاسر این پایان‌نامه اندیس‌های یونانی مولفه های فضا–زمان $(0, 1, 2, 3, ...)$را می شمارند و اندیس‌های لاتین مولّفه‌های$(1, 2, 3, ...)$ را می شمارند.

فصل ۲

مسائل دینامیک قیدی

.

۱.۲ تاریخچه

استفاده از روش دینامیک قیدی تقریبا به نیم قرن پیش بر می گردد. اولین بار این روش‌ها به طور گسترده در مسائل مختلف نسبیت عام مورد استفاده قرار گرفت و روش های مختلفی برای آن ابداع گشت. امّا استفاده از آن محدود به نسبیت عام نشده است. از زمان نیوتن معمول بود که دینامیک متحرک ها را از طریق نوشتن نیرو ها و گشتاور های وارد بر متحرک ها و استفاده از قانون دوم نیوتن و معادل آن برای گشتاور ها به دست آورند. امّا شاید بتوان گفت این روش در مورد مسائل دید کلّی به ما نمی داد چرا که محدود به نیروهای شناخته شده بود و لذا ما را در حوزه ی مکانیک محدود می کرد. ابداع لاگرانژی و هامیلتونی و به دنبال آن روش های قیدی باعث می‌شود که برای بیان برهم‌کنش‌ها محدود به مفهوم نیوتنی نیرو نباشیم و در یک چارچوب نظری منسجم‌تری به تحلیل برهم‌کنش‌ها بپردازیم. به طور مثال از دینامیک سیستم های الکترومغناطیسی (مدار ها، میدان‌ها و مخلوطی از آن‌ها) یا در نظریه الکترومغناطیس آزاد روش لاگرانژی یا هامیلتونی جایگزین مناسبی برای هر سه قانون نیوتن با هم است که می تواند دینامیک تمامی اجزاء یک سیستم را با هم ارائه دهد. همچنین اگر لاگرانژی که می‌نویسیم دارای جامعیّت کافی باشد به طوری که تمامی میدان‌های تاثیرگذار در سیستم و جفتیدگی آن‌ها با یکدیگر را در بر گیرد معادلات

دینامیکی چنین لاگرانژیی یک دسته معادله‌ی دیفرانسیل جفت شده با همدیگر خواهد بود که دینامیک کل سیستم را می‌دهد و دیگر نیازی به تفکیک میدان از چشمه نخواهیم داشت.

کشف نظریه میدان کلاسیک و کوانتمی و تزویج آن با روش های دینامیک قیدی ساختار نظری منسجمی برای تحلیل دینامیک مسائل مختلف فیزیکی به وجود آورده است. امروز فیزیک‌دانان ذرات بنیادین با استفاده از همین زیر ساخت نظری علاوه بر شیوه‌ی گذشته یعنی نگریستن به طبیعت و پیدا کردن سیستم های دینامیکی آن، روش دیگری نیز پیش گرفته اند به این صورت که با توجه به دو اصل زیبایی و سازگاری ریاضی به پیش بینی سیستم های دینامیکی می پردازند و با استفاده از دینامیک قیدی دینامیک آن را به دست می آورند سپس به مشاهده‌ی طبیعت می پردازند که آیا در طبیعت چنین سیستمی وجود دارد یا نه؛ و این یعنی دست‌یابی به یک روش کلی‌نگری در فیزیک.

ذیل عنوان سیستم‌های قیدی مسائل متنوّعی قرارگرفته‌اند از جمله دینامیک سیستم‌ها ، تقارن و کمیّات پایسته.

دو رهیافت اصلی و بنیادین کشف دینامیک سیستم عبارتند از روش لاگرانژی و روش هاملیتونی. هر کدام از این دو رهیافت با مزیّت‌ها و نقایصی همراهند.

در ادامه به طور مختصر به معرّفی این دو رهیافت می‌پردازیم.

۲.۲ روش لاگرانژی

در روش لاگرانژی ابتدا کنش سیستم دینامیکی ارائه می‌گردد و سپس توسط اصل کمترین کنش هامیلتون به معادلات حرکت دست می‌یابیم.

بعد کنش با بعد $\hbar$ برابر است بنابراین اگر در دستگاه SI باشیم کنش دارای بعد ژول ثانیه خواهد بود و اگر در دستگاه لورنتزی باشیم بدون بعد است. در کنش‌های نظریه میدانی متغیّرهای دینامیکی درون کنش دارای صورت تانسوری شامل اسکالرها، بردارها و تانسورهای مراتب بالاتر هستند. این تانسورها در فضا-زمان خمیده تحت تبدیلات عام و در زمینه‌ی تخت تحت تبدیل لورنتز مولّفه‌هایشان تغییر می‌یابند.

کنش‌ها اسکالرند؛ در نسبیت عام اسکالر عام و در نسبیت خاص اسکالر لورنتزی هستند. با توّجه به این ویژگی‌ها و تقارن‌های موجود در سیستم می‌توان کنش سیستم را پیدا کرد.

کنش سیستم به صورت زیر ارائه می‌گردد

$$s=\int L dt=\int \mathcal{L} d^d x \qquad (۱.۲)$$

که S کنش سیستم ، L لاگرانژی و $\mathcal{L}$ چگالی لاگرانژی است. چهره ی نظریه میدانی چگالی کنش به صورت زیر است:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi_\gamma(x),\partial_\mu\phi_\gamma(x),\partial_\nu\partial_\mu\phi_\gamma(x),...x)$$

که ϕ_γ ها میدان هستند و γ اندیس شمارنده تعداد میدان ها و x برچسب فضا-زمانی میدان است. و لاگرانژی در دستگاه درجات آزادی محدود به صورت زیر ارائه می گردد

$$L=L(q,\dot{q},\ddot{q},\dddot{q},...;t).$$

۳.۲ معادلات اویلر- لاگرانژ

مقدّمه

با توجه به اصل هامیلتون از کنش نسبت به میدان های آن وردش می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم. نهایتا معادلات دیفرانسیلی به دست می آیند که همان معادلات حرکت سیستم یا معادلات اویلر ـ لاگرانژ هستند.

با توجه به این که پس‌زمینه‌ی سیستم مورد بررسی، دستگاه درجات آزادی محدود یا نسبیت خاص و یا نسبیت عام باشد معادلات اویلر- لاگرانژ متفاوت می شود. در دستگاه درجات آزادی محدود شکل این معادلات دیفرانسیلی به صورت

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}})+\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}})-...=0 \quad (۲.۲)$$

می‌شود. این معادلات در زمینه ی نظریه میدان تخت (نسبیت خاص)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r(x)}-\partial_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r(x))})+\partial_\mu\partial_\nu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu\phi_r(x)}))-...=0 \quad (۳.۲)$$

و در نظریه میدان خم (نسبیت عام)

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r(x)}-\nabla_\mu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\mu\phi_r(x))})+\nabla_\mu\nabla_\nu(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_\nu\nabla_\mu\phi_r(x)}))-...=0 \quad (۴.۲)$$

هستند. همان‌گونه که از روی این معادلات مشخص است اگر در کنش مشتق mام میدانی حضور داشته باشد در معادلات حرکت مشتق $2m$ام آن میدان حضور می‌یابد.

در روش لاگرانژی تعداد معادلات حرکت برابر با تعداد درجات آزادی سیستم است.

۴.۲ روش هامیلتونی

یک روش مناسب برای پیدا کردن ساختار قیدی سیستم روش هامیلتونی است. در این روش با به‌دست آوردن قیود مرتبه‌ی اوّل و بالاتر و کروشه پواسون بین این قیود به ساختن جبر بین قیود پرداخته می‌شود و تبدیلات پیمانه‌ای سیستم به‌دست می‌آید. به علاوه با داشتن کروشه پواسون‌های اساسی سیستم می‌توان توسط نسخه‌ی کوانتش دیراک به نظریه کوانتمی سیستم دست یافت. [۱] و البته این کاری است که به وسیله‌ی لاگرانژی قادر به اجرایش نبودیم. در ادامه برخی از ویژگی‌های کلّی هامیلتونی را بر می‌شماریم.

هامیلتونی یک سیستم هموردای بارز نیست [۲] با عبور از فضای پیکربندی در لاگرانژی به فضای فاز در هامیلتونی در واقع در یک دستگاه مختصات با محور زمان مشخص می‌نشینیم (یعنی محور زمان کاملا معیّن می‌شود) این کار باعث شکسته شدن هموردایی بارز می‌شود. البته چنانچه هامیلتونی داده شده از روی یک لاگرانژی نوشته شده باشد هموردایی به صورت پنهان در درون آن محفوظ می‌ماند.

در حوزه‌ی نسبیت گالیله‌ای ناوردایی لورنتزی و یا ناوردایی عام مورد نظر نظریه نیست در آن‌جا از بردارهای فضایی هم در لاگرانژی و هم در هامیلتونی استفاده می‌شود. ناوردایی مورد نیاز سیستم که همان ناوردایی تحت تبدیلات خیز (تبدیلات گالیله) و تبدیلات دوران فضایی است توسط این بردارها تامین می‌شود و سیستم چه در لاگرانژی و چه در هامیلتونی این ناوردایی‌ها را آشکار می‌کند.

این ویژگی لاگرانژی که هموردای بارز است باعث می‌شود که پایستگی‌هایی مثل پایستگی تکانه -انرژی در ظاهر آن بروز کند. این تفاوت میان هامیلتونی و لاگرانژی مثل این است که در حل دینامیک مسائل فقط معادلات حرکت را داشته باشیم یا معادلات حرکت و قوانین پایستگی را با هم داشته باشیم. همان‌گونه که معادلات حرکت سیستم برای دست‌یابی به دینامیک سیستم کافی‌اند (و در واقع پایستگی‌ها را در درون خود به صورت نهفته دارند.) امّا دانستن قوانین پایستگی هم حل مسئله را ساده‌تر می‌کند و هم درک فیزیکی ما را بالاتر می‌برد. ویژگی‌های لاگرانژی هم این قدرت را در اختیار ما قرار می دهد که با نگاه به سیستم و در نظر گرفتن ناوردایی حاضر در آن کنش را بسازیم در حالی که ویژگی‌های هامیلتونی چنین توانی را به راحتی در اختیار ما قرار نمی‌دهند. بنابراین در برخورد با مسائل ابتدا کنش یا لاگرانژی سیستم را می‌سازیم سپس توسط فرمول زیر به هامیلتونی سیستم می‌رویم.

$$H = \Pi^{\alpha}\partial_0\phi_{\alpha} - L \qquad (۵.۲)$$

[۱] در نسخه‌ی کوانتش دیراک در انتقال از کلاسیک به کوانتم تکانه‌ها و مختصات به عملگر تبدیل می‌شوند و رابطه‌ی $\{,\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[,]$ را بین کروشه‌های پواسون و جابه‌جاگر های کوانتمی خواهیم داشت

[۲] manifestly covariant

در این فرمول Π^α ها تکانه‌های همیوغ به میدان‌های ϕ_α هستند. همان‌گونه که از این رابطه مشخص است بعد هامیلتونی همانند بعد لاگرانژی انرژی است.

ویژگی دیگر هامیلتونی این که هامیلتونی در فضای فاز نوشته می‌شود (فضای مختصات و تکانه‌ها)در حالی که لاگرانژی در فضای پیکربندی (فضای مختصات ، مشتقات مرتبه‌ی اول و مشتقات مراتب بالاتر آن‌ها) است. بنابراین همان‌گونه که از این خصوصیت فضای فاز مشخص است برای نشان دادن مشتقات زمانی مرتبه‌ی دو و بالاتر در این فضا و به تبع آن در هامیلتونی با مشکل روبه‌رویم. رابطه‌ی ۵.۲ فقط برای لاگرانژی‌های دارای مختصه و سرعت مطرح گردیده است.

در روش هامیلتونی اگر n درجه‌ی آزادی داشته باشیم آن‌گاه $2n$ معادله‌ی حرکت مستقل از هم خواهیم داشت که به صورت زیر ارائه می‌گردند.

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{۶.۲}$$

این معادلات درجه‌ی یک هستند در حالی که معادلات اویلر-لاگرانژ مربوط به لاگرانژی معادل n معادله‌ی درجه دو خواهند بود.

موضوع دیگر این که در فرمول‌بندی لاگرانژی هر تبدیل مختصاتی شکل معادلات اویلر-لاگرانژ سیستم را حفظ می‌کند امّا در هامیلتونی دسته‌ای از تبدیلات بین مختصات فضای فاز این ویژگی را دارند که به تبدیلات کانونیک معروفند. در این فرمول‌بندی اگر هامیلتونی فاقد یکی از تکانه‌های سیستم باشد مختصه‌ی معادل آن تکانه یک ثابت حرکت خواهد بود و یکی از قیود سیستم را به ما خواهد داد.

ما در این نوشته در فرمول‌بندی‌های پالاتینی و ADM سعی می‌کنیم که هامیلتونی سیستم را به دست آوریم و با استفاده از آن در پالاتینی در آینده‌ی تحقیقات به قیود سیستم خواهیم پرداخت.

فصل ۳

کنش نسبیت عام

.

۱.۳ آشنایی با کنش انیشتین-هیلبرت

کنش هیلبرت انیشتین که در واقع زیربنای نسبیت عام را تشکیل می دهد به صورت زیر ارائه می گردد

$$S_{H-E} = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} R d^4x = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} d^4x. \qquad (۱.۳)$$

در رابطه ی ۱.۳ اگر از هموستار کریستوفل استفاده کنیم انتگرال ده تابعی از تانسور متریک ($g_{\lambda\rho}$) خواهد بود و چگالی کنش به صورت زیر در می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{H-E} = \sqrt{-g}R = \\
&\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\{\partial_\rho[g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})] - \partial_\nu[g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\rho})] \\
&\quad + g^{\rho\sigma}(\partial_\lambda g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\lambda\rho})g^{\lambda\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \\
&\quad - g^{\rho\sigma}(\partial_\lambda g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\lambda\sigma} - \partial_\sigma g_{\lambda\nu})g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\rho\alpha} + \partial_\rho g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\rho})\}
\end{aligned} \tag{۲.۳}
$$

حل معادله اویلر-لاگرانژ حاصل از این رابطه دینامیک نسبیت عام خالص را به ما می دهد. همان‌گونه که دیده می‌شود این رابطه تابعی از تانسور متریک و مشتقات چاربرداری مرتبه اوّل و دوم آن است. برای در نظر گرفتن برهمکنش با مادّه کنش تنها کار مورد نیاز اضافه کردن لاگرانژی میدان‌های مادی و جملات برهمکنشی آن‌هاست است که این باعث می‌شود که تانسور انرژی-تکانه مربوطه به معادله‌ی دینامیکی اضافه شود.

همان‌گونه که قبلا اشاره شد برای نوشتن هامیلتونی و در نتیجه کوانتش نظریه از روی چنین لاگرانژی‌هایی با دشواری روبه رو هستیم بنابراین بخشی از تحقیقات صورت گرفته در دنیای نسبیت به نوشتن هامیلتونی پرداخته‌اند.

بعد از ارائه کنش کار بعدی که باید از طریق کنش صورت بگیرد ارائه معادلات دینامیکی کنش و سپس هامیلتونی سیستم است.

۲.۳ معادلات دینامیکی

روش مستقیم به دست آوردن معادلات اویلر-لاگرانژ که همان وردش گیری از کنش است یک دسته معادله ی درجه چهار غیر خطی می دهد [1]

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g_{\lambda\rho}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu g_{\lambda\rho})}\right) + \partial_\mu\partial_\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\partial_\mu g_{\lambda\rho})}\right) = 0 \tag{۳.۳}
$$

در حل معادلات دیفرانسیل درجه ی چهار با دشواری روبه رو هستیم و به دلیل غیر خطی بودن قادر به استفاده از اصل ترکیب نخواهیم بود و در مسائل با حضور جرم و انرژی امکان تجزیه‌ی مسئله به تکّه مسائل ساده‌تر را نخواهیم

[1] البته به دست آوردن این معادله سرراست و بدون شبه نیست. در واقع مشکل در نحوه ی اعمال شرایط مرزی است حل این مشکل تحت عنوان مسئله گیبونز-هاوکینگ ترم مطرح می شود که در پیوست الف مقداری در مورد آن صحبت خواهیم کرد