دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

ارزیابی و حلقه های ارزیابی گسسته

استاد راهنما

دکتر محمد حسین حسینی

استاد مشاور

دکتر حسین فضائلی مقیمی

نگارنده

حسن یاری نودر

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه ارزیابی و حلقه های ارزیابی گسسته را در نظر می گیریم و شرایط معادلی برای حلقه ارزیابی و حلقه ارزیابی گسسته ارائه می دهیم.

واژگان کلیدی: ارزیابی- حلقه ارزیابی پایا- حلقه ارزیابی گسسته

تعداد صفحات پایان نامه: ۸۰

تقدیم به

فروغ بخش شب انتظار، مهدی موعود (عج)

تقدیم به پدر عزیزم

آن که دریا در برابر سخاوت دستان مهربانش آب می شود.

تقدیم به مادر عزیزم

آن که جنگل با تمام سرسبزی اش در دست های دعایش رنگ می بازد.

تقدیر و تشکر

ستایش خداوندی را سزاست که حمد را کلید یاد خویش، و سبب فزونی فضل و رحمت خود، و راهنمای نعمت ها و عظمتش قرار داده است. (نهج البلاغه، خطبه ۱۵۷)

و اینک در آغاز یک پایان بر خود لازم می دانم از تلاش ها و راهنمایی های ارزنده و بی دریغ استاد راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر محمد حسین حسینی صمیمانه تشکر کنم و از درگاه خداوند متعال برای ایشان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون دارم.

از اساتید گرانقدر جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی، استاد مشاور، جناب آقای دکتر حسین اقدامی و جناب آقای دکتر محمد مهدی نصر آبادی، اساتید محترم داور، که در بازنگری و تصحیح این پایان نامه مرا یاری رساندند تشکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر ربیعی که در این دوره از محضرشان استفاده نموده ام صمیمانه سپاسگزارم.

خدایا[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاسگزاری...

سپاسگزاری جداگانه خود را در این مکان وارد نمایید.

حسن یلدای نور
شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیش گفتار

تئوری حلقه های ارزیابی در ابتدا تنها با میدان های جابجایی مرتبط بود. تئوری ارزیابی و حلقه های ارزیابی از اوایل قرن ۲۰ مطرح شدند. مفاهیم ارزیابی از میدان ها و حوزه های ارزیابی اولین بار در سال ۱۹۳۲ توسط کرول [۲] در مقاله معروفش ([۶]) معرفی شدند. در این مقاله یک حلقه ارزیابی به صورت یک حوزه صحیح تعریف شده است که در آن ایده آلها نسبت به رابطه شمول مرتب کلی (کلا مرتب) هستند، یعنی حوزه های جابجایی تک زنجیری، هم چنین او رابطه ی بین مفاهیم حوزه های ارزیابی و حلقه های ارزیابی از میدان ها را نشان داد.

با این حال، یک حالت ناجابجایی از این تئوری وجود دارد. در مورد ناجابجایی تعمیم های متفاوتی از حلقه های ارزیابی وجود دارد. اولین تعمیم برای حلقه های ارزیابی از حلقه های بخشی توسط شیلینگ [۳]([۱۰]) معرفی گردید، وی کسی بود که کلاس حلقه های ارزیابی پایا را معرفی کرد و به مطالعه سیستماتیکی (اصولی) آنها ([۱۱]) پرداخت. با در نظر گرفتن حلقه های ارزیابی پایا از حلقه های بخشی نتیجه می شود که هر حلقه ارزیابی پایا، یک حلقه نیمه موروثی [۴] هست.

از این رو حلقه های نیمه موروثی می توانند به صورت تعمیم های از حوزه های پروفر [۵] برای حلقه های ناجابجایی در نظر گرفته شوند. یک مثال خاص از حلقه های ارزیابی پایا حلقه های ارزیابی گسسته هستند، که علاوه بر این تنها میدان ها و حلقه های بخشی ساده ترین رده از این حلقه ها هستند. با این وجود، آنها یک نقش مهم در جبر، نظریه اعداد و هندسه جبری بازی می کنند.

تعمیم دیگری از حلقه های ارزیابی ناجابجایی، توسط دوبروین [۶] ([۳]) معرفی و مورد مطالعه قرار گرفت. این حلقه بعد از او، حلقه های ارزیابی دوبروین نامگذاری شد. برای اطلاعات بیشتر درباره این حلقه ها و ترتیب های نیمه موروثی در حلقه های آرتینی ساده می توان در [۹] جستجو کرد.

در این پایان نامه به معرفی و بحث مختصری از نتایج اساسی حلقه های ارزیابی پایا ناجابجایی و حلقه های ارزیابی گسسته از حلقه های بخشی می پردازیم. همه حلقه ها در این پایان نامه، شرکت پذیر و غیر بدیهی در نظر گرفته می شوند و همه مدولها یکانی هستند. $U(A)$ را برای گروه یکه های حلقه ی A و D^* را گروه ضربی یک حلقه بخشی D می نویسیم. برای مطالعه بیشتر روی تئوری حلقه ها و مدولها می توان به [۱]، [۲] و [۵] رجوع کرد.

[۲] Krull
[۳] Schilling
[۴] Semihereditary
[۵] Prufer
[۶] N.I.Dubrovin

مباحث پایان نامه در سه فصل به شکل زیر بیان می شود :
فصل اول شامل سه بخش می باشد که در بخش اول به بیان تعاریف، مفاهیم اولیه پرداخته ایم.
در بخش دوم ارزیابی و مثالهایی از آن را مطرح کرده و در نهایت در بخش سوم حلقه ارزیابی را مطرح و مثالهایی از آن را بیان می کنیم.
فصل دوم هم در سه بخش تنظیم شده است. در بخش اول حلقه کسرها را در موضعی سازی جابجایی بیان کرده ایم. در بخش دوم ابتدا حلقه کسرها را در موضعی سازی ناجابجایی مطرح و سپس حلقه کسرهای راست کلاسیک را معرفی و قضایای مربوط به آن را بیان کرده ایم و در نهایت در بخش پایانی، حلقه های خاص که در پایان نامه به کار گرفته شده اند معرفی و قضایایی را مطرح کرده که در فصل سوم مورد استفاده است.
فصل سوم که آخرین فصل می باشد، ویژگی های اساسی حلقه ارزیابی (جابجایی) و حلقه ارزیابی گسسته را بیان و قضایای مربوط به آن را مطرح می کنیم و در راستای همین فصل قضایای اساسی شیلینگ را بیان و اثبات می کنیم.

فصل ۱
ارزیابی ها و حلقه های ارزیابی

.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در تمام پایان نامه حلقه ی R بعنوان یک حلقه ناجابجایی در نظر گرفته می شود، مگر آن که خلاف آن تصریح شود. یاد آور می شویم که زیر مجموعه S از حلقه R یک زیر حلقه است هرگاه S نسبت به جمع و ضرب حلقه ی R خود یک حلقه باشد و $1_R = 1_S$.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه باشد. زیرمجموعه ناتهی I از R را یک ایده آل چپ (راست) می نامند، هرگاه

۱) به ازای هر $x, y \in I$، $x - y \in I$؛

۲) به ازای هر $x \in I$ و $r \in R$، $rx \in I$ $(xr \in I)$.

ایده آل بودن I از R را با نماد $\trianglelefteq$ نمایش می دهیم. توجه کنید I را یک ایده آل (دو طرفه) حلقه R می نامند هرگاه I یک ایده آل چپ و راست حلقه R باشد.

تعریف ۲.۱.۱. ایده آل $M \subsetneqq R$ را ایده آل بیشین در R نامیم هرگاه ایده آلی از R مانند I وجود نداشته باشد بطوریکه $M \subsetneqq I \subsetneqq R$.

تعریف ۳.۱.۱. حلقه R را یک حوزه ایده آل اصلی می نامیم هرگاه حلقه R حوزه صحیح باشد و همه ایده آلهای چپ و راست آن اصلی باشند، یعنی توسط یک عنصر تولید شوند.

تعریف ۴.۱.۱. حلقه R را حلقه ایده آل اصلی گوییم هرگاه همه ایده آلهای راست آن، ایده آل اصلی راست باشد و همه ایده آلهای چپ آن، ایده آل اصلی چپ باشد.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و I ایده آلی از آن باشد، در این صورت $(R/I,+,\cdot)$ با جمع و ضرب تعریف شده به صورت زیر

$$(x+I)+(y+I)=(x+y)+I \quad \text{و} \quad (x+I)\cdot(y+I)=xy+I$$

تشکیل یک حلقه می دهد ($x,y\in R$)که آن را حلقه ی خارج قسمتی R به وسیله I می نامند.

تبصره ۶.۱.۱. *اگر M یک ایده آل بیشین از حلقه ی جابجایی R باشد، آن گاه حلقه خارج قسمتی R/M یک میدان است.*

تعریف ۷.۱.۱. عنصر ناصفر x از حلقه R را یک مقسوم علیه صفر چپ (راست) گوییم اگر عنصر ناصفری مانند $y\in R$ موجود باشد بطوریکه $xy=0_R$ ($yx=0_R$). مقسوم علیه صفر عنصری از R است که هم مقسوم علیه صفر چپ و هم مقسوم علیه صفر راست باشد.

مثال ۸.۱.۱. حلقه ی R از ماتریس های به صورت

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

با عمل ضرب ماتریسی که در آن $x,z\in\mathbb{Z}$ و $y\in\mathbb{Z}_2$ را در نظر بگیرید.اگر فرض کنیم

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 0 & \bar{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

آن گاه $ab=0\in R$، بنابراین a مقسوم علیه صفر چپ است ولی مقسوم علیه صفر راست نیست، چون

$$0=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

تعریف ۹.۱.۱. عنصر $x\in R$ را پوچ توان می نامیم هر گاه $m\in\mathbb{N}$ وجود داشته باشد بطوریکه $x^m=0$.

تبصره ۱۰.۱.۱. *هر عنصر پوچ توان یک مقسوم علیه صفر است اما عکس آن برقرار نیست، زیرا در $\mathbb{Z}_6$، $\bar{۲}$ مقسوم علیه صفر است ولی پوچ توان نیست.*

در جبر جابجایی، حلقه موضعی، حلقه غیر صفری تعریف می شود که تنها یک ایده آل بیشین دارد.
اما تعریف یک حلقه موضعی در جبر ناجابجایی کمی متفاوت است.

تعریف ۱۱.۱.۱. حلقه ناجابجایی R را موضعی گوییم هرگاه حلقه ای غیر صفر باشد و تنها یک ایده آل چپ بیشین (یا معادلا یک ایده آل راست بیشین) داشته باشد.

مثال ۱۲.۱.۱. میدان ها حلقه موضعی اند، زیرا تنها یک ایده آل چپ بیشین دارند.

تبصره ۱۳.۱.۱. *در هر حلقه موضعی R عناصر غیر یکه تشکیل یک ایده آل می دهند. این ایده آل یک ایده آل بیشین است و چون حلقه موضعی است این ایده آل منحصر بفرد است. این ایده آل را با m و این حلقه موضعی را با (R,m) نشان می دهیم.*

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه موضعی با تنها ایده آل بیشین M باشد، در این صورت R/M یک میدان است و میدان مانده R نامیده می شود.

مثال ۱۵.۱.۱. حلقه $\mathbb{Z}_4$ را در نظر می گیریم. در این صورت $\{\bar{0},\bar{۲}\}$ تنها ایده آل بیشین $\mathbb{Z}_4$ است و لذا یک حلقه موضعی می باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. یک حلقه با تعداد متناهی ایده آل چپ بیشین را حلقه ی نیمه موضعی می نامند.

مثال ۱۷.۱.۱. $R\bigoplus R$ دارای دو ایده آل بیشین بصورت $R\bigoplus 0$ و $0\bigoplus R$ است.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه ی دلخواه باشد. در این صورت مقطع تمام ایده آلهای چپ بیشین R، جاکبسون رادیکال R نامیده می شود که با نماد $J(R)$ و یا $rad(R)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱۹.۱.۱. عنصر a در حلقه R را معکوس پذیر راست (چپ) نامیم، اگر $b\in R$ وجود داشته باشد، بطوریکه $ab=1$ ($ba=1$).

لم ۲۰.۱.۱. *برای $y\in R$ احکام زیر معادلند :*

۱) $y\in J(R)$؛

۲) *برای هر $x\in R$، $1-xy$ معکوس پذیر چپ است؛*

۳) $yM=0$، *برای هر $R-$ مدول چپ ساده M.*

برهان. ۱ $\Longleftarrow$ ۲ : فرض کنید $y \in J(R)$ و x ای وجود داشته باشد که $\text{۱} - xy$ معکوس پذیر چپ نباشد. در این صورت $R(\text{۱} - xy) \subset R$ مشمول در یک ایده آل چپ بیشین مثلا m از R می شود. اما $\text{۱} - xy \in m$ و $y \in m$. پس $xy \in m$. در نتیجه $\text{۱} \in m$ که متناقض با بیشین بودن m است. لذا $\text{۱} - xy$ معکوس پذیر چپ است.
۲ $\Longleftarrow$ ۳ : فرض کنید برای هر $x \in R$، $\text{۱} - xy$ معکوس پذیر چپ باشد. به برهان خلف فرض کنیم $m \in M$ وجود داشته باشد بطوریکه $ym \neq \text{۰}$. پس بنا به ساده بودن M داریم $Rym = M$. بالاخص $x \in R$ وجود دارد که $xym = m$. در این صورت $(\text{۱} - xy)m = \text{۰}$، حال با توجه به فرض ۲) چون $\text{۱} - xy$ معکوس پذیر چپ است پس داریم $m = \text{۰}$ و این تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و $yM = \text{۰}$ است.
۳ $\Longleftarrow$ ۱ : برای هر ایده آل چپ بیشین m از R، R/m یک $R-$ مدول چپ ساده است. بنابراین $yR/m = \text{۰}$ و فرض ۳) ایجاب می کند که $y \in m$. لذا $y \in J(R)$. $\square$

قضیه ۲۱.۱.۱. *فرض کنید R یک حلقه غیر صفر، $U(R)$ یکه های R و $J(R)$ جاکبسون رادیکال حلقه R باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند :*
۱) *R یک ایده آل چپ بیشین منحصر به فرد دارد؛*
۲) *R یک ایده آل راست بیشین منحصر به فرد دارد؛*
۳) *$R/J(R)$ حلقه بخشی است؛*
۴) *$R\setminus U(R)$ یک ایده آل از R است؛*
۵) *$R\setminus U(R)$ یک زیر گروه جمعی است؛*
$\text{۵}'$) *برای هر n، $a_\text{۱} + \dots a_n \in U(R)$ نتیجه می دهد که i ای وجود دارد که $a_i \in U(R)$؛*
$\text{۵}''$) *$a + b \in U(R)$ نتیجه می دهد که $a \in U(R)$ یا $b \in U(R)$.*
اگر هر یک از این شرایط برقرار باشد، حلقه R را حلقه موضعی گوییم.

برهان. به [۱۳] صفحه ۱۱ رجوع شود. $\square$

قضیه ۲۲.۱.۱. ۱) *فرض کنید $R \neq \text{۰}$ و $U(R)$ یکه های R و هر عنصر غیر یکه از R پوچ توان باشد. در این صورت R موضعی است.*
۲) *فرض کنید R مشمول در حلقه بخشی D باشد بطوریکه برای هر $d \in D^* = D - \{\text{۰}\}$ d یا $d^{-\text{۱}}$ در R قرار بگیرند. در این صورت R موضعی است.*

برهان. برای قسمت ۱) نشان می دهیم $R\setminus U(R) \subseteq J(R)$.
ابتدا فرض کنیم $a \in R\setminus U(R)$. در این صورت $a \notin U(R)$. پس طبق فرض a پوچ توان است.

فرض کنید k کوچکترین عدد مثبتی باشد که $a^k = 0$. از این رو $Ra \subseteq R \setminus U(R)$، زیرا در غیر این صورت اگر $ra \in U(R)$، چون $a^k = 0$ داریم $ra^k = 0$. بنابراین $raa^{k-1} = 0$، یعنی داریم $a^{k-1} = 0$ که با کوچکترین بودن k در تناقض است.
بنابراین $Ra \subseteq R \setminus U(R)$، یعنی $R \setminus U(R)$ شامل عناصر پوچ توان است. اما $Ra \subseteq J(R)$. از این رو $R \setminus U(R) \subseteq J(R)$. بنا به ۲۱.۱.۱، R موضعی است.
۲) فرض کنیم $R \subseteq D$ حلقه ای با خاصیت گفته شده باشد. نشان می دهیم چنانچه a, b دو عنصر غیر صفر از R باشند، اگر $a + b \in U(R)$ آن گاه $a \in U(R)$ یا $b \in U(R)$.
چون $a+b \in U(R)$، می توان این گونه فرض کرد که $a + b = 1$. فرض کنیم $c = a^{-1}b$. بوضوح داریم $c \in D$. حال اگر $c \in R$، آن گاه داریم :

$$a^{-1} = a^{-1} \cdot 1 = a^{-1}(a+b) = a^{-1}b + 1 = c^{-1} + 1 \in R$$

پس داریم $a \in U(R)$.
هم چنین اگر $c^{-1} \in R$، آن گاه داریم :

$$b^{-1} = b^{-1} \cdot 1 = b^{-1}(a+b) = b^{-1}a + 1 = c^{-1} + 1$$

بنابراین $b \in U(R)$. □

مثال ۲۳.۱.۱. حلقه $\mathbb{Z}_9$ را در نظر بگیرید. تنها عناصر غیر یکه در $\mathbb{Z}_9$، $\bar{0}$ و $\bar{3}$ و $\bar{6}$ است که $\bar{3}^2 = \bar{0}$ و $\bar{6}^2 = \bar{0}$. لذا بنا به قسمت ۱) گزاره فوق، $\mathbb{Z}_9$ موضعی است.

مثال ۲۴.۱.۱. فرض کنید V فضای برداری روی هیات K با پایه شمارا نامتناهی $\{e_i | i \geqslant 1\}$ باشد و $R = End_K(V)$ باشد.
اگر $a, b \in R$ به صورت زیر تعریف شود :

برای هر $i \geqslant 1$ $\quad b(e_i) = e_{i+1}$
برای هر $i \geqslant 2$ $\quad a(e_1) = 0, a(e_i) = e_{i-1}$

آن گاه به وضوح دیده می شود $ab = 1 \neq ba$. بنابراین a معکوس پذیر راست است ولی معکوس پذیر چپ نیست.
چنانچه در حلقه R، b و b' به ترتیب معکوس راست و چپ a باشند. در این صورت

$$b' = b'(ab) = (b'a)b = b$$

در این حالت می گوییم a در حلقه ی R معکوس پذیر و $b = b'$ را معکوس a می نامیم.

قضیه ۲۵.۱.۱. *عنصر $x \in R$ معکوس پذیر چپ است اگر و تنها اگر $\bar{x} \in \bar{R} = R/J(R)$ معکوس پذیر چپ باشد.*

برهان. فرض کنیم $\bar{x} = x + J(R)$ معکوس پذیر چپ باشد، یعنی $\bar{y} \in \bar{R}$ وجود داشته باشد بطوریکه $\bar{y}\bar{x} = \bar{۱} \in \bar{R}$. پس

$$yx + J(R) = ۱ + J(R)$$

پس $۱ - yx \in J(R)$. بنابراین

$$yx \in ۱ + J(R) \subseteq U(R)$$

لذا $x \in R$ معکوس پذیر چپ است.
بعکس، فرض کنیم $x \in R$ معکوس پذیر چپ باشد. پس $y \in R$ وجود دارد بطوریکه $yx = ۱$. بنابراین

$$yx + J(R) = ۱ + J(R)$$

یعنی

$$(y + J(R))(x + J(R)) = ۱ + J(R)$$

به عبارتی دیگر $\bar{y}\bar{x} = \bar{۱}$. لذا $\bar{x} \in \bar{R}$ معکوس پذیر چپ است. □

برای اطلاعات بیشتر در زمینه ی معکوس پذیری به [۷] رجوع شود.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم F یک میدان باشد، چند جمله ای $P(x) \in F[x]$ را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه نتوان آن را بصورت $P(x) = f(x)g(x)$ نوشت که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله ایهای غیر ثابت از $F[x]$ باشند.

مثال ۲۷.۱.۱. تحویل ناپذیری یک چند جمله ای به میدان مربوطه بستگی دارد. بعنوان مثال، اگر $f(x) = x^{۲} + ۱$ را یک چند جمله ای از $R[x]$ در نظر بگیریم، روی R (اعداد حقیقی) تحویل ناپذیر است، زیرا $f(x)$ در میدان R ریشه ندارد ولی توجه داریم $f(x) = x^{۲} + ۱$ را اگر بعنوان یک چند جمله ای روی میدان مختلط در نظر بگیریم آن گاه تحویل پذیر است، زیرا

$$f(x) = (x - i)(x + i)$$

تعریف ۲۸.۱.۱. یک زیر مجموعه بسته ضربی $(m.c.s)$ از R زیر مجموعه ای است مانند S از R بطوریکه $۱_R \in S$ و برای هر $x, y \in S$ داشته باشیم $xy \in S$.

مثال ۲۹.۱.۱. برای هر $x \in R$ مجموعه $\{۱, x, x^{۲}, \dots\}$ یک $(m.c.s)$ است.

مثال ۳۰.۱.۱. مجموعه یکه های حلقه R، $(m.c.s)$ است. بویژه $\{۱\}$ نیز $(m.c.s)$ است.

مثال ۳۱.۱.۱. مجموعه تمام عناصر ناصفر از یک حوزه صحیح، مجموعه بسته ضربی است.

مثال ۳۲.۱.۱. اگر $R = \mathbb{Z}_۶$ و $S = \{\bar{۱}, \bar{۳}\}$ در نظر بگیریم. آن گاه S مجموعه بسته ضربی است، زیرا $\bar{۱} \in S$ و هم چنین

$$\bar{۱} \times \bar{۳} = \bar{۳} \in S$$

$$\bar{۳} \times \bar{۳} = \bar{۳} \in S$$

$$\bar{۱} \times \bar{۱} = \bar{۱} \in S.$$

تعریف ۳۳.۱.۱. ایده آل دو طرفه P از حلقه R، ایده آل اول [1] نامیده می شود اگر $P \neq R$ و برای هر $a, b \in R$، $ab \in P$، ایجاب کند که $a \in P$ یا $b \in P$.

قضیه ۳۴.۱.۱. *فرض کنیم $P \lhd R$ (ایده آل محض) در این صورت احکام زیر معادلند :*

۱) P ایده آل اول است.

۲) اگر $IJ \subseteq P$، آن گاه $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$ (برای هر $I, J \trianglelefteq R$).

۳) R/P حوزه صحیح است.

برهان. ۱ $\Longleftarrow$ ۲ : فرض کنیم (فرض خلف) $I \nsubseteq P$ و $J \nsubseteq P$. در این صورت خواهیم داشت :

$$\exists a \in I, b \in J, s.t, a \notin P, b \notin P$$

[1] Prime ideal

از فرض داریم $ab \in IJ \subseteq P$. بنابراین $ab \in P$. با توجه به اینکه P ایده آل اول است، خواهیم داشت $a \in P$ یا $b \in P$ که هر دو حالت تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم صادق است.

۲ $\Longleftarrow$ ۱ : فرض کنیم $a, b \in R$ و $ab \in P$. در این صورت با فرض $I = (a)$ و $J = (b)$ داریم

$$IJ = (a)(b) = (ab) \subseteq P.$$

لذا $(a) \subseteq P$ یا $(b) \subseteq P$ پس $a \in P$ یا $b \in P$. در این صورت P ایده آل اول است.

۱ $\Longleftarrow$ ۳ : فرض کنید P ایده آل اول باشد. در این صورت برای هر $a, b \in R$،

$$ab \in P \Longrightarrow a \in P \text{ یا } b \in P$$

نشان می دهیم R/P حوزه صحیح است، معادلا نشان می دهیم اگر $(a+P)(b+P) = \circ_{R/P}$ آن گاه $a + P = \circ_{R/P}$ یا $b + P = \circ_{R/P}$.

از این که $(a+P)(b+P) = \circ_{R/P}$ داریم $ab + P = P$. به عبارتی دیگر $ab \in P$. از ایده آل اول بودن P داریم $a \in P$ یا $b \in P$. بنابراین

$$a + P = \circ_{R/P} \text{ یا } b + P = \circ_{R/P}$$

۳ $\Longleftarrow$ ۱ : فرض کنید R/P حوزه صحیح باشد. نشان می دهیم P ایده آل اول است. از این که $ab \in P$، داریم :

$$ab + P = P = \circ_{R/P}$$

پس $(a+P)(b+P) = \circ_{R/P}$. لذا $a \in P$ یا $b \in P$. بنابراین برهان قضیه تکمیل شد. $\square$

مثال ۳۵.۱.۱. هر گاه P یک ایده آل اول در حلقه جابجایی R باشد. آن گاه $S = R \setminus P$ بسته ضربی است.

زیرا $P \neq R$ بنابراین $1 \in R \setminus P$. حال فرض کنید $x, y \in S$ باشد. در این صورت بنا به تعریف S داریم $x, y \notin P$ و چون P ایده آل اول از R می باشد، طبق تعریف ایده آل اول $xy \notin P$. بنابراین $xy \in R \setminus P$ و این یعنی $xy \in S$. پس S یک مجموعه بسته ضربی است.

تعریف ۳۶.۱.۱. ایده آل چپ J در حلقه R را ایده آل منظم نامیم هرگاه $e \in R$ وجود داشته باشد که برای هر $r \in R$، $r - re \in J$.

تعریف ۳۷.۱.۱. یک عنصر $y \in R$ را منظم نامیم، اگر برای هر عنصر ناصفر $a \in R$، $ay \neq \circ$ و $ya \neq \circ$.

تعریف ۳۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. مجموعه ناتهی M را یک $R-$ مدول خوانیم در صورتی که M یک گروه آبلی تحت عمل $+$ باشد و به ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ عنصری چون rm در M باشد بقسمی که به ازای هر $m_۱, m_۲ \in M$ و هر $r_۱, r_۲ \in R$

۱) $(r_۱ + r_۲)m = r_۱m + r_۲m$؛

۲) $r(m_۱ + m_۲) = rm_۱ + rm_۲$؛

۳) $r_۱(r_۲m) = (r_۱r_۲)m$؛

۴) $۱ \cdot m = m$.

که در آن ۱ عنصر یکه حلقه R می باشد. به طریق مشابه $R-$ مدول راست نیز تعریف می شود.

به راحتی می توان نشان داد که R بعنوان یک حلقه، $R-$ مدول است. هم چنین هر فضای برداری روی هیات F، یک $F-$ مدول است. چنانچه $I \trianglelefteq R$، در این صورت I یک $R-$ مدول است.

تعریف ۳۹.۱.۱. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. زیر مدول (یا $R-$ زیر مدول) M، زیر مجموعه ای است مانند N از M بطوریکه شرایط زیر برقرار باشند :

۱) N زیر گروه جمعی M است؛

۲) به ازای هر $r \in R$ و $n \in N$ داشته باشیم $rn \in N$.

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول (چپ) باشد.

۱) M را $R-$ مدول ساده خوانیم هر گاه $M \neq ۰$ و M، $R-$ زیر مدول غیر بدیهی نداشته باشد.

۲) M را $R-$ مدول نیم ساده خوانیم اگر هر $R-$ زیر مدول از M، جمعوند مستقیم از M باشد (یعنی برای هر زیر مدول N، زیر مدول P از M موجود باشد بطوریکه $M = N \bigoplus P$).

مثال ۴۱.۱.۱. مدول صفر، نیم ساده است ولی ساده نیست.

تعریف ۴۲.۱.۱. حلقه ی R را یک حلقه نیم ساده (ساده) چپ گوییم هر گاه بعنوان یک $R-$ مدول چپ نیم ساده (ساده) باشد.

مثال ۴۳.۱.۱. هر حلقه بخشی و هر میدان یک حلقه ساده است. واضح است که هر حلقه ساده نیم ساده است.

تعریف ۴۴.۱.۱. حلقه ی R، نیم ساده جاکبسون [۲] نامیده می شود هر گاه $J(R) = ۰$.

[۲] Jacobson

مثال ۴۵.۱.۱. برای هر حلقه R، حلقه $R/J(R)$ نیم ساده جاکبسون است، زیرا

$$J(R/J(R)) = J(R)/J(R) = 0$$

مثال ۴۶.۱.۱. حلقه ی $\mathbb{Z}$، حلقه نیم ساده جاکبسون است، زیرا اگر $0 \neq a \in J(\mathbb{Z})$، آن گاه تجزیه a به عوامل اولش نشان می دهد که a تنها در تعداد متناهی ایده آل اول (بیشین) قرار می گیرد. این در حالیست که $\mathbb{Z}$ تعداد نامتناهی ایده آل اول (بیشین) دارد. بنابراین a در $J(\mathbb{Z})$ قرار نمی گیرد و لذا $J(\mathbb{Z}) = 0$.

تعریف ۴۷.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. یک زنجیر از زیرمدولهای M بصورت زیر

$$M = M_0 \supsetneqq M_1 \supsetneqq \dots \supsetneqq M_n = 0$$

در نظر بگیرید که طول این زنجیر برابر n است. یک سری ترکیبی از M یک زنجیر بیشین است که در آن زیرمدول اضافی نمی تواند جایگزین شود یا بطور معادل می گوییم هر خارج قسمت M_{i-1}/M_i برای $(1 \leqslant i \leqslant n)$ ساده است.

تعریف ۴۸.۱.۱. یک مدول را تک زنجیری [۳] نامیم اگر زیر مدولهای آن بصورت یک زنجیر باشند.

تعریف ۴۹.۱.۱. یک حلقه جابجایی تک زنجیری گفته می شود، هرگاه مجموعه ایده آلهای آن مرتب خطی باشد یعنی یک زنجیر باشد.

مثال ۵۰.۱.۱. فرض کنید $K[[x]]$ حلقه ای به فرم سری های توانی روی میدان K باشد و نیز فرض کنید $M = (x)$. M ایده آل بیشین در $K[[x]]$ است. بنابراین حلقه خارج قسمتی $K[[x]]/M$ یک میدان است که با میدان K یکریخت است. در این صورت $K[[x]]$ حلقه موضعی است. هم چنین همه ایده آلهای $K[[x]]$ به صورت زنجیر زیر است :

$$K[[x]] \supset (x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \dots \supset (x^n) \supset \dots$$

بنا به تعریف فوق، $K[[x]]$ حلقه موضعی تک زنجیری است.

[۳] uniserial

مثال ۵۱.۱.۱. فرض کنید P صحیح اول باشد و فرض کنید $Z_{(P)}$ حلقه اعداد P صحیح باشد. $Z_{(P)}$ تنها یک ایده آل بیشین به فرم (P) دارد و همه ایده آلهای در $Z_{(P)}$ بصورت زنجیر زیر است :

$$Z_{(P)} \supset (P) \supset (P^{۲}) \supset \ldots (P^n) \supset \ldots$$

بنابراین $Z_{(P)}$ حلقه تک زنجیری موضعی است.

لم ۵۲.۱.۱. *فرض کنید $K[[x]]$ حلقه سری های توانی روی میدان K باشد. در این صورت $K[[x]]$ حلقه ایده آل اصلی است. بالاخص تک زنجیری است.*

برهان. نشان می دهیم که هر ایده آل I در $K[[x]]$ اصلی است. فرض کنید $I \neq ۰$ و $f = \Sigma a_n x^n$ برای $n \geqslant k$ ، یک عنصر در I و $a_k \neq ۰$. این عنصر می تواند به فرم $f = x^k \xi$ که در آن $\xi = \Sigma a_n x^{n-k}$ برای $n \geqslant k$ نوشته شود. از این که $a_k \neq ۰$ نتیجه می شود که عنصر ξ معکوس پذیر است، بنابراین $x^k \in I$ پس $(x^k) \subseteq I$. نشان می دهیم $I \subseteq (x^k)$.
فرض کنید $g = \Sigma b_n x^n \in I$ و $b_m \neq ۰$ برای $n \geqslant m$. در این صورت $g = x^m \xi$ که در آن ξ معکوس پذیر و $m \geqslant k$ است. لذا $g = x^k x^{m-k} \xi \in (x^k)$ یعنی $I \subseteq (x^k)$. بنابراین هر ایده آل ناصفر I، اصلی است و به فرم (x^k) برای k صحیح نامنفی می باشد. در این صورت $K[[x]]$ حلقه ایده آل اصلی است و زنجیری از ایده آلهای $K[[x]]$ بصورت زیر داریم

$$k[[x]] \supset (x) \supset (x^{۲}) \supset \ldots \supset (x^n) \supset \ldots$$

قرار می دهیم $M_n = (x^n)$ و $N = \cap M_n$.
نشان می دهیم که $N = ۰$. فرض کنید (فرض خلف) که این طور نباشد یعنی $N \neq ۰$. چون N ایده آل $K[[x]]$ است و هر ایده آل ناصفر در $K[[x]]$ فرمی به صورت M_n دارد، وجود دارد $k > ۰$ صحیح، بطوریکه

$$N = M_k$$

در نتیجه برای هر n و بالاخص برای $n > k$، $N = M_k \subset M_n$ است. این یک تناقض است، لذا $N = ۰$. بنابراین برهان لم تکمیل شد. $\square$