بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

حل صریح رده‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل با حسابان کسری

استاد راهنما: دکتر فرید (محمد) مالک قایینی

استاد مشاور: دکتر قاسم برید لقمانی

پژوهش و نگارش: مریم قدیری اناری

مهرماه ۱۳۸۹

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به معرفی حسابان کسری نیشیموتو پرداخته و ویژگی‌های اساسی آن‌را بیان و اثبات می‌کنیم. هم‌چنین به بیان ارتباط آن با سایر مشتقات کسری می‌پردازیم. در دو فصل آخر با استفاده از تعریف حسابان کسری نیشیموتو و برخی از خواص آن به حل رده‌ی خاصی از معادلات دیفرانسیل اعم از معادلات بسل و لژاندر می‌پردازیم.

مقدمه

تاریخچه‌ی اولیه‌ی موضوع حسابان کسری به سال ۱۶۹۵ بر میگردد که لایبنیتز[۱] در طی نامه‌ای به هوپیتال[۲] تعریف خاصی برای مشتق مرتبه‌ی $\frac{۱}{۲}$ ارائه داد. در قرن‌های بعدی نظریه حسابان کسری (مشتق کسری و انتگرال کسری) مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان قرار گرفت. آبل[۳] اولین کسی بود که حسابان کسری را درمسائل گوناگون به کاربرد و با استفاده از مشتقات از هر مرتبه‌ی دلخواه به حل مسائل منحنی همزمان پرداخت. در سال ۱۹۲۷ دیویس[۴] بر اساس تعریف خاصی از عملگرهای کسری به حل معادلات دیفرانسیل با عملگرهای دارای نمای کسری پرداخت. در سال ۱۹۶۷ هیگین[۵] با استفاده از عملگرهای انتگرال کسری به حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل پرداخت. در سال ۲۰۰۱ چیان[۶] و همکارانش با استفاده از تعریف خاصی از دیفرانسیل و انتگرالهای کسری از مرتبه‌ی دلخواه حقیقی، که روی فرمول‌های انتگرال کشی گورسا[۷] پایه‌گذاری شده‌اند، به حل یک خانواده از معادلات دیفرانسیل و انتگرال کسری معمولی وجزئی خطی همگن پرداخته‌اند.

از آن‌جا که در سال‌های اخیر، بسیاری از محققان به بیان اهمیت عملگرهای حسابان کسری در استخراج جواب‌های خاص یک تعداد از معادلات دیفرانسیل معمولی خطی و جزئی از مراتب دو و بالاتر پرداخته‌اند، لذا استفاده از حسابان کسری در حل این گونه از معادلات

[۱] Leibniz
[۲] Hospital
[۳] Abel
[۴] Davis
[۵] Higgins
[۶] Chyan
[۷] Goursat

حائز اهمیت می‌باشد.

در این پایان نامه، حسابان کسری نیشیموتو را شرح داده و به بیان مختصری ازمعادلات دیفرانسیل لژاندر، بسل می‌پردازیم و سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از معادلات دیفرانسیل کسری و کاربرد بعضی از قضایای کلی در مورد جواب‌های صریح یک رده‌ی خاص از معادلات دیفرانسیل و انتگرال کسری معمولی خطی با ضرایب چندجمله‌ای به حل این گونه از معادلات پرداخت.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازهای ریاضی

۱.۱ مقدمه

در این بخش بعضی از تعاریف مهم که در این پایان‌نامه از آن‌ها استفاده می‌شود، را بیان می‌داریم.

قرارداد: فرض می‌کنیم $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح بوده و $\mathbb{Z}^-$ نیز مجموعه اعداد صحیح منفی باشد. هم‌چنین $\mathbb{N}$ را مجموعه اعداد طبیعی و $\mathcal{R}$ را مجموعه اعداد حقیقی و $\mathbb{C}$ را مجموعه اعداد مختلط در نظر می‌گیریم و مجموعه $\mathbb{N}_۰$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $\mathbb{N}_۰ = \{۰, ۱, ۲, ...\}$.

قرارداد: نماد y_p به کار رفته در این پایان‌نامه که در آن $p > ۰$ است، به مشتق تابع y از مرتبه p اشاره دارد.

تعریف ۱.۱.۱. قرار می‌دهیم $[\lambda]_۰ = ۱$ و برای هر $\lambda \in \mathcal{R}$ و $k \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$[\lambda]_k = \lambda(\lambda+۱)...(\lambda+k-۱) = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}. \qquad (۱.۱.۱)$$

تعریف ۲.۱.۱. خط یا منحنی متشکل از نقاط تکین را که برای تعریف شاخه‌ای از یک تابع مختلط چندمقداری به کار می‌رود را برش شاخه‌ای می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. خم هموار پارامتریزه $C : [a,b] \longrightarrow \mathcal{R}^۲$ را که در (a,b) یک به یک بوده و $C(a) = C(b)$ باشد را خم بسته ساده یا یک کانتور می‌نامیم.

تعریف ۴.۱.۱. عملگر تبدیل ملین را $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{\mathcal{M}f\}(s) = \int_۰^\infty f(t)t^{s-۱}dt.$$

که یک تبدیل خطی می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱. تابع تک مقداری $f(z)$ را در یک ناحیه، منظم یا تحلیلی گویند هرگاه تابع مزبور در هر نقطه از این ناحیه دیفرانسیل‌پذیر باشد.

تعریف ۶.۱.۱. معادله مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{۲.۱.۱}$$

اگر معادله فوق، کامل نباشد می‌توان آن را با ضرب در یک عامل انتگرال‌ساز $\mu(x)$ کامل نمود. بدین‌سان باید $\mu(x)$ را طوری تعیین کرد که در معادله زیر صدق کند:

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0 \tag{۳.۱.۱}$$

معادله (۳.۱.۱) به معادله الحاقی معروف می‌باشد. حال اگر معادله (۲.۱.۱) با معادله الحاقی‌اش برابر باشد، آن‌را معادله خودالحاق می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{۴.۱.۱}$$

را در نظر بگیرید: نقطه x_0 را یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۴.۱.۱) می‌نامیم هرگاه توابع $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ و $q(x) = \dfrac{R(x)}{P(x)}$ در x_0 تحلیلی باشند. در غیر اینصورت نقطه x_0 را نقطه غیرعادی معادله (۴.۱.۱) می‌نامیم.

تعریف ۸.۱.۱. نقطه غیرعادی x_0 را یک نقطه غیرعادی منظم معادله (۴.۱.۱) می‌نامیم هرگاه توابع $(x-x_0)\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ و $(x-x_0)^2\dfrac{R(x)}{P(x)}$ هر دو حول x_0 دارای سری تیلور همگرا باشند یا به عبارت دیگر در $x = x_0$ تحلیلی باشند. هر نقطه غیرعادی معادله (۴.۱.۱) را که نقطه غیرعادی منظم معادله (۴.۱.۱) نباشد، نقطه غیرعادی نامنظم معادله (۴.۱.۱) می‌نامند.

تعریف ۹.۱.۱. به معادله‌ای که تمام نقاط غیرعادی آن از نوع نقاط غیرعادی منظم باشد معادله فوکسی[۱] می‌گویند.

[۱] Fuchsian equation

تعریف ۱.۱.۱۰. مجموعه G با عمل دوتایی $\circ$ را یک گروه آبلی گوییم، هرگاه خواص زیر به ازای هر $a, b, c \in G$ برقرار باشد:

۱) خاصیت شرکت‌پذیری : $\quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

۲) وجود عضو خنثی $e \in G$: $\quad a \circ e = e \circ a = a$

۳) وجود عضو معکوس $a^{-1} \in G$ برای هر $a \in G$: $\quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

۴) خاصیت جا به جایی: $\quad a \circ b = b \circ a$

۵) بسته بودن : برای هر a و b در G که $a \circ b = d$، داشته باشیم: $d \in G$.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید که $G = \{g\}$ یک گروه و $A = \{a\} \neq \emptyset$ یک مجموعه باشد. اگر نگاشت $G \times A = \{(g, a) | g \in G, a \in A\}$ به $A = \{a | a \in A\}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر $g_1, g_2 \in G$ و هر $a \in A$ داشته باشیم: $g_1 \circ (g_2 a) = (g_1 \circ g_2) a$.

۲) برای هر $a \in A$ ، $1 \circ a = a$.

آن‌گاه G را یک گروه گوییم که روی مجموعه A اثر می‌کند، یا به اختصار G را گروه عمل می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۲. تابع دلتای دیراک را با $\delta(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty , & x = 0 \\ 0 , & x \neq 0 \end{cases}$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

تعریف ۱.۱.۱۳. انتگرال کسری لیوویل از مرتبه ν به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{-\infty}D_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^{x} (x - t)^{-\nu+1} f(t) dt , \quad (\nu < 0).$$

تعریف ۱.۱.۱۴. انتگرال کسری ریمان از مرتبه ν به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{c}D_x^{\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{c}^{x} (x - t)^{-\nu+1} f(t) dt , \quad (c > 0 , \ \nu < 0).$$

تعریف ۱.۱.۱۵. انتگرال کسری ریمان - لیوویل از مرتبه ν به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{\circ}D_x^{\nu}f(x)=\frac{۱}{\Gamma(-\nu)}\int_{\circ}^{x}(x-t)^{-\nu+۱}f(t)dt\,,\qquad(\nu<\circ).$$

۲.۱ تابع گاما

تابع گاما تعمیم تابع فاکتوریل $n!$ می‌باشد و برای معرفی آن از یک انتگرال استفاده می‌شود که فقط برای اعداد مختلط با قسمت حقیقی مثبت همگراست:

$$\Gamma(z)=\int_{\circ}^{\infty}e^{-t}t^{z-۱}dt,\qquad Re(z)>\circ. \tag{۵.۲.۱}$$

در اینجا چند خاصیت مهم تابع گاما را ذکر می‌کنیم [۷]:

$$\Gamma(n+۱)=n!,\qquad n\in\mathbb{N}$$

$$\Gamma(z+۱)=z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z+n)\Gamma(-z-n+۱)=(-۱)^n.\Gamma(z)\Gamma(۱-z)$$

$$\Gamma(۱-z)\Gamma(z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)}$$

$$\Gamma(۲z)=\pi^{-۱/۲}۲^{۲z-۱}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{۱}{۲})$$

$$\Gamma(\frac{۱}{۲})=\sqrt{\pi}.$$

۳.۱ سری‌های جواب معادلات خطی مرتبه دوم

بسیاری از معادلات دیفرانسیل خطی مراتب دوم و بالاتر با ضرایب متغیر را نمی‌توان با توابع اولیه حل نمود. روش عمومی برای حل این دسته از معادلات استفاده از سری توانی می‌باشد، که این روش را برای حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=\circ \tag{۶.۳.۱}$$

شرح می‌دهیم.

ابتدا به بررسی جواب معادله (۶.۳.۱) در همسایگی نقطه عادی $x_\circ$ می‌پردازیم، و می‌خواهیم برای معادله (۶.۳.۱) جواب‌هایی به صورت

$$y = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x - x_\circ)^n \tag{۷.۳.۱}$$

را بدست آوریم. برای این کار باید دو سؤال را بررسی کرد. نخست آنکه آیا می‌توان a_n را به گونه‌ای تعیین کرد که y حاصل از رابطه (۷.۳.۱) در معادله (۶.۳.۱) صدق کند. دوم آن که آیا سری حاصل واقعاً همگرا است، و اگر چنین است این همگرایی به ازای چه مقادیری از $x - x_\circ$ تحقق می‌یابد. اگر بتوان نشان داد که سری مزبور به ازای $|x - x_\circ| < \rho$، $\rho > \circ$ همگراست در این صورت همه عملیات صوری از قبیل مشتق‌گیری جمله به جمله را می‌توان توجیه کرد و بدین سان برای معادله (۶.۳.۱) جوابی ساخته شده است که به ازای $|x - x_\circ| < \rho$ معتبر خواهد بود. با فرض وجود جواب طرز تعیین a_n ها را شرح می‌دهیم. عملیترین روش برای انجام این کار آن است که سری (۷.۳.۱) و مشتق‌های آن را به جای y و y' و y'' در معادله (۶.۳.۱) قرار دهیم. آن‌گاه a_n ها را به گونه‌ای تعیین کنیم که معادله دیفرانسیل مزبور به طور صوری برقرار باشد. حال برای اثبات این مطلب که اگر $x_\circ$ یک نقطه عادی معادله (۶.۳.۱) باشد، جواب‌هایی به صورت رابطه (۷.۳.۱) وجود دارد قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۳.۱. اگر $x_\circ$ یک نقطه عادی معادله دیفرانسیل (۶.۳.۱) باشد آن‌گاه جواب عمومی معادله (۶.۳.۱) عبارت است از :

$$y = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n (x - x_\circ)^n = a_\circ y_۱(x) + a_۱ y_۲(x). \tag{۸.۳.۱}$$

که در آن $a_\circ$ و $a_۱$ دلخواه و $y_۱$ و $y_۲$ دو سری جواب مستقل خطی‌اند که در $x_\circ$ تحلیلی می‌باشند. علاوه بر آن شعاع همگرایی هر یک از سری‌های جواب $y_۱$ و $y_۲$ حداقل برابر مینیمم شعاع همگرایی سری‌های $p(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ و $q(x) = \dfrac{R(x)}{P(x)}$ خواهد بود. و ضرایب سری‌های جواب با قرار دادن سری (۷.۳.۱) به جای y در معادله (۶.۳.۱) تعیین می‌شود.

۱.۳.۱ روش فروبنیوس

برای حل معادله دیفرانسیل (۶.۳.۱) در همسایگی یک نقطه غیرعادی منظم $x = x_\circ$ معمولاً از قضیه فروبنیوس استفاده می‌کنیم، که به بیان آن می‌پردازیم. برای سادگی فرض می‌کنیم که $x_\circ = \circ$ باشد. چون $x_\circ = \circ$ یک نقطه غیرعادی منظم معادله (۶.۳.۱) است ، بنابراین $xp(x) = x\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ و $x^۲q(x) = x^۲\dfrac{R(x)}{P(x)}$ هر دو در $x = \circ$ تحلیلی می‌باشند. و لذا دارای بسط‌هایی به سری توانی به صورت

$$x^۲q(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} q_n x^n \quad , \quad xp(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} p_n x^n \qquad (۹.۳.۱)$$

می‌باشند، که در یک فاصله $|x| < \rho$ ، $\rho > \circ$ حول مبدأ همگرایند. معادله (۶.۳.۱) را بر $P(x)$ تقسیم کرده و در $x^۲$ ضرب می‌کنیم، بنابراین داریم:

$$x^۲y'' + x[xp(x)]y' + [x^۲q(x)]y = \circ \qquad (۱۰.۳.۱)$$

یا

$$x^۲y'' + x(p_\circ + p_۱(x) + ... + p_n(x)x^n + ...)y' + (q_\circ + q_۱(x) + ... + q_n(x)x^n + ...)y = \circ$$

(۱۱.۳.۱)

چون ضرایب معادله (۱۱.۳.۱) همان ضرایب معادله اویلر با مضربی از سری توانی می‌باشد، پس به جستجوی جواب‌هایی به صورت جواب‌های اویلر با مضربی از سری توانی به صورت زیر هستیم:

$$y = x^r(a_\circ + a_۱x + ... + a_nx^n + ...) = x^r\sum_{n=\circ}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_nx^{r+n} \qquad (۱۲.۳.۱)$$

سری (۱۲.۳.۱) را سری فروبنیوس[۱] می‌نامیم. که بوضوح سری فروبنیوس در حالت خاص $r = \circ$ به سری توانی تبدیل می‌شود.

آنچه را که در این مرحله از مسأله باید تعیین کنیم، عبارت است از :

[۱] Frobenius

۱) مقادیر r که به ازای آن‌ها معادله (۶.۳.۱) دارای جوابی به صورت (۱۲.۳.۱) است.

۲) رابطه بازگشت a_n ها.

۳) شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

با فرض وجود جواب به جستجوی جوابی به صورت $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ برای معادله (۱۰.۳.۱) هستیم. که با جایگذاری در معادله و مساوی قرار دادن ضرایب دو طرف تساوی داریم:

$$a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[(r+k) p_{n-k} + q_{n-k} \right] \right\} x^{r+n} = 0 \qquad (۱۳.۳.۱)$$

که در آن $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0$ معادله شاخص می‌باشد. ریشه‌های معادله شاخص را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم، و هنگامی که ریشه‌ها حقیقی‌اند فرض می‌کنیم که $r_1 \geqslant r_2$ است.

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \qquad (۱۴.۳.۱)$$

قضیه ۲.۳.۱. معادله دیفرانسیل

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \qquad (۱۵.۳.۱)$$

را که در آن $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است در نظرمی‌گیریم. آن‌گاه $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی‌اند و دارای بسط‌هایی به صورت سری توانی می‌باشند که به ازای $|x| < \rho$ همگرایند، و در آن $\rho > 0$ مینیمم شعاع‌های همگرایی سری‌های توانی $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ است.

قضیه فوق به قضیه فروبنیوس مشهور است.

۴.۱ معادله لژاندر

شکل کلی معادله لژاندر از رتبه α به صورت زیر است:

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1) y = 0 \qquad (۱۶.۴.۱)$$

که نقطه $x=0$ یک نقطه‌ی عادی معادله (۱۶.۴.۱) است. شعاع همگرایی سری جواب حول $x=0$، حداقل برابر با ۱ است. تنها لازم است که حالت $\alpha > -1$ رادر نظر بگیریم، زیرا اگر $\alpha \leq -1$ باشد آن‌گاه با جایگزینی $\alpha = -(1+\gamma)$ که در آن $\gamma \geq 0$ است به معادله لژاندر از رتبه γ می‌رسیم. اکنون با استفاده از روش فروبنیوس به دنبال جوابی به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (17.4.1)$$

برای معادله (۱۶.۴.۱) هستیم و لذا با جایگذاری آن در معادله (۱۶.۴.۱) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n^2 - 3n - \alpha(\alpha+1))a_n\right] x^n = 0 \qquad (18.4.1)$$

که با متحد قرار دادن دو طرف تساوی داریم:

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha-n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(n+2)}\ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \qquad (19.4.1)$$

و در حالت کلی برای $k = 0, 1, 2, \ldots$ ضرایب از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} a_{2k} = (-1)^k \dfrac{(\alpha-2k+2)\ldots(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2k-1)}{(2k)!}\, a_0 \\ \\ a_{2k+1} = (-1)^k \dfrac{(\alpha-2k+1)\ldots(\alpha-1)\alpha(\alpha+2)\ldots(\alpha+2k)}{(2k+1)!}\, a_1 \end{cases} \qquad (20.4.1)$$

لذا جواب عمومی معادله لژاندر عبارتست از :

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

که در آن

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha-2k+2)\ldots(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+2k-1)}{(2k)!}\, x^{2k} \qquad (21.4.1)$$

و

$$y_2(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha-2k+1)\ldots(\alpha-1)\alpha(\alpha+2)\ldots(\alpha+2k)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \qquad (22.4.1)$$

که در حالتی که α عدد صحیح نباشد سری‌های فوق نامتناهی هستند، که به ازای $-1 < x < 1$ همگرا می‌باشند.

حالت مهم وقتی است که $\alpha = n$ عدد طبیعی باشد، که اگر عددی فرد باشد بوضوح $y_2(x)$ تنها تعداد متناهی جمله دارد و اگر عددی زوج باشد $y_1(x)$ دارای تعداد متناهی جمله است. در هر حالت سری‌هایی که تعداد متناهی جمله دارند را چندجمله‌ای لژاندر از رتبه n می‌نامند. صورت استاندارد معمول چندجمله‌ای‌های لژاندر را با انتخاب مناسب a_0 و a_1 به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \tag{23.4.1}$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر را می‌توان به صورت دیگری نیز معرفی کرد. در واقع داریم:

قضیه ۱.۴.۱. برای هر $n \geq 0$ داریم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{24.4.1}$$

که رابطه فوق به فرمول رودریگو معروف است.

اثبات: ابتدا توجه داریم که:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, & n \leq m \\ 0, & n \geq m \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \tag{25.4.1}$$

لذا داریم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!(-1)^k}{k!(n-k)!} \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k \frac{d^n}{dx^n} x^{2n-2k}$$

$$= \frac{۲}{۲^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{k=\circ}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-۱)^k (x^۲)^{n-k}$$

$$= \frac{۱}{۲^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^۲ - ۱)^n$$

$\square$

۵.۱ معادله لژاندر متناظر

هنگامی که معادله هلمهولتز[۱] که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bigtriangledown^۲\psi \pm K^۲\psi = \circ$$

را در مختصات کروی جدا کنیم به سه نوع معادله دیفرانسیل خواهیم رسید که یکی از آنها که به صورت زیر می‌باشد:

$$(۱ - x^۲)\frac{d^۲\theta}{dx^۲} - ۲x\frac{d\theta}{dx} + \left[n(n+۱) - \frac{m^۲}{۱ - x^۲}\right]\theta = \circ \qquad (۲۶.۵.۱)$$

را معادله لژاندر متناظر از درجه m و رتبه n می‌نامند. که در صورتی که $m^۲ = \circ$ باشد به معادله لژاندر از رتبه n تبدیل می‌گردد. یکی از جواب‌های معادله لژاندر متناظر (۲۶.۵.۱)، توابع لژاندر متناظر می‌باشد که آن را با $P_n^m(x)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_n^m(x) = (-۱)^m(۱ - x^۲)^{m/۲}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\,, \qquad m \geq \circ \qquad (۲۷.۵.۱)$$

یک راه یافتن جواب معادله دیفرانسیل لژاندر متناظر، شروع کردن از معادله دیفرانسیل لژاندر و تبدیل آن به معادله لژاندر متناظر با استفاده از مشتق‌گیری مکرر می‌باشد. که اگر معادله دیفرانسیل لژاندر معمولی از رتبه n را در نظر بگیریم، داریم:

$$(۱ - x^۲)P_n'' - ۲xP_n' + n(n+۱)P_n = \circ \qquad (۲۸.۵.۱)$$

[۱] Helmholtz

که در آن $P_n(x)$ چندجمله‌ای لژاندر از رتبه n می‌باشد. حال به کمک فرمول لایبنیتز برای مشتق‌گیری حاصل‌ضرب که به صورت

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[A(x)B(x)\right] = \sum_{s=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ \\ s \end{array} \right) \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}}A(x)\frac{d^s}{dx^s}B(x) \qquad (۲۹.۵.۱)$$

می‌باشد از رابطه‌ی (۲۸.۵.۱) ، m بار مشتق گرفته و داریم:

$$(1-x^2)u'' - 2x(m+1)u' + (n-m)(n+m+1)u = 0 \qquad (۳۰.۵.۱)$$

که در آن $u = \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ می‌باشد.

و چون معادله (۳۰.۵.۱) خودالحاق نیست برای تبدیل آن به شکل خودالحاق، $u(x)$ را به صورت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$v(x) = (1-x^2)^{m/2}u(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$$

که با مشتق‌گیری و حل آن نسبت به u داریم:

$$u'(x) = (v'(x) + \frac{mxv(x)}{1-x^2})(1-x^2)^{-m/2} \qquad (۳۱.۵.۱)$$

$$u''(x) = \left[v''(x) + \frac{2mv'(x)}{1-x^2} + \frac{mv(x)}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2v(x)}{(1-x^2)^2}\right].(1-x^2)^{-m/2} \qquad (۳۲.۵.۱)$$

که با جایگذاری روابط (۳۱.۵.۱) و (۳۲.۵.۱) در رابطه (۳۰.۵.۱) به معادله‌ای از تابع v می‌رسیم که در شکل خودالحاقش صدق می‌کند:

$$(1-x^2)v''(x) - 2xv'(x) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]v = 0 \qquad (۳۳.۵.۱)$$

که با توجه به مراحلی که برای رسیدن از معادله لژاندر به معادله لژاندر متناظر انجام دادیم معادله (۳۳.۵.۱) دارای جوابی به صورت

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\,, \qquad m \geq 0$$

می‌باشد. (در اینجا با توجه به اینکه عامل $(-1)^m$ را در بعضی از کتاب‌ها در نظر نمی‌گیرند لذا این عامل را نادیده گرفتیم.)

حال جهت یافتن محدوده‌ی m و n با توجه به تعریف رودریگو برای $P_n(x)$ در رابطه (۲۷.۵.۱) داریم:

$$P_n^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^n.n!}\,(1-x^2)^{m/2}\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n \qquad (۳۴.۵.۱)$$

و چون بزرگترین توان x در عبارت $(x^2-1)^n$، $2n$ می‌باشد لذا برای داشتن جواب‌های غیرصفر باید شرایط زیر را داشته باشیم:

$$n+m \leq 2n \quad \Longrightarrow \quad m \leq n$$

$$n+m \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad m \geq -n$$

که معادله‌ی (۳۴.۵.۱)، محدوده‌ی $-n \leq m \leq n$ را توجیه می‌کند.

حال جهت یافتن $P_n^{-m}(x)$ از روی $P_n^m(x)$ با استفاده از فرمول مشتق‌گیری لایبنیتز و مساوی قراردادن ضرایب دو طرف تساوی زیر

$$\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n = c_{nm}(1-x^2)^m\frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}}(x^2-1)^n$$

ضرایب c_{nm} به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$c_{nm} = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}$$

با قراردادن این ضرایب در رابطه‌ی (۳۴.۵.۱) و سپس جایگذاری حاصل در رابطه‌ی (۳۴.۵.۱) به ازای $(-m)$ به جای m داریم:

$$P_n^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(x) \qquad (۳۵.۵.۱)$$