دانشگاه تربیت معلم سبزوار

عنوان پایان‌نامه

خواص همواری $S-$ سیستم های مرتب جزئی

ارائه شده جهت اخذ درجهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ ریاضی محض $-$ گرایش جبر

استاد راهنما

جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی

استاد مشاور

جناب آقای دکتر علی اکبر استاجی

نگارش

اعظم یعقوبی جامی

مهر ۱۳۸۸

سپاس و قدردانی

سپاس مهربان **خداوندی** را که آفریدگاری وآموزگاری، هر دو در آستین منت اوست و تمامی هستی یک جرعه از دریای همت اوست. قادری که به این بنده ناتوان، توان اندیشیدن آموخت.

در آغاز شایسته است مراتب سپاس و ارادت خود را نسبت به اساتید ارجمندی که این مجموعه مرهون زحمات بی شائبه و مخلصانه آن‌هاست ابراز دارم. به ویژه استاد راهنمای گرامی **جناب آقای دکتر غلامرضا مقدسی** که نه تنها در نگارش این رساله بلکه در طی دوران تحصیل از الطاف و عنایات ایشان همواره بهره‌مند بودم. همچنین از **جناب آقای دکتر علی‌اکبر استاجی** به جهت مشاوره‌های ارزنده‌شان و دیگر اساتید گروه ریاضی که مرا بر خوان علم خویش راه داده، تا به قدر ظرفیت خویش از آن استفاده نمایم، کمال تشکر را دارم.

به اساتید گرامی **جناب آقای دکتر ابراهیمی** و **سرکار خانم دکتر محمودی** که زحمت داوری رساله را بر عهده گرفتند و مرا مرهون لطف خویش قرار دادند، ادای احترام می‌نمایم.

اعظم یعقوبی جامی

تابستان ۱۳۸۸

تقدیم به:

مادر و پدرم

و تمامی عزیزانم که مهربانیها و بزرگواریهایشان
فروغ زندگی و مایه امیدم بود.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

تحقیق در مورد خواص هموراری [1] و تصویری $S-$ سیستم‌ها و همچنین ویژگی‌های تابعگون [2]هایی به صورت $A\otimes-$ (از رسته $S-$ سیستم‌ها به رسته مجموعه‌ها) برای $S-$ سیستم‌های راست روی تکواره S، توسط **کیلپ** [3] در سال ۲۰۰۰ انجام گرفت. [۱۲]
در دهه ۱۹۸۰، برای اولین بار **فخرالدین** [4]، [۹] و [۱۰] را در ارتباط با حاصلضرب تانسوری و خواص همواری روی تکواره‌های جزئی مرتب [5] منتشر کرد. این کار در سال ۲۰۰۵ توسط **شی** [6]، **لیو** [7] و **بولمن فلمینگ** [8] در [۱۳] و [۱۴] ادامه یافت. در

$Flatness\ properties\ of\ S-posets$

نوشته بولمن فلمینگ ([۷]) که مرجع اصلی این پژوهش می‌باشد، به بررسی ویژگی‌های همواری $S-$ سیستم‌های جزئی مرتب تک عنصری و خاج قسمتی ریس پرداخته شده است.
در فصل اول، به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه پرداخته و سپس نشان می‌دهیم که تکواره‌های معکوس پذیر، مطلقاً هموار هستند. (بدین معنا که هر $S-$ سیستم راست یا چپ، هموار است.)
فصل بعدی را با معرفی رسته $S-$ سیستم‌های جزئی مرتب آغاز نموده و در ادامه ساختارهای کلی در رسته $Pos-S$ را مورد بررسی قرار داده، سپس برخی خواص نظریه‌ای رسته‌ای را برای آن بیان می‌کنیم.

---

[1] $flatness\ properties$
[2] $functor$
[3] $Kilp$
[4] $Fakhrudin$
[5] $S-poset$
[6] Shi
[7] Liu
[8] $Bulman\ Fleming$

در فصل سوم، ابتدا به معرفی تکواره‌های جزئی مرتب مطلقاً هموار پرداخته، نشان می‌دهیم که نیم مشبکه مرتب S با عنصر همانی (نیم مشبکه با ترتیب طبیعی را یک تکواره جزئی مرتب در نظر می‌گیریم) مطلقاً هموار راست است اگر و تنها اگر $|S| \leq 2$. همچنین اگر S یک نیم گروه کاملاً ساده (با الحاق ۱) باشد، در این صورت S به عنوان یک تکواره، مطلقاً هموار است اگر و تنها اگر یک گروه چپ[۹] باشد.

در ادامه نشان دادیم که برای یک $S-$ سیستم مرتب، اگر $S = (\mu(G;I,\Lambda;P))$[۱]، به طوری که $(S,\leq)$ با هر ترتیب سازگار $\leq$ مطلقاً هموار است، آن گاه $|\Lambda| = 1$ و همچنین گروه G تناوبی است. که در این مورد، I بیشتر از دو عنصر دارد.

در پایان، به بیان نتایج دیگری از تکواره‌های جزئی مرتب مطلقاً هموار می‌پردازیم.

[۹] $leftgroup$

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مجموعه های مرتب جزئی

با توجه به اهمیّت مطلب و کار صورت گرفته روی مجموعه‌های مرتب جزئی در فصل‌های آینده، اولین بخش این فصل را به این موضوع اختصاص داده‌ایم.

تعریف ۱.۱ : یک **رابطه دوتایی** یا به طور ساده یک **رابطه** R از مجموعه A به مجموعه B زیر مجموعه‌ای از $A \times B$ است.

فرض کنید R رابطه‌ای از A به مجموعه B باشد. اگر $(x,y) \in R$ می‌نویسیم xRy یا $R(x) = y$. اگر xRy آن‌گاه می‌گوییم x با y نسبت به R مرتبط است یا به طور ساده x با y رابطه دارد (یا y در رابطه با x است). اگر $A = B$، آن‌گاه صحبت از رابطه دوتایی روی A می‌کنیم.

مثال ۲.۱ : مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید R مجموعه‌ی تمام جفت‌های مرتب (m,n) از اعداد صحیح باشد که $m < n$ یعنی

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m < n\}.$$

در این صورت R یک رابطه دوتایی روی $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۳.۱ : یک **ترتیب جزئی** روی مجموعه A، یک رابطه دوتایی «$\leq$» روی A است، یعنی زیرمجموعه‌ای از $A \times A$ است که خواص زیر را دارد:

الف) **خاصیت انعکاسی:** برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq a$.

ب) **خاصیت پادتقارنی:** برای هر $a, b \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آن‌گاه $a = b$.

ج) **خاصیت تعدی:** برای هر $a, b, c \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آن‌گاه $a \leq c$.

زوج $(A, \leq)$ را یک **مجموعه مرتب جزئی** می‌گوییم و چنان چه ابهامی پیش نیاید به اختصار می‌گوییم A یک مجموعه مرتب جزئی[1] است. اگر علاوه بر شرایط فوق برای هر a و b در A داشته باشیم $a \leq b$ یا $b \leq a$ رابطه دوتایی $\leq$ یک **ترتیب کلی** نامیده می‌شود. مجموعه ناتهی A با یک ترتیب کلی، **زنجیر**[2] نامیده می‌شود.

مثال ۴.۱ : فرض کنیم $Su(A)$ نشان دهنده مجموعه توانی A باشد یعنی مجموعه تمام زیرمجموعه‌های A. در این صورت $\subseteq$ یک ترتیب جزئی روی $Su(A)$ است.

تعریف ۵.۱ : یک رابطه دوتایی $\sim$ تعریف شده روی مجموعه A، **رابطه هم ارزی** نامیده می‌شود هرگاه بازتابی، تقارنی (برای هر $a, b \in A$، اگر $(a \sim b)$ آن‌گاه $(b \sim a)$) و تعدی باشد.

مثال ۶.۱ فرض کنیم $\varphi : X \to Y$ یک نگاشت باشد رابطه

$$ker\varphi = \{(x, x') \in X \times X| \ \ \varphi(x) = \varphi(x')\}$$

یک رابطه هم ارزی روی X است که هم ارزی هسته‌ای نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۱ : فرض کنیم $\mathcal{B}(X)$ نشان دهنده مجموعه تمام روابط دوتایی روی مجموعه X باشد. در این صورت **ترکیب روابط** $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho\sigma = \{(x, z) \in X \times X \mid \text{وجود داشته باشد } y \in X \text{ که } x\sigma y \text{ و } y\rho z\}$$

[1] $poset$
[2] $chain$

همچنین اگر $\rho \subseteq X \times Y$ باشد **معکوس این رابطه**، عبارت است از:

$$\rho^{-1} = \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in \rho\}$$

تعریف **۸.۱** : فرض کنیم P و Q دو مجموعه مرتب جزئی باشند نگاشت $h : P \to Q$ را

۱) **حافظ ترتیب یا یکنوا**[۳] **(همنوا)** گوییم هرگاه $p \leq q$ در P آن‌گاه $h(p) \leq h(q)$ در Q.

۲) **نشاننده ترتیب**[۴] گوییم چنانچه داشته باشیم $p \leq q$ در P اگر و تنها اگر $h(p) \leq h(q)$ در Q.

تذکر **۹.۱** : هر نگاشت نشاننده ترتیب یک به یک است.

برهان: چنانچه $h : P \to Q$ نشاننده ترتیب باشد و $h(x) = h(y)$ یعنی $h(x) \leq h(y)$ و $h(y) \leq h(x)$. چون h نشاننده ترتیب است نامساوی اول نتیجه می‌دهد $x \leq y$ و نامساوی دوم نتیجه می‌دهد $y \leq x$ و بنا بر خاصیت پاد تقارنی $\leq$، داریم $x = y$.

■

توجه کنیم عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

مثال **۱۰.۱** : نگاشت h را نگاشت همانی از مجموعه دو عنصری $\mathbf{1} \sqcup \mathbf{1} = \{۰, ۱\}$ (یعنی اعضا با هم قابل مقایسه نیستند) به روی زنجیر دو عضوی $\mathbf{2} = \{۰, ۱\}$ که $۰ \leq ۱$ در نظر می گیریم واضح است h یک به یک هست ولی نشاننده ترتیب نیست زیرا

$۱ = h(۱) \leq h(۰) = ۰$ در حالی که در $\mathbf{1} \sqcup \mathbf{1} = \{۰, ۱\}$ هیچ ترتیبی بین ۰ و ۱ وجود ندارد.

تعریف **۱۱.۱** : دو مجموعه مرتب جزئی P و Q را یکریخت گوییم چنان چه نگاشت دوسویی و یکنوای $h : P \to Q$ به قسمی وجود داشته باشد که $h^{-1} : Q \to P$ نیز یکنوا باشد.

قضیه **۱۲.۱** دو مجموعه مرتب جزئی P و Q یکریخت هستند اگر و تنها اگر نشاننده ترتیبی پوشای $h : P \to Q$ وجود داشته باشد. **برهان:** چون h پوشاست و بنابر تذکر ۹.۱، یک به یک

[۳] *monotonic map*

[۴] *order embedding*

نیز هست پس نگاشت دوسویی یکنواست. $h^{-1}: Q \to P$ نیز یکنواست زیرا $q_1 \leq q_2$ در Q را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$h[h^{-1}(q_1)] \leq h[h^{-1}(q_2)]$. اکنون بنا بر فرض داریم $h^{-1}(q_1) \leq h^{-1}(q_2)$

■

تعریف ۱۳.۱ : مجموعه $\mathbf{L}$ به همراه دو عمل دوتایی $\vee$ و $\wedge$ روی $\mathbf{L}$ **مشبکه**[۵] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in \mathbf{L}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) (a) $x \vee y = y \vee x$

(b) $x \wedge y = y \wedge x$ (قانون‌های جابه جایی)

۲) (a) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

(b) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (قانون‌های شرکت پذیری)

۳) (a) $x \vee x = x$

(b) $x \wedge x = x$ (قانون‌های خودتوانی)

۴) (a) $x = x \vee (x \wedge y)$

(b) $x = x \wedge (x \vee y)$ (قانون‌های جذب).

مثال ۱۴.۱ : مجموعه اعداد طبیعی به همراه دو عمل دوتایی $\vee$ (کوچکترین مضرب مشترک) و $\wedge$ (بزرگترین مقسوم علیه مشترک) یک مشبکه می‌باشد.

تعریف ۱۵.۱ : مجموعه $\mathbf{L}$ به همراه عمل $\vee$ روی $\mathbf{L}$ **نیم مشبکه**[۶] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in \mathbf{L}$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $x \vee y = y \vee x$ (قانون جابه جایی)

---

[۵] *lattice*

[۶] *semi lattice*

۲) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (قانون شرکت پذیری)

۳) $x \vee x = x$ (قانون خود توانی).

۱—۲ نیم گروه و تکواره

در این بخش مفاهیم مورد نیاز مربوط به نیم گروه[۷] و تکواره[۸] را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱۶ : مجموعه ناتهی S باعمل دوتایی

$$.: S \times S \to S$$

$$(a, a') \to a.a'$$

که شرکت پذیر نیز باشد (یعنی برای هر a و b و c در S، $(a.b).c = a.(b.c)$)، نیم گروه نامیده می‌شود. از این به بعد چنان چه ابهامی پیش نیاید به جای $a.b$ از نماد ab استفاده می کنیم.

تعریف ۱.۱۷ : نیم گروه S که دارای عضو همانی باشد، تکواره نامیده می‌شود.

مثال ۱.۱۸ : $(N, .)$ یک تکواره و $(N, +)$ یک نیم گروه است.

تعریف ۱.۱۹ : زیر مجموعه ناتهی T از نیم گروه S را زیر نیم گروه S نامند اگر $T^۲ \subseteq T$.
اگر S تکواره باشد، T را زیرتکواره S نامند اگر $T^۲ \subseteq T$ و $۱ \in T$.

تعریف ۱.۲۰ : برای هر زیر مجموعه ناتهی A از نیم گروه S، مجموعه

$$\langle A \rangle = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A^n$$

[۷] *semigroup*

[۸] *monoid*

کوچکترین زیر نیم گروه S و شامل A است که آن را **زیر نیم گروه تولید شده توسط** A نامند. اگر $\langle A\rangle = S$ آن‌گاه A را **مجموعه اعضای مولد** S نامند. اگر $A=\{a\}$ و $\langle A\rangle = \langle a\rangle = S$ آن‌گاه S را **نیم گروه دوری**[۹] و a **را عنصر مولد** S **نامند.**

تعریف ۲۱.۱ : اگر S یک نیم گروه (تکواره) باشد، زیر مجموعه ناتهی $K \subseteq S$

۱) یک **ایده آل**[۱۰] **چپ** از S است اگر $SK \subseteq K$.

۲) یک **ایده آل راست** از S است اگر $KS \subseteq K$.

۳) یک **ایده آل دو طرفه** از S است اگر ایده آل چپ و راست باشد.

برای هر $s \in S$ ایده آل sS و Ss را ایده آل های اصلی S نامند.

نیم گروه S، که ایده آل غیر بدیهی ندارد را **کاملاً ساده**[۱۱] نامند.

تعریف ۲۲.۱ : تکواره S را **برگشت پذیر راست**[۱۲] نامند اگر برای هر $s,t \in S$، $Ss \bigcap St \neq \emptyset$.

تعریف ۲۳.۱ : تکواره S را **جمع شونده چپ**[۱۳] نامند اگر در شرط زیر صدق کند:

$$(\forall s, s' \in S)\ (\exists u \in S)\ (us = us')$$

تعریف ۲۴.۱ : فرض کنیم S یک نیم گروه باشد:

۱) عضو $e \in S$ را **همانی چپ** نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $es = s$.

۲) عضو $e \in S$ را **همانی راست** نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $se = s$.

۳) عضو $e \in S$ را **همانی** نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $es = se = s$.

---

[۹] *cyclic semigroup*

[۱۰] *ideal*

[۱۱] *completely simple*

[۱۲] *right reversible*

[۱۳] *left collapsible*

عضو همانی در یک نیم گروه معمولاً با 1_S نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۵.۱ : عضو $c \in S$ را **حذف پذیر راست**[۱۴] نامند اگر $sc = tc$ برای هر $s, t \in S$ آن‌گاه $s = t$. به همین ترتیب حذف پذیر چپ نیز تعریف می‌شود.
عضو $c \in S$ را حذف پذیر نامیم، در صورتی که حذف پذیر راست و چپ باشد.

تعریف ۲۶.۱ : برای نیم گروه S

۱) عضو $z \in S$ را **چپ صفر**[۱۵] نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = z$.

۲) عضو $z \in S$ را **راست صفر**[۱۶] نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $sz = z$.

۳) عضو $z \in S$ را **صفر** نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، $zs = sz = z$.

نیم گروه S را چپ (راست) صفر نامند اگر تمام اعضای آن چپ (راست) صفر باشد. عضو صفر در یک نیم گروه معمولاً با 0 نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۷.۱ : زیر مجموعه ناتهی M از نیم گروه S را پایه‌ای برای S نامند اگر هر عضو S را بتوان به صورت حاصلضرب منحصر به فردی از اعضای M نوشت.

تعریف ۲۸.۱ : نیم گروه S را **آزاد**[۱۷] نامند اگر دارای پایه ناتهی M باشد.

قضیه ۲۹.۱ فرض کنیم $F(X)$ نیم گروه آزاد با پایه X و $f : X \to S$ یک نگاشت از پایه X به نیم گروه S باشد. در این صورت همریختی منحصر به فرد $\bar{f} : F(X) \to S$ موجود است به طوری که $\bar{f}|_X = f$.

برهان: به [۱۲] گزاره ۳۱.۲.۱ مراجعه شود.

■

---

[۱۴] $right\ cancellable$

[۱۵] $left\ zero\ element$

[۱۶] $right\ zero\ element$

[۱۷] $free\ semigroup$

تعریف ۳۰.۱ : فرض می‌کنیم X یک مجموعه ناتهی مخالف صفر باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$X^+ = \{x_1x_2\cdots x_n |\ x_i \in X,\ i \in n,\ n \in N\}$$

به قسمی که دو عضو $x_1x_2\cdots x_n$ و $y_1y_2\cdots y_m$ متعلق به X^+ هم ارزند اگر و تنها اگر $m = n$ و به ازای هر $i \in n$، $x_i = y_i$. همچنین ضرب در X^+ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(x_1x_2\cdots x_n).(y_1y_2\cdots y_m) = x_1x_2\cdots x_ny_1y_2\cdots y_m$$

در این صورت X^+ را **نیم گروه آزاد با پایه** X[18] می‌نامیم.

همچنین $X^* = X^+ \bigcup\{\emptyset\}$ را **تکواره آزاد با پایه** X می‌نامیم.

تعریف ۳۱.۱ : فرض کنیم $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. ρ

۱) **همنهشتی**[19] **چپ** در S نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $s, t, u \in S$، اگر $s\ \rho\ t$ آن‌گاه $(us)\ \rho\ (ut)$.

۲) **همنهشتی راست** روی S نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $s, t, u \in S$، اگر $s\ \rho\ t$ آن‌گاه $(su)\ \rho\ (tu)$.

۳) **همنهشتی دو طرفه** در S نامیده می‌شود در صورتی که برای هر $s, t, u \in S$، اگر $s\rho t$ آن‌گاه $(us)\ \rho\ (ut)$ و $(su)\ \rho\ (tu)$.

توجه شود که رابطه هم ارزی ρ روی نیم گروه S همنهشتی است اگر و تنها اگر $s\rho t$ و $u\rho v$ نتیجه دهد $(su)\rho(tv)$ برای هر $s, t, u, v \in S$. همچنین کلاس $a \in S$ نسبت به این رابطه هم ارزی را با $\rho(a)$ یا $[a]_\rho$ یا $[a]$ نشان می‌دهیم. اگر ρ یک رابطه همنهشتی روی S باشد S/ρ با تعریف ضرب $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$، برای $s, t \in S$، یک نیم گروه است که نیم گروه خارج قسمتی نامیده می شود.

[18] *free smigroup with the basis* X

[19] *congruence*

تعریف ۳۲.۱ : فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. گوئیم $s,t \in S$ **جابجا می‌شوند** اگر $st = ts$.
مجموعه

$$C(S) = \{c \in S|\ cs = sc, \ \ \forall \ \ s \in S\}$$

را **مرکز** S می‌نامیم. اگر $C(S) = S$ آن‌گاه S را **نیم گروه تعویض پذیر یا آبلی** می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۱ : فرض کنیم S یک نیم گروه باشد. عضو $e \in S$ **خود توان** نامیده می‌شود اگر $e^{۲} = e$. مجموعه تمام عناصر خودتوان S را با نماد $E(S)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۴.۱ : نیم گروه S را یک **نیم گروه خود توان** یا **نوار**[۲۰] نامند اگر $E(S) = S$.

تعریف ۳۵.۱ :نیم گروه خود توان S،

الف) **نوار نرمال چپ**[۲۱] نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y,z \in S$، $xyz = xzy$.

ب) **نوار نرمال راست** نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y,z \in S$، $xyz = yxz$.

ج) **نوار نرمال** نامیده می‌شود اگر برای هر $x,y,z \in S$، $xyzx = xzyx$.

تعریف ۳۶.۱ : فرض کنیم S و T دو نیم گروه باشند. نگاشت $\varphi : S \to T$ **همریختی نیم گروهی** نامیده می شود اگر برای هر $s,s' \in S$، $\varphi(ss') = \varphi(s)\varphi(s')$. یک همریختی نیم گروهی بین تکواره های S و T **همریختی تکواره‌ای** است اگر $\varphi(۱_S) = ۱_T$. در هر دو حالت

$$ker\varphi = \{(s,s') \in S \times S|\varphi(s) = \varphi(s')\}$$

همنهشتی هسته برای همریختی φ نامیده می شود.
اگر $S = T$ آن گاه همریختی نیم گروهی را درون ریختی نامند.

---

[۲۰] $band$
[۲۱] $left\ normal\ band$

تعریف ۳۷.۱ : اگر ρ رابطه همنهشتی روی نیم گروه S باشد، نگاشت کانونی

$$\pi_{\varphi} : S \to S/\rho$$

که به هر $x \in S$، $[x]_\rho$ را نسبت می‌دهد بروریختی کانونی نامیده می‌شود.

تعریف ۳۸.۱ : عنصر s از نیم گروه S را **منظّم**[۲۲] نامند، اگر $x \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $sxs = s$.

اگر هر عنصر S منظم باشد، نیم گروه S را منظم نامند.

تعریف ۳۹.۱ : اگر S یک نیم گروه باشد، عنصر $s' \in S$ را وارون $s \in S$ نامند هرگاه

$$s = ss's \qquad , \qquad s' = s'ss'$$

مجموعه وارون های s را با $V(s)$ نشان می‌دهند.

نیم گروه S را نیم گروه وارون پذیر نامند، اگر هر عضوش یک وارون یکتا داشته باشد.

قضیه ۴۰.۱ :برای هر عنصر منظّم از یک نیم گروه، یک عنصر وارون وجود دارد.

برهان: اگر $s \in S$ عنصر منظم در نیم گروه S باشد. در این صورت $x \in S$ وجود دارد به طوری که $sxs = s$. قرار می دهیم $s' = xsx$. در این صورت داریم:

$$ss's = s(xsx)s = (sxs)xs = sxs = s$$
$$s'ss' = (xsx)s(xsx) = x(sxs)(xsx) = xs(xsx) = x(sxs)x = xsx = s'$$

بنابراین s در S دارای وارون است یعنی $s' \in V(s)$.

■

تعریف ۴۱.۱ : نیم گروه S را **تناوبی**[۲۳] نامند، اگر تمام زیر نیم گروه‌های دوری آن متناهی باشند.

---
[۲۲] *regular*
[۲۳] *periodic*

نتیجه ۴۲.۱ : فرض کنیم نیم گروه S تناوبی باشد. برای هر $x \in S$، $e \in E(S)$ و $n \in N$ وجود دارد به طوری که $x^n = e$.

برهان: به [۱۲] نتیجه ۱۵.۳.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۴۳.۱ : فرض کنیم G یک گروه و A و B دو مجموعه ناتهی و $P : B \times A \to G$ یک نگاشت باشد. مجموعه

$$\mu(G, A, B; P) = \{(a, g, b) \mid a \in A, g \in G, b \in B\}$$

با عمل ضرب $(a, g, b)(c, h, d) = (a, gP(b, c)h, d)$ را **نیم گروه ماتریسی ریس بدون صفر** [۲۴] نامند.

همچنین برای نیم گروه ماتریسی ریس $\mu^\circ(G, A, B; P) = \mu(G, A, B; P) \bigcup \{\circ\}$، تعریف می‌کنیم $\circ(a, g, b) = (a, g, b)\circ = \circ\circ = \circ$.

قضیه ۴۴.۱ : نیم گروه S، کاملا ساده است اگر و تنها اگر S یکریخت با یک نیم گروه ماتریسی ریس بدون صفر باشد.

برهان: به [۱۲] قضیه ۲۰.۳.۱ مراجعه شود.

■

تعریف ۴۵.۱ : نیم گروه S را **حل پذیر (یکتای) چپ** [۲۵] نامند اگر برای هر $a, b \in S$ عضو (یکتای) $s \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $sa = b$. به همین ترتیب نیم گروه حل پذیر راست تعریف می‌شود.

نیم گروه حل پذیر یکتای چپ (راست) را **گروه چپ (راست)**[۲۶] نامند.

[۲۴] $rees\ matrix\ semigroup\ without\ zero$

[۲۵] $left\ solvable$

[۲۶] $left\ group$