به نام خدا

دانشگاه‌بیرجند
دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

انشعاب های کلی (جهانی) از چرخه های حدی

استاد راهنما :
دکترحاجی محمد محمدی نژاد

استاد مشاور :
دکترامید ربیعی مطلق

نگارنده :
راضیه دروازه بان زاده

تابستان ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر

و

مادرم

وهمسر مهربانم

تقدیر و تشکر:

سپاس و امتنان بیکران او که مرا آفرید و مرا توان آن داد تا تودر ناگه زمان خویش را جستجو کنم و پس از او سپاس اولین آموزگارم که قلم در دستم نهاد و آنان که چرخش قلم را به من آموختند و استادانم که مرا امید آن دادند که از لرزش قلم نهراسم و بنگارم آن‌چه در توان من است .

مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد راهنمای محترم آقای دکتر حاجی محمد محمدی نژاد که با راهنمایی‌های ارزنده‌ی خویش مرا در تدوین این پایان نامه یاری فرمودند ابراز می‌دارم.

از استاد مشاور ارجمند آقای دکتر امید ربیعی که از راهنمایی‌های روشنگرانه خویش بهره‌مندم ساختند کمال تشکر را دارم.

از اساتید داور آقای دکتر جانفدا و آقای دکتر نصر آبادی که در بازنگری و تصحیح این پایان نامه همراه بوده‌اند و همچنین از خانم دکتر نصرآبادی نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی که به این جلسه رسمیت بخشیدند نهایت تشکر را دارم.

چکیده:

هدف اصلی این پایان نامه بکار بردن روش دو—ایزوکلاین ایروگین برای تحلیل کلی سیستم های دینامیکی چند جمله ای، ساختن سیستم های کانونی با پارامتر های میدان چرخشی و مطالعه ی انشعاب ها در چرخه های حدی می باشد. در نهایت با استفاده از سیستم های کانونی، نتایج حاصل از چرخه های حدی و اصل انفصال وینتنر—پرکو یک دیدگاه کلی برای حل احتمالی مساله ی شانزدهم هیلبرت بدست می آوریم .

کلمات کلیدی :

انشعاب، چرخه های حدی، حلقه ی هموکلینیک و هیتروکلینیک، میدان های چرخشی، روش دو—ایزوکلاین ایروگین.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تاریخچه‌ای از مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت

۱—۱ مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت

در سال ۱۹۰۰ میلادی هیلبرت [۱] در دومین کنفرانس بین المللی ریاضیات که در شهر پاریس برگزار شد، فهرستی از ۲۳ مسأله‌ی حل نشده از شاخه‌های مختلف ریاضی را مطرح نمود که قسمت دوم از مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت به صورت زیر است و هنوز به عنوان یک مسأله‌ی باز در دنیای ریاضیات باقی مانده است[۱۱].

مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت : تعداد ماکزیمم دورهای حدی سیستم چند جمله‌ای درجه n

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \\ \dot{y} = \sum_{i+j=0}^{n} b_{ij}x^i y^j \end{cases}$$

چیست؟ به بیان دیگر مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت به تعیین تعداد ماکزیمم چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای درجه‌ی n و موقعیت نسبی آن‌ها در صفحه می‌پردازد. تعداد چرخه‌های حدی در یک سیستم چندجمله‌ای از درجه n را با H_n نمایش داده و آن را عدد هیلبرت می‌نامند.($H(n) \equiv H_n$)

البته این سوال را می توان به سه مسأله‌ی زیر تقسیم‌بندی نمود :

مسأله ۱ : آیا هرمیدان برداری چند جمله‌ای در صفحه تعداد متناهی چرخه‌ی حدی دارد؟

مسأله ۲ : آیا تعداد چرخه‌های حدی میدان‌های برداری چند جمله‌ای در صفحه کران داراست؟

مسأله ۳ : آیا کران بالایی برای H_n وجود دارد؟

چون میدان‌های برداری خطی چرخه‌ی حدی ندارند پس $H(1) = 0$، ولی برای $n > 1$ هنوز وجود عدد هیلبرت اثبات نشده است. در سال ۱۹۲۳ میلادی دولاک [۲] ادعاکرد که مسأله‌ی اول را حل کرده است. اما در سال ۱۹۶۰ ادعای آن‌ها به وسیله‌ی مثال نقضی توسط نویکف [۳] رد شد. در سال ۱۹۷۵

[۱] Hilbert

[۲] Dulac

[۳] *Novikov*

پتروفسکی [۴] و لاندیس [۵] جوابی برای مسأله‌ی سوم یافتند و ادعا کردند که $H(۲) = ۲$ و $H(n) \leq P_۳(n)$ که در آن $P_۳(n)$ چند جمله‌ای زیر است :

$$P_۳(n) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(۶n^۳ - ۷n^۲ - ۱۱n + ۱۶) \\ \frac{۱}{۲}(۶n^۳ - ۷n^۲ + n + ۴) \end{cases}$$

که اولی برای n زوج و دومی برای n فرد تعریف شده است.

درسال ۱۹۷۹ ریاضی دانان چینی به نام های شی، چن و ونگ[۶] مثال‌هایی از میدان های برداری درجه‌ی دوم با چهار دور حدی ارائه دادند بدین ترتیب آن‌ها نشان دادند که $H(۲) \geq ۴$. راجع به $H_۳$ تا سال ۱۹۸۳ باور بر این بود که یک سیستم چندجمله‌ای از درجه سه حداکثر هشت دور حدی موضعی دارد تا این که لیتال [۷] یک مثال از سیستم چند جمله‌ای از درجه سه با یازده دور حدی ارائه داد و بدین ترتیب نشان داد که $H_۳ \geq ۱۱$.

در سال ۱۹۸۴ ایلیاشنکو [۸] ثابت کرد که میدان‌های برداری چند جمله‌ای با نقاط تکین غیراستثنایی در صفحه، تعداد متناهی چرخه‌ی حدی دارند. در سال ۱۹۹۱ ایلیاشنکو و در سال ۱۹۹۲ اکال [۹] به طور جداگانه اثبات کردند که نه تنها میدان‌های برداری چندجمله‌ای بلکه میدان‌های برداری تحلیلی نیز در صفحه، تعداد متناهی دور حدی دارند. بدین ترتیب بعد از گذشت ۹۲ سال از تاریخ طرح مسأله‌ی هیلبرت، سوال اول جواب مثبت گرفت و حل شد. ولی تاکنون برای مسأله‌ی دوم راه حلی ارائه نشده و حتی این مسأله برای $n = ۲$ باز باقی مانده است.

معمولاً برای بررسی دورهای حدی در یک سیستم چندجمله‌ای، سه تقسیم بندی به کار می‌برند. تقسیم بندی اول که فقط مربوط به سیستم‌های مرتبه‌ی دوم است و بوتین [۱۰] ثابت کرد که در این سیستم‌ها تعداد

---

[۴] $Petrovskii$

[۵] $Landis$

[۶] $S.L.Shi,\ L.S.Chen\ and\ M.S.Wang$

[۷] J.B. Lietal

[۸] $Ilyashenko$

[۹] $Ecalle$

[۱۰] $N.N.Bautin$

چرخه‌های حدی که از یک نقطه منشعب می‌شوند برابر سه است. دومین تقسیم‌بندی در مورد دورهای حدی جداکننده است و سومین و کامل‌ترین تقسیم بندی مربوط به دورهای حدی چند گانه می‌باشد، یکی از ویژگی‌های تقسیم بندی اخیر این است که به سیستم‌های دینامیکی با ابعاد بالاتر تعمیم می یابد. با توجه به پیچیدگی مسأله‌ی شانزدهم هیلبرت، یک راه حل ممکن برای مطالعه‌ی این مسأله در نظر گرفتن یک مسأله‌ی معلوم و بررسی وقوع انواع انشعاب های ممکن روی آن است.

هدف اصلی ما در این پایان نامه بسط و توسعه ی روش دو—ایزوکلاین ایروگین برای تحلیل کلی سیستم های دینامیکی چند جمله ای و بنا کردن سیستم های کانونی با پارامترهای میدان چرخشی است همچنین به مطالعه ی انشعاب در چرخه های حدی پرداخته وتلاش می کنیم تا یک دیدگاه کلی برای حل احتمالی مساله ی شانزدهم هیلبرت ارائه دهیم.

برای این منظور سیستم های دینامیکی دو بعدی :

$$\dot{x} = P(x,y), \dot{y} = Q(x,y)$$

که در آن $P(x,y)$ و$Q(x,y)$ چندجمله ای های با متغییرهای xوy وضرایب حقیقی هستند را در نظر می گیریم. مساله ی اصلی ومهم در بررسی خواص کیفی سیستم های دینامیکی بررسی مساله ی شانزدهم هیلبرت در رابطه بااین چنین سیستم هایی است . درواقع هدف یافتن تعداد ماکزیمم و موقعیت نسبی چرخه های حدی برای این چنین سیستم هایی است .

همانطور که قبلاً گفته شد این مساله یکی از مسائل بازدردنیای ریاضیات است وبااینکه روش هاونتایج زیادی از مطالعه ی چرخه های حدی بدست آمده اما باز هم مساله ی هیلبرت حتی برای ساده ترین نوع سیستم های دینامیکی (سیستم های درجه ی دوم)همچنان حل نشده باقی مانده است. آنچه تاکنون بدست آمده اینکه، سیستم های درجه ی دوم دارای حداقل چهار دور حدی هستند.

قبلاًچرخه های حدی را به سه دسته تقسیم کردیم.می توان انشعاب در چرخه های حدی را نیز به سه دسته‌ی زیر تقسیم کرد:

دسته ی اول : انشعاب آندورونف–هوف [۱۱] که‌انشعاب از یک نقطه ی تکین از نوع مرکز یا کانون می باشد. لازم به ذکر است که این انشعاب فقط برای سیستم های درجه‌ی دو به طور کامل مورد بحث وبررسی قرار گرفته است . بوتین نشان داد، تعداد انشعاب های چرخه های حدی از یک نقطه ی تکین برابر با سه است همچنین بررسی های زولاک [۱۲] نشان داد، تعداد انشعاب های چرخه های حدی از یک نقطه ی تکین ، کمتر از یازده نیست.

دسته ی دوم: انشعاب چرخه های حدی جدا کننده از مسیرهای هیتروکلینیک [۱۳] یا هموکلینیک [۱۴] می باشد. این دسته از انشعابها به طور مشترک توسط سه دانشمند به نام های دیومویتر[۱۵]، روساریو[۱۶] و روسیایو[۱۷] مورد بررسی قرار گرفت ، در حال حاضر طبقه بندی از چرخه‌های جدا کننده، ساختار دورهای حدی بیشتر آنها و نتایج کلی در ارتباط با این گروه انشعاب ها از چرخه های حدی را در اختیار داریم .

آخرین والبته کاملترین نوع از انشعاب های چرخه های حدی انشعاب چرخه های حدی چند مقداری با پیچیدگی بسیار است وتوسط دانشمندانی چون فرانکویز [۱۸]، پویق [۱۹] و پرکو[۲۰] مورد بحث و بررسی قرار گرفت. همه ی انشعاب های ذکر شده قابل تعمیم به سیستم های دینامیکی با ابعاد بالاتر هستند و در کاربردهای گوناگون و مهمی از آنها استفاده می شود.

انشعاب های ذکرشده موضعی اند لذا کافیست همسایگی از یک نقطه را برای هر کدام از انواع انشعاب های چرخه های حدی ذکر شده در فضای پارامتری در نظر بگیریم ، برای بررسی رفتار کیفی انشعاب های

---

[۱۱] $Andronov - Hopf$

[۱۲] $H.Zoladek$

[۱۳] homoclinic

[۱۴] hetroclinic

[۱۵] $F.Dumoryier$

[۱۶] $R.Roussarie$

[۱۷] $C.Rousseau$

[۱۸] $J.P.Francoise$

[۱۹] $C.C.Pough$

[۲۰] $L.M.Perko$

چرخه های حدی روی صفحه ی فازی و فضای پارامتری نیاز به یک قضیه ی کلی انشعاب داریم.
این ایده اولین بار توسط ایروگین مطرح شد . وی معتقد بود ، باید میان انشعاب های چرخه های حدی ارتباط برقرار کنیم در حقیقت این ایده از قضیه ای در رابطه با سیستم های دینامیکی با ابعاد بالاتر بدست آمده و مشمول دراصل انفصال وینتنر است و توسط پرکو برای مطالعه و بررسی چرخه های حدی چند مقداری (برای دو بعد) مورد استفاده قرار گرفت.
در انتهای بحث باید بدانیم چگونه انشعاب های چرخه های حدی را کنترل کنیم.
در حقیقت بهترین راه برای پاسخ گفتن به این سوال استفاده از پارامترهای میدان چرخشی است که اولین بار توسط داف[۲۱] مطرح شد .

۱—۲ تعاریف وقضایای موردنیاز

در این بخش به بیان مفاهیم وقضایای مورد نیاز همچون مفهوم نگاشت پوانکاره، دورهای حدی و انشعاب در دورهای حدی وپایداری ساختاری که در فصل‌های آینده به آن‌ها نیاز داریم خواهیم پرداخت.
معادلات دیفرانسیل از نظر وابستگی به زمان به دو دسته تقسیم می‌شوند: دسته‌ی اول معادلاتی هستند که به طور آشکار به t وابسته‌هستند و به صورت

$$\dot{x} = f(x,t)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n \qquad (۱-۱)$$

می باشند و آن‌ها را دستگاه غیر خودگردان[۲۲] می‌نامند، دسته‌ی دوم معادلاتی هستند که به طور آشکار

[۲۱] $G.F.D.Duff$

[۲۲] $Nonautonomous$

به t وابسته نیستند و به صورت

$$\dot{x} = f(x)\ ,\ \ x \in \mathbb{R}^n \qquad (۱-۲)$$

می باشند و آن‌ها را دستگاه خودگردان[۲۳] می‌نامند. که درآن $\dot{x}$ نشان دهنده‌ی مشتق x نسبت به متغیر حقیقی t است. منظور از یک جواب برای دستگاه $(۱-۱)$ بر بازه‌ی $I \subseteq \mathbb{R}$ تابعی مثل $x(t) : I \longrightarrow U$ تعریف شده بر I است به طوری که برای هر $t \in I$، $\dot{x}(t) = f\left(x(t), t\right)$. جواب منحصربه فرد سیستم معادلات $(۱-۱)$ که در شرط اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ صدق می‌کند را با $x(t, t_\circ, x_\circ)$ نشان می‌دهیم. واضح است که $x(t, t_\circ, x_\circ)$ جوابی از سیستم معادلات $(۱-۲)$ است که در شرط اولیه $x(t_\circ) = x_\circ$ صدق می کند اگر وتنها اگر $x(t)$ در معادله‌ی انتگرالی زیر صدق کند.

$$x(t, t_\circ, x_\circ) = x_\circ + \int_{t_\circ}^{t} f(s, x(s, t_\circ, x_\circ))ds \qquad (۱-۳)$$

۱.۱ **تعریف :** فرض کنیم I بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد تابع $x : I \longrightarrow U$ را جواب مسأله‌ی مقداراولیه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \in U \end{cases}$$

می‌نامیم اگر x جواب $\dot{x} = f(x)$ بر I باشد و برای $t_\circ \in I$، $x(t_\circ) = x_\circ$. اگردر دستگاه غیر خودگردان $(۱-۱)$ تعریف کنیم $y = \binom{x}{t} \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}}$ و $g(y) = (f(x,t), ۱) \in \mathbb{R}^{\mathbf{n+1}}$ در این‌صورت این دستگاه تبدیل به دستگاه خودگردان $\dot{y} = g(y)$ می‌شود که حالت برداری آن به صورت زیر است :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ \dot{t} = ۱ \end{cases}$$

---
[۲۳] *Autonomous*

۲.۱ تعریف : فرض کنیم $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع و $\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \end{cases}$ یک مسأله‌ی مقدار اولیه باشد، همچنین فرض کنید $\mathcal{A} = \{x_\alpha : I_\alpha \longrightarrow U\}_\alpha$ خانواده‌ی همه‌ی جواب‌های این مسأله‌ی مقداراولیه باشد. در این‌صورت

$$\begin{cases} x : \bigcup_\alpha I_\alpha \longrightarrow U \\ t \longmapsto x_\alpha(t) \quad , \quad t \in I_\alpha \end{cases}$$

یک جواب این مسأله‌ی مقداراولیه است که آن را جواب ماکسیمال می‌نامیم و $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$ را بازه‌ی ماکسیمال وجود جواب می‌گوییم. اکنون فرض می‌کنیم $x(t)$ یک جواب مسأله‌ی مقداراولیه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_\circ) = x_\circ \in U \end{cases}$$

باشد. در این‌صورت اگر تعریف کنیم $y(t) = x(t + t_\circ)$ آن‌گاه

$$y'(t) = x'(t + t_\circ) = f\left(x(t + t_\circ)\right) = f\left(y(t)\right)$$

بعلاوه $y(\circ) = x(t_\circ) = x_\circ$. یعنی y یک جواب مسأله‌ی مقداراولیه‌ی

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(\circ) = x_\circ \in U \end{cases}$$

است. بدون این که به کلیت مسأله خللی وارد شود می‌توان فرض کرد که $t_\circ = \circ$، زیرا در غیر این‌صورت با یک انتقال ساده می‌توان $t_\circ$ را برابر با صفر قرار داد.

۳.۱ تعریف : نقطه‌ی $x_\circ$ را یک نقطه‌ی ثابت[۲۴] (بحرانی یاتکین) سیستم (۱ − ۲) خوانیم هر گاه $f(x_\circ) = \circ$. بدون آن‌که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود می‌توان نقطه‌ی بحرانی این سیستم را مبدأ

[۲۴] fix point

مختصات فرض کرد زیرا در غیر این‌صورت، اگر قرار دهیم $y = x - x_\circ$ آن‌گاه بانوشتن بسط سری تیلور تابع f حول نقطه‌ی $x_\circ$ خواهیم داشت:

$$\dot{y} = \dot{x} = f(x) = f(x_\circ + y) = f(x_\circ) + \frac{f'(x_\circ)}{۱!}(x_\circ + y - x_\circ) + ...$$

$$\dot{y} = f(x_\circ) + Df(x_\circ)y + O(|\ y\ |^۲)$$

چون $x_\circ$ نقطه‌ی بحرانی سیستم است بنابراین $f(x_\circ) = ۰$، لذا خواهیم داشت:

$$\dot{y} = Df(x_\circ)y + O(|\ y\ |^۲) = Ay + O(|\ y\ |^۲)$$

که در آن $A = Df(x_\circ)$ یک ماتریس $n \times n$ است. سیستم معادلات

$$\dot{y} = Ay \quad ; \quad A = Df(x_\circ) \qquad (۴-۱)$$

، سیستم خطی شده‌ی متناظر با سیستم (۱ − ۲) حول نقطه‌ی بحرانی $x_\circ$ نامیده می‌شود. نقطه‌ی تکین $x_\circ$ را یک نقطه‌ی تکین منزوی گوییم هرگاه همسایگی‌ای از $x_\circ$ وجود داشته باشد که شامل هیچ نقطه‌ی تکین دیگری از سیستم نباشد.

۴.۱ تعریف : مبدأ یک مرکز[۲۵] برای سیستم (۱ − ۲) نامیده می‌شود اگر $\delta > ۰$ ی وجود داشته باشد به طوری که هر منحنی جواب سیستم غیر خطی (۱ − ۲) در همسایگی محذوف مبدأ، $N_\delta(۰) \sim \{۰\}$، یک منحنی بسته با صفر به عنوان نقطه‌ی داخلی‌اش باشد.

۵.۱ تعریف : مبدأ یک کانون پایدار[۲۶] برای سیستم (۱ − ۲) نامیده می‌شود اگر $\delta > ۰$ ی وجود داشته باشد به طوری که برای هر $۰ < r_\circ < \delta$ و $\theta_\circ \in R$ داشته باشیم $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow ۰$ و $|\ \theta(t, r_\circ, \theta_\circ)\ | \longrightarrow \infty$ وقتی $t \longrightarrow \infty$، و یک کانون ناپایدار [۲۷] نامیده می‌شود اگر پایدار نباشد. به بیان

[۲۵] center
[۲۶] stable focus
[۲۷] unstable focus

دیگر اگر داشته باشیم $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow \circ$ و $|\theta(t, r_\circ, \theta_\circ)| \longrightarrow \infty$ وقتی $t \longrightarrow -\infty$، در این حالت گوییم جواب ها به طور مارپیچی [۲۸] به مبدأ میل می‌کنند وقتی $t \longrightarrow \pm\infty$.

۶.۱ تعریف : مبدأ یک گره‌ی پایدار[۲۹] برای سیستم (۱ − ۲) نامیده می‌شود اگر $\delta > \circ$ ی وجود داشته باشد طوری که برای هر $\circ < r_\circ < \delta$ و $\theta_\circ \in R$ داشته باشیم $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow \circ$ و $lim_{t\longrightarrow\infty}\theta(t, r_\circ, \theta_\circ)$ موجود باشد وقتی $t \longrightarrow \infty$، یعنی هر مسیر در همسایگی محذوف مبدأ در راستای خط مماس کاملاً مشخصی به مبدأ نزدیک می‌شود. و مبدأ یک گره‌ی ناپایدار [۳۰] نامیده می‌شود اگر $r(t, r_\circ, \theta_\circ) \longrightarrow \circ$ و $lim_{t\longrightarrow-\infty}\theta(t, r_\circ, \theta_\circ)$ برای همه‌ی $r_\circ \in (\circ, \delta)$ و $\theta_\circ \in R$ موجود باشد وقتی $t \longrightarrow -\infty$. مبدأ یک گره‌ی کامل[۳۱](محض) نامیده می‌شود اگر یک گره باشد و هر شعاعی که از مبدأ می‌گذرد مماس بر مسیرهای سیستم (۱ − ۲) باشد.

۷.۱ تعریف : مبدأ یک نقطه‌ی توپولوژیک زینی [۳۲] برای سیستم (۱ − ۲) نامیده می‌شود اگر دو مسیر $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ موجود باشند که وقتی $t \longrightarrow \infty$، به مبدأ نزدیک شوند و همین طور دو مسیر $\Gamma_۳$ و $\Gamma_۴$ موجود باشند به طوری که وقتی $t \longrightarrow -\infty$، به مبدأ نزدیک شوند و یک $\delta > \circ$ ی موجود باشد به طوری که همه‌ی مسیرهایی که در همسایگی محذوف مبدأ یعنی $N_\delta(\circ) \sim \{\circ\}$ قرار می‌گیرند $N_\delta(\circ)$ را ترک کنند وقتی که $t \longrightarrow \pm\infty$. در این حالت به مسیرهای خاص $\Gamma_۱, ..., \Gamma_۴$ جدا کننده‌ها گفته می‌شود.

۸.۱ تعریف: یک دورجداکننده، $S_\circ$، از سیستم $\dot{x} = f(x)$، تصویر پیوسته ی یک دور شامل اجتماع تعداد متناهی نقطه ی تکین و جداکننده هایی مثل p_j و Γ_j، $j = ۱, ..., m$ است طوری که $\alpha(\Gamma_j) = p_j$ و $\omega(\Gamma_j) = p_{j+۱}$.

---

spiral[۲۸]

stable node[۲۹]

unstable node[۳۰]

proper node[۳۱]

topological saddle[۳۲]

۹.۱ تعریف:سیستم $\dot{x} = f(x)$ را در نظر می گیریم دور جدا کننده ی $S_\circ$ را یک دور جداکننده ی ساده گوییم اگر داشته باشیم

$$\sigma_\circ \equiv \nabla.f(x_\circ) \neq \circ$$

در غیر اینصورت آنرا دور جدا کننده ی چندگانه گوییم.

۱۰.۱ تعریف : نقطه‌ی تکین $x_\circ$ از سیستم (۱ − ۲) را یک نقطه تکین هذلولی وار خوانیم اگر هیچ یک از مقادیر ویژه سیستم خطی شده(۱ − ۴) حول نقطه بحرانی دارای قسمت حقیقی صفر نباشند در غیر این صورت آن را یک نقطه بحرانی ناهذلولوی وار گوییم.

۱۱.۱ لم : نقطه‌ی تکین هذلولوی وار $x_\circ$ از سیستم (۱ − ۲)، یک گره پایدار(چاه[۳۳]) است هرگاه تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$، حقیقی منفی باشند و این نقطه‌ی تکین یک گره ناپایدار (چشمه[۳۴]) است هرگاه تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $Df(x_\circ)$، حقیقی مثبت باشند و سر انجام این نقطه‌ی تکین یک نقطه‌ی زینی است اگر بعضی از مقادیر ویژه $Df(x_\circ)$ حقیقی مثبت و مابقی مقادیر ویژه $Df(x_\circ)$ حقیقی منفی باشند. نقطه بحرانی ناهذلولی وار $x_\circ$ از سیستم (۱ − ۲) را یک مرکز گوییم اگر همه مقادیر ویژه$Df(x_\circ)$ دارای قسمت حقیقی صفر باشند.

برهان : به [۱۵] صفحه ی ۱۴۲ و مراجع مربوطه رجوع شود.

۱۲.۱ لم : نقطه‌ی بحرانی هذلولی وار $x_\circ$ از سیستم (۱ − ۲) یک کانون پایداراست هرگاه مقادیر ویژه‌ی $Df(x_\circ)$ مزدوج مختلط بوده و دارای قسمت حقیقی منفی باشند و کانون ناپایدار است هرگاه مقادیر ویژه‌ی $Df(x_\circ)$ مزدوج مختلط بوده و دارای قسمت حقیقی مثبت باشند.

برهان : به [۱۵] صفحه ی ۱۴۲ و مراجع مربوطه رجوع شود.

---

[۳۳] sink

[۳۴] source

۱۳.۱ تعریف : نقطه‌ی بحرانی $x_{\circ}$ از سیستم $(۱-۲)$ را یک نقطه بحرانی ناتباهیده از سیستم گوییم هرگاه $Df(x_{\circ})$ هیچ مقدار ویژه ی صفری نداشته باشد در غیر اینصورت آنرا یک نقطه ی بحرانی تباهیده برای سیستم می نامیم.
توجه داریم که هر نقطه بحرانی ناتباهیده از یک سیستم مسطح یا یک نقطه ی بحرانی هذلولی وار از سیستم غیرخطی و یا یک مرکز برای سیستم خطی است.

۱۴.۱ تعریف : منظور از یک بردار ویژه ی تعمیم یافته از رتبه ی k متناظر با مقدار ویژه ی λ ، بردار ناصفری چون $U \in R^n$ است به طوری که:

$$(\lambda I - A)^k U = \circ \qquad , \qquad (\lambda I - A)^{k-۱} U \neq \circ$$

سیستم معادلات $\dot{y} = Ay,\ A = Df(x_{\circ})$ را که سیستم خطی شده‌ی متناظر با سیستم $(۱-۲)$ حول نقطه‌ی بحرانی $x_{\circ}$ است را در نظر بگیرید برحسب مقادیر ویژه‌ی ماتریس A می توان $\mathbb{R}^n$ را به مجموع مستقیم سه زیر فضای E^s،E^u و E^c تجزیه کرد یعنی $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$ که در آن

$$E^s = span\{e_۱, e_۲, ..., e_s\}$$

$$E^u = span\{e_{s+۱}, e_{s+۲}, ..., e_{s+u}\}$$

$$E^c = span\{e_{s+u+۱}, e_{s+u+۲}, ..., e_{s+u+c}\}$$

که E^s فضای تولید شده توسط بردارهای ویژه یا ویژه تعمیم یافته از ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه‌ای از A است که دارای جزء حقیقی منفی‌اند و E^u فضای تولید شده توسط بردارهای ویژه یا ویژه تعمیم یافته از ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه‌ای از A است که دارای جزء حقیقی مثبت‌اند و E^c فضای تولید شده توسط بردارهای ویژه یا ویژه تعمیم یافته از ماتریس A متناظر با مقادیر ویژه‌ای از A است که دارای جزء حقیقی صفراند و آن‌ها را به ترتیب زیرفضاهای پایدار، ناپایدار و مرکز می نامیم .

۱۵.۱ تعریف : فرض کنیم U یک مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^n$ باشد تابع $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ رادرنقطه‌ی $x_\circ \in U$ از کلاس C^r گوییم هرگاه همه‌ی مشتقات جزیی f تامرتبه‌ی r ام موجود و پیوسته باشند، و بر U از کلاس C^r گوییم هرگاه در هر نقطه‌ی $x_\circ \in U$ از کلاس C^r باشد.

۱٦.۱ تعریف : فرض کنیم U یک مجموعه در $\mathbb{R}^n$ باشد نگاشت دوسویی $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک همیومرفیسم خوانیم، هرگاه f و f^{-1} هر دو بر U پیوسته باشند.

۱۷.۱ تعریف : فرض کنیم U یک مجموعه‌ی باز در $\mathbb{R}^n$ باشد نگاشت دوسویی $g : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow g(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک دیفیومرفیسم از کلاس C^r خوانیم هرگاه g و g^{-1} هر دو بر U از کلاس C^r باشند.

۱۸.۱ تعریف : معادله ی دیفرانسیل $x' = f(x)$ که $f \in C^1(E)$ و E زیر مجموعه ی بازی از R^n ، ساختاراً پایدار است هرگاه رفتار کیفی همه ی میدانهای برداری سیستم فوق یکسان باشد. معادلاً میدان برداری f دارای پایداری ساختاری است هرگاه برای هر میدان برداری g نزدیک f میدانهای برداری f,g هم ارز توپولوژیک باشند یعنی همیومورفیسم حافظ جهتی مثل $H : E \longrightarrow E$ وجود دارد که مسیرهای نگاشت $x' = f(x)$ را به روی مسیرهای نگاشت $x' = g(x)$ بنگارد. در اینصورت سیستم دینامیکی $x' = f(x)$ ساختاراً پایدار است. اگر میدان برداری $f \in C^1(E)$ پایداری ساختاری نداشته باشد آنگاه f ساختاراً ناپایدار است.

۱۹.۱ تعریف : سیستم $\dot{x} = f(x, \mu)$ وابسته به پارامتر μ را در نظر می گیریم . مقدار $\mu_\circ$ از پارامتر μ که در آن سیستم C^1 ، $f(x, \mu_\circ)$ پایداری ساختاری ندارد ، مقدار انشعاب نامیده می شود.

۲۰.۱ تعریف : فرض کنید که برای سیستم $\dot{x} = f(x, \mu) \quad \mu \in I) \quad , \quad (x \in R$:

۱) $f(\circ, \circ) = \circ$ ۲) $\frac{\partial f}{\partial \mu}(\circ, \circ) \neq \circ$ ۳) $\frac{\partial f}{\partial x}(\circ, \circ) = \circ$ ۴) $\frac{\partial^2 (f)}{\partial^2 (x)}(\circ, \circ) \neq \circ$

در اینصورت انشعاب سیستم در $\mu = \circ$ ،انشعاب گره ی زینی ، نامیده می شود.