بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه قم

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

تراکم و بازده به مقیاس در صورت وجود تصاویر بهینه چندگانه در تحلیل پوششی داده‌ها

استاد راهنما:

دکتر علی اصغر فروغی

استاد مشاور:

دکتر غلامحسن شیردل

نگارنده:

فاطمه مطرود

تابستان۱۳۸۸

تقدیم به

بزرگوارترین عالم، **پدرم**

کوه محبت، **مادرم**

مظهر عشق، **همسر عزیزم**

تشکر و قدردانی:

خدایا از من درگذر آنچه را از من بدان داناتری، و آنچه از اعمال نیکو که تصمیم گرفتم و انجام ندادم و ببخشای سخنان بی فایده و خواسته‌های بی‌مورد دل و لغزشهای زبانم را.

سپاس آن **خدایی** که ارزنده‌ترین عنصر خلقت را به بشر بخشید تا توان شکوفایی یابد.

سپاس از **پدر و مادری** که مرا از ذرات وجودشان پرورانیدند تا سختی‌های جهان هستی را وسیله-ای برای بودن و رسیدن به بایدها قرار دهم.و همچنین سپاس از همسرم **دکتر نظرپور** که همواره مرا به تحصیل علم تشویق کرده و همراه من بوده اند.

سپاس بی‌انتها از استاد ارجمندم جناب آقای **دکتر فروغی** که با راهنمایی‌هایشان مرا در این امر یاری فرمودند. چرا که بی‌راهنما گامی کوچک نمی‌توان برداشت.و باز سپاس فروان از استادم که صبورانه اشتباهات مرا تحمل کردند و همواره راه صحیح را به من آموختند.می دانم که راه جبرانی برای زحمات شما وجود ندارد.

سپاس بسیار از استاد ارجمندم جناب **دکتر شیردل** که با مشاوره‌هایشان یارای من در این تحقیق بوده اند وهمواره مهربانی ایشان به خاطرم خواهد ماند.

سپاس بی منتهااز استاد بزرگوارم جناب **دکتر احمدی نیا** که زحمت داوری این پایان نامه را قبول کردندو سپاس از درس های تلاش و سخت کوشی که در دوران تحصیل به من آموختیند.

بیشترین سپاس ها از استاد بزرگوار و ارجمند جناب **دکتر معماریانی** که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند.

چکیده:

در این پایان‌نامه اندازه‌گیری تراکم و بازده به مقیاس در صورت وجود جواب بهینه چندگانه، ارتباط تراکم و بازده به مقیاس و اندازه‌گیری مقدار کمّی بازده به مقیاس (مقیاس کشسانی) در صورت وجود تراکم بحث شده است.

روش‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری تراکم وجود دارند، اما در اکثر این روش‌ها توجه چندانی به جواب بهینه چندگانه نشده است. از آن‌جا که وجود جواب‌های چندگانه عاملی مشکل‌ساز می‌باشد، رفع این مشکل مسأله مهمی است. در این‌جا روشی آورده می‌شود که در صورت وجود تصاویر یا جواب‌های چندگانه، وجود تراکم را به درستی تشخیص می‌دهد.

تحقیقات بسیاری در زمینه‌ی بازده به مقیاس و اندازه‌گیری بازده به مقیاس در صورت وجود مجموعه‌های مرجع چندگانه یا ابرصفحه تکیه‌کننده چندگانه انجام شده است، اما در اکثر این تحقیقات کمتر توجهی به وجود هم‌زمان مجموعه مرجع چندگانه و ابرصفحه‌ی تکیه‌کننده چندگانه شده است. برای غلبه بر این مشکل، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای پیدا کردن همه-ی واحدهای کارایی که مجموعه‌ی مرجع را می‌سازند، پیشنهاد شده است. مزیت این مدل، در نظر گرفتن هم‌زمان مشکل مجموعه‌های مرجع چندگانه و ابرصفحه‌های تکیه‌کننده چندگانه است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، تراکم، بازده به مقیاس، مقیاس کشسانی، جواب بهینه چندگانه

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه ۱

فصل اول تعاریف و مقدمات

۱-۱ قضایایی در برنامه‌ریزی خطی ۴

۱-۲ تحلیل پوششی داده‌ها ۶

۱-۳ تابع تولید ۸

۱-۴ مجموعه امکان تولید ۸

۱-۵ کارایی ۱۰

۱-۶ مدل *BCC* ۱۱

۱-۷ کارایی و ناکارایی تکنیکی و ترکیبی ۱۴

۱-۸ ابرصفحه تکیه‌کننده ۱۴

۱-۹ بازده به مقیاس ۱۵

۱-۱۰ روش‌های تعیین بازده به مقیاس ۱۶

۱-۱۱ مقیاس کشسانی ۱۸

۱-۱۲ تراکم ۲۱

فصل دوم   تشخیص تراکم در صورت وجود تصاویر بهینه چندگانه

۲-۱ مقدمه ۲۳

۲-۲ تراکم ۲۴
۳-۲ تراکم قوی و تراکم ضعیف ۲۶
۴-۲ روش ارائه شده توسط تون و ساهو ۳۵
۵-۲ مثال عددی ۳۶
۶-۲ تراکم وسیع ۴۰
۷-۲ تعیین تراکم وسیع در صورت وجود تصاویر بهینه چندگانه ۴۸
۸-۲ ارتباط تراکم و بازده به مقیاس ۵۵
۹-۲ مشخصه‌های بازده به مقیاس با استفاده از ابرصفحه تکیه کننده ۵۶
۱۰-۲ اندازه‌گیری تراکم وسیع ۶۰
۱۱-۲ تفاوت روش‌های TS و SS ۶۴
۱۲-۲ مقایسه روش‌های TS ، SS و FGL با استفاده از مثال عددی ۶۶

فصل سوم بازده به مقیاس و مقیاس کشسانی در صورت وجود ابرصفحه تکیه‌کننده و مجموعه مرجع چندگانه

۱-۳ مقدمه ۶۹
۲-۳ مشخصه‌های مجموعه مرجع ۷۰
۳-۳ فرایند محاسباتی برای تعیین مجموعه مرجع ۸۶
۴-۳ اندازه‌گیری بازده به مقیاس و مقیاس کشسانی در صورت وجود ابرصفحه تکیه‌کننده و مجموعه مرجع چندگانه ۹۰
۵-۳ مثال عددی ۹۵
مراجع ۹۶
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۱۰۰

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۰۲

فهرست جدول‌ها

عنوان

صفحه

جدول ۱-۱ نمایش داده‌های مثال (۱-۱۲-۲) ۲۲

جدول ۲-۱ اطلاعات مثال (۲-۵-۱) ۳۷

جدول ۲-۲ نقاط تصویر و نتایج حاصل از حل مدل (۲-۵) ۳۷

جدول ۲-۳ تعیین تراکم با استفاده از گام۱ .... ۳۸

جدول ۲-۴ تعیین تراکم و se با استفاده از گام ۲ .... ۳۸

جدول ۲-۵ نمایش داده‌ها، ϑ^* و β^* ۶۶

جدول ۲-۶ تشخیص تراکم با استفاده از سه روش TS ، SS و FGL ۶۶

جدول ۲-۷ تشخیص تراکم وسیع در مثال (۲-۵-۱) ۶۷

جدول ۳-۱ مثال (۳-۲-۱) ۷۱

جدول ۳-۲ جواب‌های چندگانه در مجموعه مرجع مثال (۳-۲-۱) ۷۲

جدول ۳-۳ تعیین RTS با استفاده از α_k ۹۵

فهرست نمودارها

عنوان

صفحه

نمودار ۱-۱ تابع تولید ۱۵

نمودار ۱-۲ تراکم تولید ۲۴

نمودار ۲-۲ انواع حالات بازده به مقیاس ۵۵

نمودار ۳-۱ نمایش تصویری مثال (۳-۲-۱) ۷۲

نمودار ۳-۲ وجود ابرصفحه تکیه‌کننده چندگانه ۹۳

مقدمه

مفهوم اقتصادی تراکم[1] بطور وسیع در اکثر پدیده‌ها قابل مشاهده است. در میان محققان، تراکم به عنوان یک ناکارایی معروف است. اما این نوع ناکارایی با مفهوم ناکارایی تکنیکی که از قبل شناخته شده است، متفاوت است. تحقیقات در این زمینه اولین بار توسط فیر[2] و سونسون[3] در سال ۱۹۸۰ آغاز گردید. سپس فیر و همکاران روشی را برای تشخیص تراکم با استفاده از مدل‌های DEA در [۱۱] ارائه کردند. این روش تنها روش موجود در DEA بود که همه‌ی تحقیقات در زمینه‌ی تراکم به وسیله‌ی آن انجام می‌شد. افزایش علاقه در زمینه تراکم به خاطر گوناگونی کاربردهای آن است (مراجع [۵،۶،۱۰،۱۹] این کاربردها را نشان می‌دهند). روش‌های متفاوتی در زمینه تشخیص تراکم توسط کوپر[4] و همکاران در [۷،۹] آورده شده‌است. تعاریف

[1] congestion
[2] Fare
[3] Svensson
[4] Cooper

تراکم ضعیف و تراکم قوی و روش تشخیص آن‌ها توسط تون[۵] و ساهو [۶] در [۲۴] آورده شده است.

در اکثر تحقیقات قبلی، در تشخیص تراکم توجه چندانی به وجود جواب‌های چندگانه در مدل‌های DEA نشده است. با توجه به اهمیت موضوع، سیوشی[۷] و سیکاتی[۸] در مقاله‌ای اشکالات نادیده گرفتن جواب‌های چندگانه را بیان کرده و راه‌حل آن را آورده‌اند[۲۲].

یکی از فراوان‌ترین تحقیقات انجام شده در DEA، شناسایی بازده به مقیاس[۹] است. بنکر[۱۰] در [۱] روشی را برای تعیین بازده به مقیاس متغیر ارائه کرد. بنکر و ترال[۱۱] در [۳] این روش را برای وقتی که جواب بهینه چندگانه وجود داشته باشد، تعمیم دادند. تون در [۲۳] ضرورت وجود ابرصفحه‌های تکیه‌کننده را برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس روی مجموعه‌ی مرجع بیان کرد. بر پایه‌ی این مقاله سیوشی نتایج حاصله را برای مقیاس کشسانی[۱۲] تعمیم داد[۱۹].

فورسوند[۱۳] در [۱۴] اهمیت اندازه‌گیری مقیاس کشسانی را از لحاظ اقتصادی بیان کرده است. اگر هدف ما فقط تعیین نوع بازده به مقیاس باشد وجود جواب‌های چندگانه نمی‌تواند عامل مهمی باشد، زیرا روش‌هایی توسط فیر و همکاران در[۱۲،۱۳] ارائه شده که وجود جواب-های چندگانه در آن‌ها بی‌تأثیر است. اما علاوه بر تعیین نوع بازده به مقیاس، اندازه‌گیری مقدار کمّی بازده به مقیاس یعنی مقیاس کشسانی نیز مورد توجه ماست. مقدار مقیاس کشسانی را می‌توان با استفاده از ابرصفحه‌ی تکیه‌کننده[۱۴] تعیین کرد. بنابراین یافتن ضرایب دوگان در مدل‌های DEA برای تعیین ابرصفحه‌های تکیه‌کننده که از مجموعه‌ی مرجع[۱۵] می‌گذرند،

---

[۵] Tone
[۶] Sahoo
[۷] Sueyoshi
[۸] Sekitani
[۹] Return to scale
[۱۰] Banker
[۱۱] Thrall
[۱۲] Scale elasticity
[۱۳] Forsund
[۱۴] Supporting Hyperpalne
[۱۵] Reference set

ضروری است. در این‌جاست که وجود جواب‌های چندگانه برای مدل‌های DEA، ابرصفحه‌هـای چندگانه در هر رأس از مرز کارا و مجموعه‌های مرجع چندگانه برای DMUهای ناکارا مشکل- ساز می‌شود، زیرا باعث می‌شود جواب‌های چندگانه‌ای برای مقیاس کشسانی و بازده به مقیاس حاصـل شـود. ایـن مسـائل در تحقیقـات DEA بـه طـور فـراوان بحـث و بررسـی شـده- اند[۱۶،۲۰،۱۸،۱۷،۲۱].

در تحقیقات قبلی توجه چندانی به وجود این مسائل به طور همزمان نشده است. با توجه به اهمیت موضوع، این مسئله توسط سیوشی و سیکاتی در [۲۲] مطرح شده است و راه‌حل‌هایی برای تعیین نوع بازده به مقیاس و اندازه‌گیری مقیاس کشسانی به طور منحصربفرد بیان شده است.

با توجه به این‌که تراکم و بازده به مقیاس مفاهیم اقتصادی نزدیک به هم می‌باشند، اما توجه چندانی به ارتباط بین این دو مفهوم نشده است. اولین بار سیوشی در سال ۲۰۰۳ ارتباط بین تراکم و بازده به مقیاس را بیان کرد. پس از آن تون و ساهو در [۲۵] و سیوشی و سیکاتی در [۲۲] روشی را برای اندازه‌گیری مقیاس کشسانی در صورت وجود تراکم بیان کردند.

فصل اول

تعاریف و مقدمات

۱-۱ قضایایی در برنامه ریزی خطی

در این‌جا مسأله اولیه[۱۶] را با P و دوگانش[۱۷] را با D نشان می‌دهیم و آن‌ها را به ترتیب به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\min \quad Z = CX \\ &s.t. \quad AX - S = b \\ &\quad X \geq 0, \;\; S \geq 0 \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

[۱۶] Primal
[۱۷] Dual

$$\begin{aligned} \max \quad & W = Yb \\ s.t. \quad & YA + T = C \qquad (۲-۱) \\ & Y \geq 0,\ T \geq 0 \end{aligned}$$

در این‌جا A یک ماتریس $m\times n$ است، که ماتریس ضرایب نامیده می‌شود. Y متغیر دوگان متناظر با محدودیت $AX - S = b$ و $YA + T = C$ محدودیت متناظر با متغیر X است. توجه می‌کنیم، برای هر محدودیت دوگان دقیقاً یک متغیر متناظر با آن در مسأله اولیه و برای هر متغیر دوگان دقیقاً یک محدودیت متناظر با آن در مسأله اولیه وجود دارد.

قضیه (۱-۱-۱): (قضیه قوی دوگانی)

اگر یکی از مسایل P یا D جواب بهینه داشته باشد، آن‌گاه هر دو مسأله جواب بهینه دارند و مقدار بهینه هر دو با هم برابر است.

قضیه(۱-۱-۲): (قضیه مکمل کمبود)

فرض می‌کنیم (X^*, S^*) و (Y^*, T^*) به ترتیب جواب‌های بهینه‌ی مسائل (۱-۱) و (۱-۲) باشند. آن‌گاه داریم :

$$T^* X^* = 0,\ \ Y^* S^* = 0$$

قضیه (۱-۱-۳): (قضیه مکمل کمبود قوی)

اگر مسایل (۱-۱) و (۱-۲) شدنی باشند، در این‌صورت جواب‌های بهینه‌ای مانند $(\hat{X}, \hat{S})$ و $(\hat{Y}, \hat{T})$ برای P و D یافت می‌شوند به طوری که :

$$\hat{X} + \hat{T} > 0,\ \ \hat{Y} + \hat{S} > 0$$

برای اثبات قضایای فوق می‌توان به مراجع [۴،۱۵] رجوع کرد.

۲-۱ تحلیل پوششی داده ها

در سال‌های اخیر، کاربردهای بسیاری از تحلیل پوشش داده‌ها (DEA)[18] در بررسی عملکرد های مختلف در فعالیت‌های متفاوت ارائه شده است.

تاریخچه‌ی به وجود آمدن این علم، مربوط به سال‌های خیلی دور خصوصاً از اواخر جنگ جهانی دوم به بعد است. از آن زمان مدیران واقف شدند که استفاده از روش‌های علمی در ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده[19]، لازم و ضروری است. لذا اطلاع از عملکرد واحدهای تحت فرمان مدیر، مهمترین وظیفه‌ی مدیر در رابطه با واحدهای تصمیم‌گیرنده به منظور هدایت آن‌هاست. پیچیدگی عملکرد، حجم بالای اطلاعات، اثرات عوامل بیرونی، اثر واحدهای رقیب بر عملکرد، تغییرات ناگهانی خط مشی و ... از جمله عواملی هستند که مدیر بدون برخورد علمی با آن‌ها نمی‌تواند تصمیم‌گیری مناسبی در جهت بهبود کارایی و بهره‌وری اتخاذ نماید.

منظور از سیستم، مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده مرتبط به هم می‌باشند که این واحدها در کنار هم هدف خاصی را دنبال می‌کنند. تا قبل از سال ۱۹۷۸ تحقیقات زیادی برای محاسبه‌ی تابع تولید[20] و کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده یک سیستم صورت گرفته بود. عمده‌ی این تحقیقات منجر به وجود آمدن روش‌های پارامتری گردید. اما این روش‌ها دارای مشکلاتی نظیر

۱) روش‌های پارامتری تنها برای حالت یک ورودی و یک خروجی مناسب‌اند.

[18] Data Envelopment Analysis
[19] Decision Making Unit
[20] Production Function

۲) شکل تابع تولید را از قبل به صورت خاصی در نظر می‌گیرد.

می‌باشند.

فارل[۲۱] اولین کسی بود که تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام داد و تابع تولید را به طریق غیر پارامتری به دست آورد. فارل با استفاده از مشاهدات و اصول حاکم بر علم موردنظر، مجموعه‌ای به نام مجموعه‌ی امکان تولید (PPS)[۲۲] را معرفی کرد و مرز آن را تابع تولید نامید. هر واحد که روی این مرز قرار گیرد کارا و در غیر این‌صورت ناکارا تلقی می‌گردد. در سال ۱۹۷۸، چارنز[۲۳] و همکاران بر پایه‌ی کار فارل روش خلاقانه‌ای ارائه دادند که به مدل CCR برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده معروف گردید. این مدل، پایه و اساس شاخه‌ای در تحقیق در عملیات به نام تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) گردید. بنا براین تحلیل پوششی داده‌ها تکنیکی برای محاسبه‌ی تابع تولید و در نتیجه کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم-گیرنده است که با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی انجام می‌گیرد.

منظور از یک واحد تصمیم گیری یا یک DMU، واحدی است که با دریافت بردار ورودی $(x_1, x_2, ..., x_m)^T$ بردار خروجی $(y_1, y_2, ..., y_m)^T$ را تولید می‌نماید.

در تمام این پایان نامه فرض می‌کنیم n واحد تصمیم گیری (DMU) در اختیار داریم که هر واحد مقادیر مختلفی از m ورودی را برای تولید s خروجی مختلف، مورد استفاده قرار می‌دهد. به عبارت دیگر $DMU_j = (x_j, y_j)$ بردار ورودی $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj})^T$ را مصرف می‌کند تا بردار خروجی $y_j = (y_{1j}, y_{2j}, ..., y_{sj})^T$ را تولید کند. به علاوه فرض می‌کنیم، x_jها و y_jها نامنفی بوده و از نماد های $\mathrm{X} = [x_1, ..., x_n] \in R^{m\times n}$ و $\mathrm{Y} = [y_1, ..., y_n] \in R^{s\times n}$ به ترتیب برای نمایش ماتریس‌های مقادیر ورودی و خروجی استفاده می‌کنیم.

[۲۱] Farell
[۲۲] Production Possibility Set
[۲۳] Charnes

۱-۳ تابع تولید

تابع تولید بیشترین خروجی ممکن را از ترکیب ورودی‌ها فراهم مـی‌آورد. بنـابراین اگـر مقـدار خروجی‌ها را با Q و ورودی‌ها را با $x_1,...,x_m$ نشان دهیم، تابع تولیـد را مـی‌تـوان بـه صـورت $Q = f(x_1,...,x_m)$ در نظر گرفت، که در آن Q حداکثر مقدار خروجی اسـت کـه از ترکیبـات مختلف ورودی‌های $x_1,...,x_m$ تولید می شود.

در حالی که f تابع یک مقداری نباشد، تابع فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$(y_1,..., y_s) = (f_1(x),..., f_s(x))$$

که $(y_1,..., y_s)$ بردار خروجی است.

در بیشتر موارد به دلیل پیچیدگی فرایند تولید، تغییر در تکنولوژی تولید و چند مقداره بودن، تابع تولید در دسترس نمی‌باشد.

۱-۴ مجموعه‌ی امکان تولید

مجموعه‌ی امکان تولید با T نشان داده مـی‌شـود و بـه صـورت مجموعـه‌ی (x, y) هـایی کـه خروجی y بتواند ورودی x را تولید کند، تعریف می‌شود.

از آن‌جایی که مجموعه‌ی امکان تولید وقتی شناخته می‌شود که تابع تولید شناخته شده باشد، لذا اصول موضوعه‌ی زیر برای ایجاد مجموعه‌ی امکان تولید معرفی می‌گردد:

۱) اصل بی کرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت[24])

اگر $(x, y) \in \mathrm{T}$، آن‌گاه به ازای هر $K > 0$، $(Kx, Ky) \in \mathrm{T}$

۲) اصل یکنوایی(یا امکان پذیری[25])

اگر $(x, y) \in \mathrm{T}$، آن‌گاه $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) | \tilde{y} \le y, \tilde{x} \ge x\} \subseteq \mathrm{T}$.

۳) اصل تحدب[26]

اگر $(x_1, y_1) \in \mathrm{T}$ و $(x_2, y_2) \in \mathrm{T}$، آن‌گاه به ازای هر $\lambda \in [0,1]$، داشته باشیم:

$$\lambda(x_1, y_1) + (1-\lambda)(x_2, y_2) \in \mathrm{T}$$

۴) اصل شمول مشاهدات (اصل ناتهی بودن[27])

به ازای هر $j = 1, \dots, n$، $(x_j, y_j) \in \mathrm{T}$

۵) اصل کمینه برونیابی

T اشتراک تمام $\hat{\mathrm{T}}$هایی است که در اصول ۱، ۲، ۳ و ۴ صدق می‌کنند، به عبارت دیگر T کوچکترین مجموعه‌ای است که در اصول فوق صدق می‌کنند.

---

[24] Constant return to scale
[25] Possibility
[26] Convexity
[27] Non empty

با پذیرفتن اصول فوق‌الذکر، مجموعه‌ی امکان تولید به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathrm{T}=\left\{(x,y)\middle|\;\; x\geq\sum_{j=1}^{n} x_j\lambda_j,\;\; y\leq\sum_{j=1}^{n} y_j\lambda_j,\;\; \lambda_j\geq 0;\;\; j=1,\ldots,n\right\}$$

۵-۱ کارایی[۲۸]

در حالت کلی کارایی به دو دسته‌ی کارایی مطلق و کارایی نسبی تقسیم می‌شود. کارایی مطلق از سنجش یک واحد با استانداردها به دست می‌آید و کارایی نسبی از سنجش یک واحد با واحدهای مشابه دیگر نتیجه می شود. از آن‌جایی که تعریف استانداردها و از طرفی رسیدن به آن‌ها مشکل است، از کارایی نسبی استفاده می‌شود.

در حالت یک ورودی و یک خروجی کارایی مطلق به صورت زیر تعریف می‌شود:

ورودی/ خروجی = کارایی مطلق

حال یک واحد مانند DMU_k با ورودی $x_k=(x_{1k},x_{2k},\ldots,x_{mk})$ و خروجی $y_k=(y_{1k},y_{2k},\ldots,y_{sk})$ را در نظر بگیرید و فرض کنید بردار هزینه‌ی ورودی و قیمت خروجی به ترتیب برابر با $v=(v_1,v_2,\ldots,v_m)$ و $u=(u_1,u_2,\ldots,u_s)$ و معلوم باشند. در این صورت کارایی DMU_k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{کارایی}=\frac{\sum_{r=1}^{s}u_r y_{rk}}{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ik}}$$

[۲۸] efficiency