دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض گرایش جبر

عنوان:

دوگان گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه جابه‌جایی

نگارش:
ابوالفضل علی‌بمانی

استاد راهنما:
دکتر محمدجواد نیک‌مهر

مهر ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به همه دوستداران علم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد جواد نیک مهر، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.

در پایان، از پدر و مادر عزیزم تشکر می کنم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی با همانی ناصفر باشد. دوگان گراف مقسوم‌علیه صفر R، که با نماد $\Gamma'(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه راس‌های $W^*(R)$، که $W^*(R)$ مجموعه عناصر ناصفر و نایکال R می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$. در این پایان‌نامه، ارتباط بین R و $\Gamma'(R)$ را بررسی می‌کنیم. همچنین ارتباط بین $\Gamma'(R)$ با گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف هم‌ماکسیمال را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: کمر، قطر، گراف تک‌دور، گراف مسطح، گراف دوبخشی.

فهرست مطالب

پیش‌گفتار **ج**

فهرست نشانه‌ها و نمادها **ه**

۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی **۱**

۱.۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی نظریه گراف ۲

۲.۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی جبر ۷

۲ گراف مقسوم‌علیه صفر **۱۶**

۱.۲ خواص ابتدایی $\Gamma(R)$ ۱۷

۳ دوگان گراف مقسوم‌علیه صفر **۲۶**

۱.۳ مقدمه ۲۷

۲.۳ خواص ابتدایی $\Gamma'(R)$ ۲۸

۳.۳ خواص پیشرفته‌تر $\Gamma'(R)$ ۳٤

٤.۳ ارتباط بین $\Gamma'(R)$ و گراف مقسوم‌علیه صفر ٤۸

٥.۳ ارتباط بین $\Gamma'(R)$ و گراف هم‌ماکسیمال ٥۲

٦.۳ مکمل $\Gamma'(R)$ ٥۷

۷.۳ $\Gamma'(R[X])$ ٦۱

۸.۳ $\Gamma'(R_1 \times R_2)$ ٦٥

۹.۳ $\Gamma'(R(+)M)$ ۷۱

۱۰.۳ مسطح بودن $\Gamma'(R)$ ۷٥

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۸٥**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۸۷**

کتاب نامه **۸۹**

پیش‌گفتار

مطالعه ساختارهای جبری با استفاده از ویژگی گراف‌ها، بخش قابل توجهی از تحقیقات در طول بیست سال گذشته می‌باشد. اندرسون[۱] و لوینگستون[۲] در [۸]، گراف مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه جابه‌جایی R که با نماد $\Gamma(R)$ نشان داده می‌شود را معرفی و بررسی کردند. مجموعه راس‌های این گراف، مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. افخمی[۳] و خشیارمنش[۴] در [۲]، دوگان گراف مقسوم‌علیه صفر وابسته به حلقه جابه‌جایی R که با نماد $\Gamma'(R)$ نشان داده می‌شود را معرفی و بررسی کردند. مجموعه راس‌های این گراف، عناصر نایکال حلقه R غیر از صفر می‌باشد و دو راس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر $x \notin Ry$ و $y \notin Rx$.

در فصل اول این پایان‌نامه که برگرفته از منابع [۱]، [۱۱-۹]، [۱۵-۱۳]، [۱۸] و [۲۱-۲۰] می‌باشد، به بیان برخی مفاهیم و تعاریف ابتدایی جبر و گراف می‌پردازیم. البته فرض ما بر این است که خواننده با مفاهیم و تعاریف ابتدایی جبر و گراف آشنا می‌باشد.

در فصل دوم که برگرفته از [۸] است، به معرفی و مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه جابه‌جایی می‌پردازیم و برخی خواص گرافی آن را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم که در واقع فصل اصلی این پایان‌نامه است و مطالب آن برگرفته از منابع [۷-۲]، [۱۲]، [۱۷-۱۶]، و [۱۹] می‌باشد، به معرفی و مطالعه دوگان گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه جابه‌جایی می‌پردازیم. در بخش دوم این فصل به بررسی خواص ابتدایی این گراف نظیر عدد

---

[۱] Anderson

[۲] Livingston

[۳] Afkhami

[۴] Khashyarmanesh

خوشه‌ای، قطر، همبندی و غیره می‌پردازیم. در بخش سوم، حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که $\Gamma'(R)$ جنگل، گراف ستاره، گراف دوستاره، گراف تک‌دور و اجتماعی از گراف‌های دور باشد و همچنین به بررسی برخی خواص زیرگراف $\Gamma'(R) \setminus \mathrm{J}(R)$ می‌پردازیم. در بخش چهارم، ارتباط این گراف و گراف مقسوم‌علیه صفر را بررسی می‌کنیم. در بخش پنجم نیز ارتباط این گراف و گراف هم‌ماکسیمال را بررسی می‌کنیم. در بخش ششم، به مطالعه مکمل $\Gamma'(R)$ می‌پردازیم. در بخش‌های هفت، هشت و نه، به بررسی ویژگی‌های این گراف به‌روی برخی حلقه‌ها می‌پردازیم. در بخش دهم این فصل حلقه‌هایی را مشخص می‌کنیم که گراف وابسته به آن‌ها مسطح باشد.

فهرست نشانه‌ها و نمادها

$\mathrm{Max}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R
$\mathrm{J}(R)$	رادیکال ژاکوبسون حلقه R
$\mathrm{Nil}(R)$	مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R
$\mathrm{Spec}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول حلقه R
$\mathrm{Ass}(R)$	مجموعه ایده‌آل‌های اول وابسته به R
$\mathrm{Ann}(x)$	پوچ‌ساز x
$Z(R)$	مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R
$R(+)M$	حلقه ایده‌آل‌سازی
$\Gamma(R)$	گراف مقسوم‌علیه صفر
$\Gamma'(R)$	دوگان گراف مقسوم‌علیه صفر
$g(G)$	کمر گراف G
$\mathrm{diam}(G)$	قطر گراف G
$r(G)$	شعاع گراف G
$e(a)$	گریز از مرکز راس a

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم ابتدایی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف G، یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ است که تشکیل شده از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ از راس‌ها، یک مجموعه‌ی $E(G)$ از یال‌ها و یک تابع وقوع Ψ_G که به هر یال G، یک زوج نامرتب از راس‌های G را نسبت می‌دهد.

اگر e یک یال و u و v دو راس باشند به‌طوری‌که $\Psi_G(e) = uv$، در این صورت گفته می‌شود که e، راس‌های u و v را به یکدیگر وصل کرده است و راس‌های u و v، دو سر یال e نامیده می‌شوند. درجه راس v در گراف G، برابر تعداد یال‌های متصل به v می‌باشد که با نماد $\deg(v)$ نشان داده می‌شود. راس v را تنها گوییم، هرگاه $\deg(v) = ۰$.

اگر مجموعه راس‌ها و یال‌های یک گراف، متناهی باشند، گراف مزبور را متناهی می‌نامند. گرافی که یک راس داشته باشد، بدیهی و سایر گراف‌ها را غیربدیهی می‌نامیم. از طرف دیگر، یک گراف به طور کلی ناهمبند است هرگاه هیچ یالی نداشته باشد. از نماد $|G|$ برای نشان دادن تعداد راس‌های گراف G استفاده می‌کنیم.

دو راس که بر روی یال مشترکی واقعند، مجاور نامیده می‌شود. به همین ترتیب دو یال که یک راس مشترک دارند، نیز مجاور نامیده می‌شوند. برای دو راس متمایز u و v درG، نماد $u - v$ نشان می‌دهد u و v مجاورند. مجموعه راس‌هایی که با راس v مجاور می‌باشند همسایه‌های راس v نامیده و با نماد $N(v)$ نشان داده می‌شود.

یک یال با دو سر یکسان، طوقه و یک یال با دو سر متمایز، یال پیوندی نامیده می‌شود. یک گراف، ساده است، اگر هیچ طوقه‌ای نداشته باشد و بین هر دو راس آن، بیش از یک یال نباشد. گراف ساده‌ای که هر دو راس متمایز آن با یکدیگر مجاورند، گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهیم. مکمل گراف ساده G، که با $\overline{G}$ نشان داده می‌شود، گراف ساده‌ای است با مجموعه راس‌های $V(G)$، که در آن دو راس مجاورند، اگر و تنها اگر آن راس‌ها

در G مجاور نباشند.

فرض کنید H و G دو گراف باشند به‌طوری‌که $V(G) \cap V(H) = \varnothing$، در این صورت اجتماع دو گراف H و G که با نماد $G \cup H$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه راس‌های $V(G) \cup V(H)$ و یال‌های $E(G) \cup E(H)$.

تعریف ۲.۱.۱. دو گراف H و G یکریخت نامیده می‌شوند و نوشته می‌شود $G \cong H$، اگر توابع دوسویی $\theta : V(G) \to V(H)$ و $\phi : E(G) \to E(H)$ وجود داشته باشند، به‌طوری‌که $\Psi_G(e) = uv$ اگر و تنها اگر $\Psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$. این زوج (θ, ϕ) از توابع، یک یکریختی بین G و H نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. می‌گوییم گراف H، زیرگراف G است و نوشته می‌شود $H \subseteq G$، اگر $V(H) \subseteq V(G)$، $E(H) \subseteq E(G)$ و Ψ_H از تحدید Ψ_G به $E(H)$ حاصل شده باشد.

اگر $H \subseteq G$، ولی داشته باشیم $H \neq G$، می‌نویسیم $H \subset G$ و می‌گوییم H یک زیرگراف سره از G است. در صورتی که زیرگراف H از G در شرط $V(H) = V(G)$ صدق کند، آن را یک زیرگراف فراگیر از G می‌نامیم.

فرض کنید H و G دو گراف باشند به‌طوری‌که $V(G) = V(H)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، در این صورت می‌گوییم G تظریف گراف H است.

فرض کنید V'، یک زیرمجموعه ناتهی از $V(G)$ باشد. زیرگرافی از G، که مجموعه راس‌های آن V' و مجموعه یال‌هایش برابر مجموعه یال‌هایی از G باشد که هر دو راس آن‌ها در V' واقع است، زیرگراف القا شده توسط V' نامیده و با نماد $< V' >$ نمایش داده می‌شود. همچنین می‌گوییم $< V' >$ یک زیرگراف القایی G می‌باشد. زیرگراف القایی $< V(G) \setminus V' >$ که با $G \setminus V'$ نمایش داده می‌شود، زیرگرافی است که با حذف راس‌های V' و یال‌های واقع بر آن‌ها، از G به دست می‌آید.

زیر مجموعه S از $V(G)$ را که هیچ دو راس آن در G مجاور نیستند، یک مجموعه مستقل از G می‌نامیم. می‌گوییم مجموعه مستقل S، ماکزیمم است اگر هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S| < |S'|$ در G وجود نداشته باشد. تعداد راس‌ها در یک مجموعه مستقل ماکزیمم از G، عدد استقلال G نامیده شده و با $\alpha(G)$ نمایش داده می‌شود.

یک خوشه از گراف ساده G، زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به‌طوری‌که $< S >$ کامل باشد. عدد خوشه‌ای G، تعداد راس‌های بزرگترین خوشه G می‌باشد و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ٤.۱.۱. گراف r-بخشی، گرافی است که می‌توان مجموعه راس‌های آن را به r زیرمجموعه، طوری افراز کرد که در آن، دو سر هیچ یالی در یک زیرمجموعه نباشد.

گراف کامل r-بخشی، یک گراف ساده r-بخشی است که در آن، هر راس به تمام راس‌هایی که در زیرمجموعه‌ای غیریکسان با آن قرار دارند، وصل شده است. گراف کامل دوبخشی، با بخش‌هایی به اندازه‌های m و n را با $K_{m,n}$ نشان می‌دهیم. همچنین گراف یکریخت با $K_{۱,n}$ را گراف ستاره می‌نامیم و راسی که با راس‌های دیگر مجاور است، راس مرکزی نامیده می‌شود. توجه کنید که گراف فاقد راس را نیز گراف ستاره می‌نامیم. اگر G یک گراف ستاره به مرکز x و H نیز گراف ستاره به مرکز y باشد (G یا H می‌توانند فاقد راس باشند)، آنگاه گراف دوستاره به صورت $G \cup H$ می‌باشد که x و y مجاورند.

تعریف ٥.۱.۱. یک گشت در گراف G، دنباله ناتهی و متناهی $W = v_۰e_۱v_۱e_۲v_۲ \ldots e_jv_j$ است به‌طوری‌که جملات آن یک در میان از راس‌ها و یال‌ها بوده و برای هر $۱ \leqslant i \leqslant j$، $v_{i-۱}$ و v_i دو سر e_i باشند. در این صورت می‌گوییم W، یک گشت از $v_۰$ تا v_j است. راس های $v_۰$ و v_j به ترتیب ابتدا و انتهای W و $v_۱$، $v_۲$، $\ldots$، $v_{j-۱}$ راس‌های داخلی آن نامیده می‌شود. همچنین عدد صحیح j را طول W می‌نامیم. می‌گوییم یک گشت، بسته است، اگر طول آن مثبت بوده، ابتدا و انتهای آن یکسان باشند.

اگر یال‌های $e_1, e_2, \ldots, e_j$ در گشت W متمایز باشند، W یک گذر نامیده می‌شود. در این حالت، طول W برابر با تعداد یال‌ها می‌باشد. اگر علاوه بر یال‌ها، راس‌های $v_0, v_1, \ldots, v_j$ نیز متمایز باشند، W یک مسیر نامیده می‌شود. در این پایان نامه، مسیر $v_0e_1v_1e_2v_2\ldots e_jv_j$ را با نماد $v_0 - v_1 - \cdots - v_j$ نشان می‌دهیم. یک مشتق از یک گراف، برداشتن یال و جایگزین کردن مسیر به جای آن است به‌طوری‌که ابتدا و انتهای این مسیر دو سر یال حذف شده و راس‌های داخلی آن متمایز از راس‌های گراف باشند.

گراف G همبند است، هرگاه بین هر دو راس متمایز آن مسیری موجود باشد. همبندی، یک رابطه هم ارزی به روی مجموعه راس‌های گراف G تشکیل می‌دهد. بنابراین افرازی از $V(G)$ به مجموعه‌های ناتهی $V_1(G), V_2(G), \ldots, V_j(G)$ وجود دارد که در آن بین دو راس u و v مسیر موجود است اگر و تنها اگر u و v هر دو متعلق به مجموعه $V_i(G)$ یکسانی باشند.

فاصله میان دو راس متمایز u و v که با نماد $d(u,v)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v، اگر چنین مسیری موجود باشد. در غیر این صورت $d(u,v) := \infty$. قطر گراف G که با نماد $\mathrm{diam}(G)$ نشان داده می‌شود، بیشترین فاصله بین دو راس از G می‌باشد.

یک تور از G، گشت بسته‌ای است که از هر یال G حداقل یک بار عبور می‌کند. تور اویلری توری است که از هر یال دقیقاً یک بار عبور می‌کند. می‌گوییم یک گراف، اویلری است، اگر شامل یک تور اویلری باشد. در قضیه زیر شرط لازم و کافی برای اویلری بودن گراف‌ها را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۶. گراف همبند و یالدار G، اویلری است اگر و تنها اگر درجه هر راس عددی زوج باشد.

برهان. [۲۰، قضیه ۱.۲.۲۶]. □

یک گذر بسته، که ابتدا و راس‌های داخلی آن متمایز باشند، دور نامیده می‌شود. دور به طول n را با C_n نشان می‌دهیم. کمر گراف G، که با نماد $g(G)$ نشان داده می‌شود، عبارت است از

طول کوتاهترین دور در G، اگر دوری در G موجود باشد، در غیر این صورت $g(G) := \infty$. گراف G را همیلتونی نامیم هرگاه دارای دوری باشد که از همه راس‌ها عبور کند. اکنون با استفاده از مفهوم دور، می‌توانیم به بررسی یک ویژگی اصلی از گراف های دوبخشی بپردازیم.

قضیه ۷.۱.۱. یک گراف، دوبخشی است اگر و تنها اگر شامل هیچ دوری به طول فرد نباشد.

برهان. [۲۰، قضیه ۱۸.۲.۱]. □

جنگل، گرافی است که شامل هیچ دوری نباشد و جنگل همبند را درخت می‌نامیم. گراف همبندی که فقط شامل یک دور باشد، گراف تک‌دور نامیده می‌شود. همچنین گراف دور، گرافی است که فقط از یک دور تشکیل شده باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G گرافی همبند باشد و $a \in V(G)$. گریز از مرکز راس a که با نماد $e(a)$ نشان داده می‌شود، برابر است با بیشترین فاصله راس a از سایر راس‌های گراف G. شعاع گراف G که با نماد $r(G)$ نشان داده می‌شود، کمترین مقدار گریز از مرکز راس‌های گراف G می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۱. عدد رنگی گراف G، که با نماد $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، برابر است با کمترین تعداد رنگ‌هایی که می‌توان به راس‌های گراف G نسبت داد به‌طوری‌که هر دو راس مجاور دارای رنگ‌های متفاوتی باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف G مسطح است هرگاه بتوان آن را در صفحه به گونه‌ای رسم کرد که یال‌ها تنها در راس‌های دوسر خود متقاطع باشند.

گراف‌های مسطح مشخصه بسیار ساده‌ای دارند که توسط کوراتوفسکی[۱] بیان شده است. این بخش را با قضیه کوراتوفسکی به پایان می‌رسانیم.

[۱]Kuratowski

قضیه ۱۱.۱.۱. گراف G مسطح است اگر و تنها اگر شامل هیچ مشتقی از گراف‌های K_{5} یا $K_{3,3}$ نباشد.

برهان. [۲۰، قضیه ۲.۲.۶]. □

۲.۱ تعاریف و مفاهیم ابتدایی جبر

در سراسر این پایان‌نامه، همواره R یک حلقه جابه‌جایی با همانی ناصفر می‌باشد. مجموعه ایده‌آل‌های اول و ماکسیمال R را به ترتیب با نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{Max}(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین، نمادهای $\mathbb{Z}_n$ و $\mathbb{F}_q$ به ترتیب حلقه اعداد صحیح به پیمانه n و میدان متناهی با q عضو می‌باشند. به علاوه، $U(R)$ نماد مجموعه عناصر یکال R می‌باشد.

فرض کنید $a \in R$. در این صورت ایده‌آل اصلی تولید شده به وسیله a با Ra یا (a) نشان داده می‌شود. تعداد عضوهای مجموعه‌ای متناهی چون Ω را با $|\Omega|$ نشان می‌دهیم و در حالت نامتناهی $|\Omega| =: \infty$. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای ناتهی از R باشد. در این صورت $S^* := S \setminus \{0\}$.

نکته ۱.۲.۱. توجه کنید چون R یک حلقه جابه‌جایی با همانی ناصفر می‌باشد، $|\mathrm{Max}(R)| \geqslant 1$ و هر ایده‌آل R مشمول در یک ایده‌آل ماکسیمال می‌باشد (رجوع کنید به [۱۸]، گزاره ۹.۳ و نتیجه ۱۰.۳).

تعریف ۲.۲.۱. مقسوم‌علیه صفر R، عضوی چون $x \in R$ است که به‌ازای آن عضوی چون $0 \neq y \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $xy = 0$. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R با نماد $Z(R)$ نشان داده می‌شود.

در قضیه بعد، ویژگی مهم مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۱. $Z(R)$ همواره اجتماعی از ایده‌آل‌های اول است.

برهان. به وضوح $S = R \setminus Z(R)$ مجموعه‌ای ضربی‌بسته می‌باشد. فرض کنید $x \in Z(R)$. در این صورت $Rx \subseteq Z(R)$ و درنتیجه $Rx \cap S = \varnothing$. با توجه به قضیه **۴۴.۳** در [۱۸]، ایده‌آل اولی مانند P موجود است به‌طوری‌که $Rx \subseteq P$ و $P \cap S = \varnothing$. بنابراین با تکرار روش قبل برای تمام عناصر $Z(R)$ حکم مورد نظر بدست می‌آید. □

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید $x \in R$. پوچساز x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ann}(x) = \{y \in R : xy = 0\}$$

همچنین، اگر I ایده‌آلی از R باشد، پوچسازش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{Ann}(I) = \{y \in R : yI = 0\}$$

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید R حلقه‌ای متناهی باشد و $Z(R) \neq \{0\}$. در این صورت داریم $|R| \leqslant |Z(R)|^2$.

برهان. چون $Z(R) \neq \{0\}$، عضوی ناصفر مانند x در R موجود است به‌طوری‌که $\mathrm{Ann}(x) \neq \{0\}$. به وضوح $Rx \subseteq Z(R)$ و $\mathrm{Ann}(x) \subseteq Z(R)$. با توجه به قضیه لاگرانژ در [۱۳]، داریم $|R| = |\mathrm{Ann}(x)||\frac{R}{\mathrm{Ann}(x)}|$. ازطرفی چون $\frac{R}{\mathrm{Ann}(x)} \cong Rx$ به عنوان R–مدول، داریم $|Rx| = |\frac{R}{\mathrm{Ann}(x)}|$. بنابراین $|R| \leqslant |Z(R)|^2$. □

تعریف ۶.۲.۱. می‌گوییم که P ایده‌آل اول وابسته به R است، اگر $x \in R$ وجود داشته باشد که $\mathrm{Ann}(x) = P$. مجموعه تمام ایده‌آل‌های اول وابسته به R با $\mathrm{Ass}(R)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱. حلقه R را موضعی گوییم، هرگاه عناصر نایکال R تشکیل یک ایده‌آل آن را بدهند. به طور معادل، حلقه R موضعی است، هرگاه ایده‌آل ماکسیمال منحصر به فرد داشته باشد. حلقه موضعی R با ایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ با نماد $(R, \mathfrak{m})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. رادیکال ژاکوبسون R، اشتراک همه ایده‌آل‌های ماکسیمال R است که با نماد $\mathrm{J}(R)$ نشان داده می‌شود.

قضیه زیر رادیکال ژاکوبسون حلقه‌های جابه‌جایی را مشخص می‌سازد.

قضیه ۹.۲.۱. فرض کنید $x \in R$. در این صورت $x \in \mathrm{J}(R)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $y \in R$، $1 - xy$ عضو یکال R باشد.

برهان. [۱۸، لم ۱۷.۳]. $\square$

تعریف ۱۰.۲.۱. عضو $x \in R$ را پوچ‌توان گوییم، هرگاه عددی چون $n \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که $x^n = 0$. مجموعه تمام اعضای پوچ‌توان R با نماد $\mathrm{Nil}(R)$ نشان داده می‌شود. هرگاه $\mathrm{Nil}(R) = \{0\}$، حلقه R را تحویل یافته می‌نامیم.

در مورد عناصر پوچ‌توان حلقه R قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱۱.۲.۱. $\mathrm{Nil}(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}(R)} P$.

برهان. [۱۸، نتیجه ۵٤.۳]. $\square$

تعریف ۱۲.۲.۱. ایده‌آل‌های I و J از R هم‌ماکسیمال می‌باشند، هرگاه $I + J = R$.

در قضیه‌های بعد، به بررسی ویژگی‌های ایده‌آل‌های اول می‌پردازیم.

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنید $P \in \mathrm{Spec}(R)$ و $I_1, \dots, I_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند. در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

الف) به‌ازای jای که $1 \leqslant j \leqslant n$، $P \supseteq I_j$.

ب) $P \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$.

ج) $P \supseteq \prod_{i=1}^{n} I_i$.

برهان. [۱۸، لم ۵۵.۳]. $\square$

قضیه ۱.۲.۱۴. (قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول) فرض کنید $P_1, \ldots, P_n$ که $n \geqslant 2$ ایده‌آل‌هایی از R باشند و حداکثر دو تا از آن‌ها اول نباشند. فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد. فرض کنید $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. در این صورت به‌ازای jای که $1 \leqslant j \leqslant n$، $S \subseteq P_j$.

برهان. [۱۸، قضیه ۳.۱۶]. □

ملاحظه ۱.۲.۱۵. (صورت دیگر قضیه اجتناب از ایده‌آل‌های اول) فرض کنید S زیرگروهی از گروه جمعی R باشد. اگر به‌ازای $n \geqslant 2$، $P_1, \ldots, P_n$ ایده‌آل‌هایی از R باشند و حداکثر دو تا از آن ها اول نباشند و اگر به‌ازای هر $1 \leqslant i \leqslant n$، داشته باشیم $S \nsubseteq P_i$، آنگاه عضوی مانند $c \in S \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ موجود است.

تعریف ۱.۲.۱۶. R-مدول M را نوتری گوییم هرگاه در شرایط معادل زیر صدق کند:

۱. هر زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M سرانجام متوقف شود؛

۲. هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M نسبت به رابطه مشمولیت دارای عضو ماکسیمال باشد؛

۳. هر زیرمدول M متناهی مولد باشد.

حلقه R را نوتری گوییم، هرگاه به عنوان R-مدول نوتری باشد.

قضیه ۱.۲.۱۷. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری باشد. در این صورت $1 \leqslant |\mathrm{Ass}(R)| < \infty$ و $Z(R) = \bigcup_{P \in \mathrm{Ass}(R)} P$.

برهان. رجوع کنید به [۱۸]. □