بسم اللّٰه الرّحمن الرّحيم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عنوان :

بررسی نتایج متناهی بودن ایده آلهای اول وابسته روی تصویر مدولهای اثر یافته توسط فانکتور EXT

استاد راهنما :

دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور :

دکتر منیره صدقی

پژوهشگر :

حجت صفدری

مهر / ۱۳۸۹

تبریز / ایران

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

با استعانت از خداوند متعال که همواره پشتیبان همگان است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر جعفر امجدی که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.

دکتر منیره صدقی که در طول این پروژه از راهنماییهای ایشان بهره بردم.

دکتر سید محمود شیخ الاسلامی که داوری این پروژه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و به خصوص پدر و مادر گرانقدرم، که یار و یاور همیشگی من هستند .

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزو می‌کنم.

حجت صفدری

فهرست مندرجات

.

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید $\mathfrak{a}$,$\mathfrak{b}$ ایده‌آلهایی از حلقهٔ نوتری R و M ،R- مدولی باتولید متناهی است. همچنین n، عددی صحیح و مثبت باشد که به ازای $i < n$ ، تکیه گاه مدول کوهومولوژی موضعی $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ متناهی است. تحت این شرایط نشان خواهیم داد که مجموعهٔ

$$(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} Ass_R Ext^n_R(R/\mathfrak{a}^i, M)) \bigcap \{\mathfrak{p} \in Spec(R) : dim R/\mathfrak{p} > 1\}$$

متناهی است.همچنین به ازای اعداد صحیح ، مثبت وثابت j وn ، متناهی بودن مجموعه های $Ext^j_R(R/\mathfrak{b}^i, H^n_{\mathfrak{b}}(M)$, $Tor^R_j(R/\mathfrak{b}^i, H^n_{\mathfrak{b}}(M)$ را بررسی میکنیم.

واژه‌های کلیدی: دنباله فیلتر منظم،دنباله منظم کلی ، مدول کوهمولوژی موضعی ، تکیه‌گاه مدول کوهمولوژی موضعی ،ایده آل اول وابسته مدول کوهمولوژی موضعی

پیشگفتار

فرض کنید R یک حلقهٔ جابجائی و نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و A یک $R-$ مدول آرتینی باشد .

Brodmann(1979) نشان داد که برای ایده آل I از حلقهٔ R و به ازای $n \in N$ دو دنباله از ایده آلهای اول وابستهٔ $Ass_R(M/I^nM)$ و $Ass_R(I^nM/I^{n+1}M)$ برای مقادیر بزرگ n ثابت هستند .

sharp(1989) ، دو گان نتیجه فوق را برای $R-$ مدولهای آرتینی به این صورت نشان داد :

$Att_R(0 :_A I^n)$ و $Att_R((0 :_A I^n)/(0 :_A I^{n-1}))$ برای مقادیر بزرگ n ، وابسته به n نیستند .

با توجه به اینکه به ازای هر n داریم : $Tor_0^R(R/I^n, M) \cong M/I^nM$ و $Ext_R^0(R/I^n, A) \cong 0 :_A I^n$

Melkersson and Schenzel(1993) نتیجهٔ فوق را به این صورت تعمیم دادند :

به ازای هر i ی که $i \geq 0$ ، دنباله های $n = 1, 2, \ldots$ $Att_R(Ext_R^0(R/I^n, A))$ و $Ass_R(Tor_0^R(R/I^n, M))$ به ازای مقادیر بزرگ n ، مستقل از n هستند.

Melkersson and Schenzel(1993) همچنین مطرح کردند که آیا مجموعهٔ $Ass_R(Ext_R^i(R/I^n, M))$ به ازای مقادیر بزرگ n ، مستقل از n است ؟

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل بعضی از مفاهیم وقضایایی که در فصل های بعدی مورد استفاده قرار می گیرند،آورده می شود.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱ $R-$ مدول M را یک $R-$ مدول پروژکتیو می‌گویند هرگاه فانکتور $Hom_R(M,-)$ یک فانکتور دقیق باشد. همچنین $R-$ مدول N را یک $R-$ مدول انژکتیو می گویند هرگاه فانکتور $Hom_R(-,N)$ یک فانکتور دقیق باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقهٔ جابجایی و M یک $R-$ مدول باشند. ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ را ایده‌آل اول وابسته از M می‌نامیم، هرگاه $0 \neq m \in M$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{p} = (0 :_R m)$. مجموعهٔ همه ایده‌آل‌های اول وابسته از M را با $Ass_R(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض می‌کنیم R یک حلقهٔ جابه‌جایی و M یک $R-$ مدول باشد. تکیه‌گاه M را با $Supp_R(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Supp_R(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_\mathfrak{p} \neq 0\}.$$

تعریف ۴.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک $R-$ مدول باشد. $x_1, \ldots, x_n \in R$ یک $M-$ رشتهٔ ضعیف است هرگاه : برای هر $i = 1, \ldots, n$، $x_i \notin zd_R(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$.

تعریف ۵.۱.۱ بُعد کرول[۳] حلقه‌ی R را برابر با سوپریمم طول زنجیرهایی از ایده‌آل‌های اول واقع در $Spec(R)$ تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه چنین عددی موجود باشد، و در غیر این‌صورت آن را ∞ تعریف می‌کنیم. یعنی

$dim(R) := Sup\{n \in \mathbb{N}_0$: زنجیری به طول n از ایده‌آل‌های اول R وجود داشته باشد $\}$

تعریف ۶.۱.۱ فرض می‌کنیم M یک $R-$ مدول و $s > 0$. $x_1, \ldots, x_n \in R$ یک $M-$ رشتهٔ ضعیف با $\dim_R > s$ است هرگاه : برای هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ که $\dim_R(R/\mathfrak{p}) > s$، $x_1/1, \ldots, x_n/1$ یک $M_\mathfrak{p}-$ رشتهٔ ضعیف در $R_\mathfrak{p}$ باشد.

تعریف ۷.۱.۱ فرض می‌کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد در این صورت $x_1, \ldots, x_n \in m$ یک $M-$ رشتهٔ فیلتر منظم است هرگاه :

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad \forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) \setminus \{\mathfrak{m}\} \quad x_i \notin \mathfrak{p}.$$

---

[۳] Krull Dimension

تعریف ۸.۱.۱ فرض می‌کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشند. $x_1,\dots,x_n \in \mathfrak{m}$ یک $M-$ رشتهٔ تعمیم یافته منظم است هرگاه :

$$\forall i = 1,\dots,n \quad \forall \mathfrak{p} \in Ass_R(M/(x_1,\dots,x_{i-1})M) \text{ و } \dim_R(R/\mathfrak{p}) > 1 \quad x_i \notin \mathfrak{p}.$$

تذکر ۱.۱.۱ طول زنجیر اشباع شده ای که از $n+1$ جمله تشکیل شده است ، n تعریف می شود. برای مثال طول زنجیر اشباع شده‌ی $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n$، عدد n می‌باشد.

تعریف ۹.۱.۱ بُعد کرول یک R – مدول دلخواه مانند M را با علامت $dim(M)$ نشان داده و آن را سوپریمم طول زنجیرهای ایده‌آل‌های اول واقع در $Supp(M)$ (در صورت وجود) تعریف می‌کنیم و اگر سوپریمم موجود نباشد آن را ∞ تعریف می‌کنیم. همچنین اگر $M=0$، آنگاه بنابه قرارداد بُعد کرول آن را -1 تعریف می‌کنیم.

لم ۱.۱.۱ فرض کنید M یک R – مدول دلخواه باشد. در این‌صورت احکام زیر معادلند:

(i) $M=0$؛

(ii) به ازای هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$، $M_{\mathfrak{p}}=0$، یعنی $Supp_R(M)=\emptyset$؛

(iii) به ازای هر ایده‌آل ماکزیمال $\mathfrak{m}$ از R، $M_{\mathfrak{m}}=0$.

برهان. رجوع شود به [۲] لم ۱۵.۹. ■

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنید M یک R – مدول دلخواه و $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول دلخواه از حلقه‌ی R باشد در این‌صورت،

$$\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \Leftrightarrow \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \in Ass_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}).$$

برهان. رجوع شود به [۳] قضیهٔ ۲.۶. ■

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی نوتری و M یک $R-$ مدول دلخواه باشد در این‌صورت درجه‌ی $\mathfrak{m}$ روی M را عمق M[1] روی R گوییم و با نماد $depth_R M$ نشان می‌دهیم.

لم ۲.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول دلخواه باشد. در این‌صورت به ازای هر $\mathfrak{p} \in Ass(M)$، M زیرمدولی یکریخت با $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ دارد.

برهان. رجوع شود به [۲] ، لم ۳۳.۹ ■

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول دلخواه باشد به‌طوری‌که M توسط حاصل‌ضرب تعداد متناهی از ایده‌آل‌های ماکسیمال (و نه لزوماً متمایز) R پوچ شود، یعنی ایده‌آل‌های ماکسیمالی چون $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ از R موجود باشند که $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n M = 0$ در این‌صورت M، R ـ مدول نوتری است اگر و تنها اگر M، $R-$ مدول آرتینی باشد.

برهان. رجوع شود به [۲] ، قضیهٔ ۳۸.۹ ■

قضیه ۳.۱.۱ فرض کنید

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

[1] Depth of M

یک دنباله‌ی دقیق از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی‌ها باشد.در این صورت

$$Ass(M) \subseteq Ass(M') \cup Ass(M'').$$

برهان. رجوع شود به [۳] ، قضیهٔ ۳.٦ ■

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول دلخواه باشد در این‌صورت،

(i) مجموعه‌ی $Ass_R(M)$ متناهی است.

(ii) $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$.

(iii) مجموعه‌ی اعضای مینیمال $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ با هم برابرند.

برهان. رجوع شود به [۳] ، قضیهٔ ۵.٦ ■

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید M، یک $R-$ مدول دلخواه باشد. در این صورت زنجیر

$$0 = M_0 \subset \cdots \subset M_n = M$$

از زیرمدول‌های M را زنجیر اشباع شده می‌نامند هرگاه به ازای هر i، $0 \leq i \leq n$، $\frac{M_i}{M_{i-1}}$، $R-$ مدولی ساده باشد. n را طول زنجیر اشباع شده فوق می‌نامند. ثابت می‌شود همه‌ی زنجیرهای اشباع یک مدول دارای طول‌های یکسانند. این طول مشترک را طول مدول M می‌نامیم و با نماد $l(M)$ نشان می‌دهیم.

اگر M دارای چنین زنجیری باشد می‌گوییم M دارای طول متناهی [1] است یا M از طول متناهی است و به‌صورت $l(M) < \infty$، نشان می‌دهیم.

اگر M دارای چنین زنجیری نباشد می‌گوییم M دارای طول متناهی نیست و می‌نویسیم $l(M) = \infty$.

[1] Finite Length

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنید M یک R − مدول متناهی مولد و S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت

$$Supp_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{\mathfrak{p}S^{-1}R : \mathfrak{p} \cap S = \emptyset, \mathfrak{p} \in Supp_R(M)\}.$$

برهان. فرض کنید $S^{-1}\mathfrak{p} \in Supp_{S^{-1}R}S^{-1}M$. لذا $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$ و $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. اکنون نشان می‌دهیم که $\mathfrak{p} \in Supp_R M$. از آنجا که M ، R − مدولی متناهی مولد است کافی است ثابت کنیم $Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$. برای این کار داریم

$$Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M) \subseteq S^{-1}\mathfrak{p} \Rightarrow S^{-1}(Ann_R(M)) \subseteq S^{-1}\mathfrak{p} \Rightarrow (Ann_R(M))^{ec} \subseteq \mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}.$$

ولی می‌دانیم که $Ann_R(M) \subseteq (Ann_R(M))^{ec}$، بنابراین $Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p}$ و این یعنی $\mathfrak{p} \in Supp_R(M)$.

حال فرض کنید که $\mathfrak{p} \in Supp_R(M)$ و $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. ثابت می‌کنیم که $S^{-1}\mathfrak{p} \in Supp_{S^{-1}R}(S^{-1}M)$.

اما از آنجا که $S^{-1}M$ یک $S^{-1}R$ − مدول متناهی مولد است لذا کافی است نشان دهیم که $Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M) \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}$.

برای این‌کار داریم

$$Ann_R(M) \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow S^{-1}(Ann_R(M)) \subseteq S^{-1}\mathfrak{p} \Rightarrow Ann_{S^{-1}R}(S^{-1}M) \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}.$$

■

قضیه ۶.۱.۱ فرض کنید M، R − مدول دلخواه و R حلقه‌ی نوتری باشد در این‌صورت

$$Zdv_R(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in Ass_R(M)} \mathfrak{p}.$$

برهان. رجوع شود به [۲] ، نتیجهٔ ۳٦.۹ ■

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید M یک R − مدول دلخواه و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از R باشد به‌طوری که $M \neq \mathfrak{a}M$ و نیز $(a_i)_{i=1}^{n}$ یک M − رشته در $\mathfrak{a}$ باشد. گوییم $(a_i)_{i=1}^{n}$ یک M − رشته‌ی ماکسیمال در $\mathfrak{a}$ هست هرگاه نتوان عضو a_{n+1} از $\mathfrak{a}$ را پیدا کرد به‌طوری‌که $(a_i)_{i=1}^{n+1}$ یک M − رشته در $\mathfrak{a}$ باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید M، R − مدول دلخواه و $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از R باشد. در این‌صورت طول مشترک تمام M − رشته‌های ماکسیمال در $\mathfrak{a}$ را درجه‌ی $\mathfrak{a}$ [۲] روی M می‌گوییم و با نماد $grade_M\mathfrak{a}$ نشان می‌دهیم. اگر $M = R$ آنگاه درجه‌ی $\mathfrak{a}$ روی R را با نماد $grade\ \mathfrak{a}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید M و N دو R − مدول و $\mathfrak{a}$ ایده الی از R باشد. در این‌صورت $\Gamma_\mathfrak{a}(M)$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_\mathfrak{a}(M) = \bigcup_{n\geq 0} (0 :_M \mathfrak{a}^n) = \{m \in M : \exists n \in \mathbb{N}_0\,,\ m \cdot \mathfrak{a}^n = 0\}.$$

واضح است که $\Gamma_\mathfrak{a}(M)$ زیرمدولی از M است.همچنین اگر $f : M \longrightarrow N$ یک R − همریختی باشد آنگاه

$$f(\Gamma_\mathfrak{a}(M)) \subseteq \Gamma_\mathfrak{a}(N)$$

لذا نگاشت $\Gamma_\mathfrak{a}(f) : \Gamma_\mathfrak{a}(M) \longrightarrow \Gamma_\mathfrak{a}(N)$ را می‌توان با ضابطه‌ی زیر تعریف نمود.

$$\Gamma_\mathfrak{a}(f)(m) \rightarrowtail f(m).$$

[۲] Degree of a

با توجه به مطالب فوق به راحتی می‌توان نشان داد که $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ یک فانکتور هموردا خطی از $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ به $\mathcal{C}(\mathcal{R})$ است. فانکتور $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ را فانکتور $\mathfrak{a}$ — تاب[1] می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۵ به ازای هر $i \in \mathbb{N}_0$، i امین فانکتور مشتق شده‌ی راست $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ را با نماد $H^i_{\mathfrak{a}}(-)$ نشان می‌دهیم و آن را i امین فانکتور کوهمولوژی موضعی نسبت به $\mathfrak{a}$ می‌گوییم. برای هر R — مدول M، $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ را i امین مدول کوهمولوژی موضعی M می‌نامیم. گوییم M یک مدول $\mathfrak{a}$ — تاب آزاد[1] است هرگاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ و گوییم M یک مدول $\mathfrak{a}$ — آزاد تاب است هرگاه $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = M$.

قضیه ۱.۱.۷ فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی نوتری و $M \neq 0$ یک R — مدول با تولید متناهی باشد. در این‌صورت

$$depth\ M \leq dim\ M.$$

برهان. رجوع شود به [۴] گزارهٔ ۱.۲.۱۲ ■

قضیه ۱.۱.۸ فرض کنید R ، حلقهٔ نوتری و M یک R مدول باشد. در این صورت به ازای هر i از $\mathbb{N}$ که $i > dimM$، داریم : $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$

برهان. رجوع شود به [۴] گزارهٔ ٦.۱.۲ ■

---

[1] a torsion

[1] a-torsion-free

لم ۳.۱.۱ فرض کنید R حلقهٔ نوتری و M یک $R-$ مدول و $i \in N_\circ$ در این صورت :

$$Supp(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq Supp(M) \bigcap Var(a)$$

برهان. رجوع شود به [۴] گزارهٔ ۶.۲.۶ ■

لم ۴.۱.۱ فرض کنید R حلقهٔ نوتری و M یک R مدول، در این صورت

$Ass(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \bigcap Ass(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) = \phi$ و $AssM = Ass(\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)) \bigcup Ass(M/\Gamma_{\mathfrak{a}}(M))$

برهان. رجوع شود به [۴] ۲.۱.۱۲ ■

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید M یک $R-$ مدول و n عدد صحیح نامنفی‌باشد. می گوییم بُعد پروژکتیو[۱] M کمتر یا مساوی n است هرگاه M دارای یک تحلیل پروژکتیو به‌صورت

$$P.(M): \quad \circ \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_\circ \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

باشد. کوچکترین چنین عدد صحیحی را بُعد پروژکتیو M می‌نامیم و با نماد $prodim(M)$ نشان می‌دهیم. اگر چنین عددی موجود نباشد می‌نویسیم $prodim(M) = \infty$.

به‌عبارت دیگر:

$$prodim(M) := inf\{\circ \leq n \in \mathbb{Z} : \text{یک تحلیل پروژکتیو به شکل } \circ \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_\circ \to M \to \circ \text{ موجود است}\}$$

---

[۱] Projective Dimension

تعریف ۱۷.۱.۱ اگر M یک $R-$ مدول و $0 \leq n \in \mathbb{Z}$، در این‌صورت بُعد انژکتیو M را به‌طریق مشابه تعریف می‌کنیم و با نماد $injdim(M)$ نشان می‌دهیم به‌عبارت دقیق‌تر:

$$injdim(M) := inf\{0 \leq n \in \mathbb{Z} : \text{یک تحلیل انژکتیو به‌شکل } 0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots \to E^n \to 0 \text{ موجود است}\}$$

قضیه ۹.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفر باشند. در این صورت زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M چون، $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ وایده آلهای اولی مانند $\mathfrak{p}_i$ موجودند بطوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$.

برهان. چون M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفراست، لذا $Ass_R(M) \neq \emptyset$. گیریم $\mathfrak{p}_1 \in Ass_R(M)$. لذا زیرمدولی چون M_1 از M موجود است به طوری که $R/\mathfrak{p}_1 \cong M_1$. اگر $M = M_1$ آنگاه حکم تمام است. لذا فرض می‌کنیم $M \neq M_1$. بنابراین $Ass_R(M/M_1) \neq \emptyset$. گیریم $\mathfrak{p}_2 \in Ass_R(M/M_1)$. لذا زیرمدولی چون M_2 از M شامل M_1 موجود است به طوری که $R/\mathfrak{p}_2 \cong M_2/M_1$. با ادامهٔ این روند زنجیر صعودی، $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$ حاصل می‌شود. چون M یک $R-$ مدول متناهی مولد است، لذا زنجیر فوق ایستا است.. لذا عددصحیح و مثبت چون n موجود است به طوری که $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$. ■

قضیه ۱۰.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفر باشند. در این صورت $Ass_R(M)$ یک مجموعهٔ متناهی است.

برهان. چون R یک حلقهٔ جابه‌جایی و نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد و ناصفر است، طبق قضیهٔ ۸.۲.۱ زنجیر صعودی از زیرمدول‌های M چون، $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n = M$ موجود است به طوری که برای هر $1 \leq i \leq n$، $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$ که در آن $\mathfrak{p}_i \in Spec(R)$. برای