بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشکده‌ی علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض

گرایش آنالیز

عنوان

قضایای نقطه ثابت برای مجموع دو عملگر

استاد راهنما

دکتر علی آبکار

استاد مشاور

دکتر عزیزالله عزیزی

توسط

زهرا سلیمانی

تقدیم به

پیشگاه پاک پروردگارم

یاری دهنده ی تمامی لحظه های زندگیم

تقدیر

سپاس خدای یگانه‌ای که‌این جانب را درگردآوری و تدوین این بایان نامه کامیاب نمود. بر خود لازم می دانم از اساتید گرانقدری که همواره مدیون زحمات دلسوزانه شان هستم به ویژه استاد راهنمای فرزانه و فرهیخته ام، جناب آقای دکتر آبکار که در تمامی مراحل نگارش این پایان نامه یاری دهنده ای صبور و همراهی آگاه بودند که از حمایت های ایشان بسیاربهره بردم سپاسگزاری نمایم . همچنین، استاد مشاور محترم و گرامی جناب آقای د کترعزیزی که از راهنمایی ها و نظرات ایشان بسیار بهره بردم.

زهرا سلیمانی

چکیده

فرض کنیم E یک فضای باناخ و K مجموعه ای ناتهی ، بسته و محدب در E است . نگاشت های $T, S : K \to E$ را در نظر می گیریم که در آن S فشرده و T نگاشتی انبساطی است.هدف ما در این پایان نامه مطالعه ی نقاط ثابت نگاشت $T + S$ می باشد. ملاحظه خواهیم کرد که اگر S فشرده و T انبساطی باشد،آنگاه تحت شرایط دیگری نگاشت مجموع T,S دارای نقطه ثابت است.در پایان به کاربردهایی از این قضیه درمعادلات انتگرال اشاره خواهیم کرد.

فهرست مندرجات

پیش گفتار

اولین پیوند بین دو قضیه‌ی مهم نقطه ثابت با یکدیگر در سال ۱۹۵۸ توسط کراسنوسلسکی[۱] انجام شد که قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ را با قضیه‌ی نقطه ثابت توپولوژیکی شاودر[۲] ترکیب کرد. حاصل این ترکیب به مسئله‌ی نقطه ثابت مجموع دو عملگر منجر شد که دارای کاربردهای زیادی در معادلات انتگرالی است.
پس از آن ریاضی دانان زیادی مطالبی را ارائه نمودند که بر تعمیم یا توسیعی از قضیه‌ی نقطه ثابت کراسنوسلسکی بنا شده بودند و کاربردهای قضیه‌ی مذکور را مورد توجه قرار می‌دادند.
برخی معادلات دیفرانسیل و قضیه های تعادل، به بررسی نقاط ثابت معادله‌ی

$$Sx + Tx = x \qquad , \qquad (۱)$$

منجر می‌شوند؛ از جمله، بعضی مسائل در معادلات انتگرالی به صورت جملات معادله‌ی (۱) فرمول بندی می‌شوند. به عبارت دیگر از قضیه‌ی نقطه ثابت کراسنوسلسکی می‌توان به عنوان یک مدل برای حل چنین معادلاتی استفاده کرد.در این قضیه به دنبال یافتن نقطه ثابت برای مجموع دو عملگر $T + S$ هستیم که در آن S فشرده و T یک انقباض است. در سال ۱۹۶۷، سادوسکی[۳] پایه‌گذار شیوه‌ی جدیدی در ارتباط با قضیه‌ی کراسنوسلسکی بود که چکیده‌ی کارهای او قضیه‌ای است که امروزه آن را با نام خودش می‌شناسیم.

[۱] Krasnosell'skii
[۲] Schauder
[۳] Sadovskii

در سال ۱۹۷۱، رینرمن[۴] قضیه هایی مرتبط با قضیه‌ی کراسنوسلسکی به دست آورد. او فرض کرد که $T, S : K \to E$ چنان می‌باشند که $T + S$ خود نگاشتی بر K است . یعنی $T + S : K \to K$.

در سال ۱۹۹۶، اُریگان[۵]، T را غیر انبساطی در نظر گرفت و تحت شرایطی نتایج رینرمن را تعمیم داد.

در سال ۱۹۹۸، برتون[۶] قضیه‌ی کراسنوسلسکی را بهبود بخشید و در سال ۲۰۰۳، باروسو[۷]، مطلب جدیدی مرتبط با قضیه‌ی مذکور ارائه داد.

مؤلفان زیادی نگاشت‌های انبساطی و مسائل نقطه ثابت آنها را مطالعه کرده اند، ولی با جستجو در این موضوع، متوجه می‌شویم که مقاله های مرتبط به مجموع یک عملگر انبساطی و یک عملگر فشرده اندک می‌باشند.

این پایان نامه در چهار فصل و به شرح زیر تنظیم گردیده است.

در فصل اول، تعریف ها و قضیه های مقدماتی را که در فصل های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند،می آوریم .

در فصل دوم، نتایج نقطه ثابت از نوع کراسنوسلسکی را برای $T + S$ ثابت می‌کنیم.

در فصل سوم، مطالعه‌ی مسئله‌ی نقطه ثابت $T + S$ را در توپولوژی ضعیف ادامه می‌دهیم.

در فصل چهارم، نوع خاصی از معادله‌ی انتگرالی و وجود جواب دوره‌ای برای آن را بررسی می کنیم. همچنین وجود جواب را برای نوعی معادله‌ی عملگری یک پارامتری مطالعه می‌کنیم.

این پایان نامه براساس مقاله‌ی زیر تهیه و تنظیم شده است:

[1] T.Xiang, R.yuan; A class of expansive - type Krasnosell skii fixed point theorems , Non linear Anal. 71(2009), 3229 - 3239.

---

[۴] Reinermann
[۵] O'Regan
[۶] Burton
[۷] Barroso

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ دو قضیه‌ی اساسی

در این پایان نامه (X,d) و $(E,\|\ .\ \|)$ به ترتیب نشان دهنده‌ی فضای متریک کامل و باناخ می‌باشند.
قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ که به اصل انقباض باناخ مشهور است در سال ۱۹۲۲ توسط باناخ، برای اثبات وجود جواب برای یک معادله‌ی انتگرالی، معرفی شد.
قبل از بیان این قضیه، تعریف مفید زیر آورده می‌شود.
۱.۱.۱ تعریف. فرض می‌کنیم (X,d_1) و (Y,d_2) فضاهایی متریک باشند. نگاشت $T:X\to Y$ را لیپ‌شیتز[1] گوییم، هرگاه ثابت k موجود باشد که به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$d_2(Tx,Ty)\leq kd_1(x,y).$$

به کوچکترین k ای که در رابطه‌ی بالا صدق کند ثابت لیپ‌شیتزی می‌گوییم و آن را با نماد $lip(T)$ نمایش می‌دهیم. اگر $k=1$ باشد، نگاشت فوق را غیرانبساطی گوییم.
نظریه‌ی نگاشت‌های غیر انبساطی، متفاوت از نظریه‌ی نگاشت‌های انقباضی است.
حال بحث خود را با قضیه‌ی نقطه ثابت باناخ دنبال می‌کنیم.
۲.۱.۱ قضیه([۱۵،ص ۳۰۰])(اصل انقباض باناخ). فضای متریک کامل (X,d) و انقباض $f:E\to E$ مفروض‌اند. در این صورت f دقیقاً یک نقطه ثابت دارد.
تذکر. در قضیه‌ی بالا، کامل بودن شرطی اساسی است و نمی‌توان آن را حذف نمود.
مثلاً تابع $f:(0,1]\to(0,1]$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x}{2}$ یک انقباض است، ولی نقطه ثابت ندارد.
در مورد نگاشت‌های غیر انبساطی باید فرض‌هایی به X و یا به نگاشت f اضافه کرد تا این نگاشت‌ها دارای حداقل یک نقطه ثابت باشند.
۳.۱.۱ قضیه([۱۳،ص ۲۸]). اگر K زیر مجموعه‌ای ناتهی، محدب، بسته و کران‌دار از فضای باناخ E باشد، آن‌گاه هر نگاشت غیر انبساطی از K به توی K یک نقطه ثابت دارد.

---
[1] Lipschitz

مثال. تابع $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ در شرط

$$d(fx,fy)<d(x,y),$$

صدق می‌کند، ولی نقطه ثابت ندارد.
توجه کنید که اگر E یک فضای متریک فشرده باشد و تابع $f:E\to E$ به ازای هر $x\neq y$ در شرط $d(fx,fy)<d(x,y)$ صدق کند، آن‌گاه f دقیقاً یک نقطه ثابت دارد.
قضیه‌ای که در بالا بیان شد، حالت خاصی از قضیه‌ی شاودر می‌باشد.
۴.۱.۱ تعریف. اگر C و D زیرمجموعه‌های غیرتهی از فضای باناخ E باشند به طوری که C بسته و محدب بوده و $D\subset C$،آن‌گاه نگاشت پیوسته‌ی $P:C\to D$ درون‌بری[۲] نامیده می‌شود هرگاه $F(P)=D$ که در آن $F(P)=\{x\in C: Px=x\}$.
مثال. فرض کنید $B_r=\{x\in E: \| x \| \leq r\}$ در این صورت نگاشت $R:E\to B_r$ با ضابطه‌ی

$$Rx=\begin{cases} x & \| x \| \leq r, \\ rx/\| x \| & \| x \| > r, \end{cases}$$

یک درون بری است.
۵.۱.۱ قضیه([۱۰،ص ۱۵۰])(نقطه ثابت شاودر). فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و $K\subset E$ ناتهی، محدب، بسته و کران‌دار باشد. در این صورت هر نگاشت پیوسته ازK به توی K که‌در یک زیر مجموعه ی فشرده ی E قرار دارد، دارای نقطه ثابت است.
در زیر مفاهیم کلاً کران‌داری و همپیوستگی[۳] که در بیان قضیه‌ی آرزلا-آسکولی مورد نیاز می‌باشند، آورده می‌شوند.
۶.۱.۱ تعریف. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. مجموعه‌ی $E\subset X$ را کلاً کران‌دار نامیم هرگاه به ازای هر $\epsilon>0$، E مشمول اجتماع متناهی از گوی‌های باز به شعاع ϵ و مراکز در E باشد.
مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی پیوسته‌ی تعریف شده روی X را با علامت $C(X)$ نمایش

[۲] Retraction
[۳] Equicontinuous

می‌دهیم.
$C(X)$ مجهز به متریک یکنواخت، یعنی $d(f,g) = \sup_{x\in E} |f(x) - f(y)|$ برای $f, g \in C(x)$ را یک فضای متریک یکنواخت می‌نامند.

۷.۱.۱ تعریف. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $\mathbb{F} \subset C(x)$، $\mathbb{F}$ در $x \in X$ همپیوسته نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ یک همسایگی مانند U از x وجود داشته باشد به طوری که برای هر $y \in U$ و هر $f \in \mathbb{F}$، $| f(x) - f(y) |< \epsilon$ و $\mathbb{F}$ همپیوسته نامیده می‌شود هرگاه در هر $x \in X$ همپیوسته باشد.

همچنین $\mathbb{F}$ کران‌دار نقطه‌ای خوانده می‌شود هرگاه برای هر x از X، $\{f(x) : f \in \mathbb{F}\}$ زیرمجموعه‌ای کران‌دار باشد.

حال برآنیم تا قضیه‌ی آرزلا-آسکولی را بیان کنیم.

۸.۱.۱ قضیه([۲،ص ٦٦])(آرزلا-آسکولی). فرض کنید (X, d) یک فضای متریک فشرده و S یک زیرمجموعه‌ی $C(X)$ است. در این صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) S یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی فضای متریک $C(X)$ است.

ب) S کران‌دارنقطه ای و همپیوسته است.

۲.۱ فضای هیلبرت

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم $\langle .,. \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری مختلط H باشد، در این صورت با تعریف $\| x \| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ برای هر $x \in H$، H یک فضای نرم‌دار است، که این نرم را نرم تولید شده توسط ضرب داخلی گویند.

۲.۲.۱ تعریف. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت گویند هرگاه H با نرم تولید شده توسط ضرب داخلی یک فضای کامل باشد، یا به عبارتی هر دنباله‌ی کوشی در H با نرم تولید شده توسط ضرب داخلی، یک دنباله‌ی همگرا در H باشد.

۳.۲.۱ قضیه(نامساوی کوشی ـشوارتز). برای هر x و y در فضای ضرب داخلی H داریم

$$| \langle x, y\rangle | \leq \langle x, x\rangle^{\frac{۱}{۲}} \langle y, y\rangle^{\frac{۱}{۲}},$$

تساوی برقرار است اگر وتنها اگر x و y وابسته‌ی خطی باشند.

۴.۲.۱ تعریف. اگر X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $A \subset X$ باشد، آن‌گاه A را یک مجموعه‌ی محدب نامند هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر $۰ \leq t \leq ۱$ داشته باشیم

$$tx + (۱ - t)y \in A$$

توجه کنید که $\{tx + (۱ - t)y : ۰ \leq t \leq ۱\}$ پاره‌خط واصل از x به y است.
پس یک مجموعه‌ی A محدب است اگر و فقط اگر به ازای هر x و y در A، تمام نقاط پاره‌خط واصل یعنی x و y نیز در A باشد.
مثلاً برای هر فضای برداری X، هر زیر فضای برداری X، یک مجموعه‌ی محدب است.
اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آن‌گاه هر گوی باز

$$B(x; r) = \{y \in H :\| x - y \|< r\},$$

محدب است. به همین ترتیب هر گوی بسته نیز محدب است. مجموعه‌ی تک عضوی نیز محدب است. اشتراک هر تعداد مجموعه‌ی محدب، محدب می‌باشد.

۵.۲.۱ تعریف. اگر X یک فضای برداری بوده و $E \subset X$، غلاف محدب E[۴] را با $co(E)$ نشان می‌دهیم و به صورت اشتراک تمام زیرمجموعه‌های محدب X که شامل E می‌باشند تعریف می‌کنیم. به بیان معادل، $co(E)$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب متناهی از اعضای E می‌باشد، یعنی مجموعه‌ی تمام مجموع‌های $t_۱x_۱ + ... + t_nx_n$ که در آن برای n دلخواه، $x_i \in E$، $t_i \geq ۰$ و $\sum t_i = ۱$.
در ضمن اگر X یک فضای برداری توپولوژیک بوده و $E \subset X$، غلاف محدب بسته‌ی E که به صورت $\bar{co}(E)$ نوشته می‌شود، عبارت است از بستار $co(E)$.
ادامه‌ی این بخش به تعاریف و قضایای مورد نیاز در بخش ۱.۲ اختصاص دارد.

[۴] Convex hull

۶.۲.۱ تعریف. زیرمجموعه‌ی Y از فضای هیلبرت H را متعامد[۵] گوییم هرگاه هر دو عنصر متمایز آن برهم عمود باشند و آن را متعامد یکه[۶] گوییم هرگاه Y متعامد بوده و هر عنصر آن، بردار یکه باشد. بنا به تعریف بالا، گردایه‌ی $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ از بردارهای فضای هیلبرت H و با مجموعه اندیس I، متعامد یکه‌است هرگاه به ازای هر $\alpha,\beta\in I$،

$$\langle U\alpha, U_\beta\rangle = \begin{cases} ۱ & \alpha=\beta,\\ ۰ & \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

یک مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی ماکزیمال در X، یک پایه‌ی متعامد یکه یا یک مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی کامل نامیده می‌شود.

۷.۲.۱ تعریف. فضای برداری نرم‌دار X را جدایی‌پذیر نامیم هرگاه X شامل زیرمجموعه‌ای چگال و شمارا باشد.

۸.۲.۱ تعریف(فرآیند گرام ـاشمیت[۷]). فرض کنید $\{x_n : n = ۱,۲,۳,...\}$ یک مجموعه‌ی مستقل خطی از بردارهای H باشد. مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی $\{u_n : ۱,۲,۳,...\}$ از اعضای H وجود دارد به طوری که فضای تولید شده توسط $\{x_n\}_{n=۱}^N$ و $\{u_n\}_{n=۱}^N$ به ازای هر عدد طبیعی N یکی هستند.

۹.۲.۱ قضیه([۲۰،ص ۹۷]). H جدایی‌پذیر است اگر و تنها اگر H شامل یک مجموعه‌ی متعامد یکه‌ی ماکزیمال شمارش پذیر باشد.

۱۰.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X و Y دو فضای نرم‌دار روی یک میدان باشند. گوییم X و Y همریخت توپولوژیک هستند، هرگاه تناظری یک به یک، خطی و پوشا مانند T از X به توی Y موجود باشد به قسمی که T و $T^{-۱}$ پیوسته باشند. به عبارت دیگر X و Y همریخت توپولوژیک‌اند هرگاه یک هومیومورفیسم[۸] خطی پوشا از X به توی Y وجود داشته باشد. تبدیل خطی $T : X \to Y$ را یک هومیومورفیسم خطی نامیم هرگاه T و $T^{-۱}$ پیوسته باشند. به عبارت دیگر تبدیل خطی دوسویی $T : X \to Y$ یک هومیومورفیسم خطی است اگر و تنها

[۵] Orthogonal
[۶] Orthonormal
[۷] Gram-schmidt process
[۸] Homeomorphism

اگر عددهای k_1 و k_2 یافت شوند به طوری که

$$k_1 \parallel x \parallel \leq \parallel Tx \parallel \leq k_2 \parallel x \parallel .$$

به ویژه یک ایزومورفیسم خطی پوشا، یک هومیومورفیسم خطی می‌باشد($k_1 = k_2 = 1$).

۱۱.۲.۱ قضیه([۱٦،ص ۷]). هر فضای نرم‌دار X با گوی باز $B(0, r)$، $r > 0$ هومیومورف است.

۳.۱ توپولوژی ضعیف

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنید E یک فضای برداری نرم‌دار و $\{x_n\}_{n\geq 1}$ دنباله‌ای در X باشد. گوییم $\{x_n\}$ به طور ضعیف به $x \in E$ همگراست و می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ هرگاه برای هر $f \in E^\star$ داشته باشیم $f(x_n) \to f(x)$.

توجه به این نکته ضروری است که حدّ ضعیف دنباله‌ی $\{x_n\}$، در صورت وجود، یکتاست، زیرا اگر $x_n \rightharpoonup x$ و $x_n \rightharpoonup y$، آن‌گاه برای هر $f \in E^\star$ داریم

$$f(x) = f(y).$$

حال طبق نتیجه‌ای از قضیه‌ی هان – باناخ[۹](فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و عناصر y, x از E چنان موجودند که برای هر $f \in E^\star$ داریم $f(x) = f(y)$، در این صورت $x = y$) خواهیم داشت $x = y$.

وقتی می‌نویسیم $x_n \to x$، منظور همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ به x در نرم است؛ یعنی،

$$\parallel x_n - x \parallel \to 0,$$

این همگرایی را همگرایی قوی می‌نامیم.

نکته. واضح است که اگر $x_n \to x$، آن‌گاه $x_n \rightharpoonup x$، زیرا برای هر $f \in E^\star$ داریم

$$| f(x_n) - f(x) | \leq \parallel f \parallel . \parallel x_n - x \parallel .$$

[۹] Hahn - Banach

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم Y، X فضاهای باناخ باشند و $A \in B(X,Y)$. A را پیوسته‌ی کامل[۱۰] نامیم هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در X که $x_n \to x$ داشته باشیم

$$\| Ax_n - Ax \| \to 0,$$

به عبارتی $A(D)$ برای همه‌ی مجموعه‌های کران‌دار $D \subset X$ نسبتاً فشرده[۱۱] باشد.
توجه کنید که مجموعه‌ی $A(D)$ نسبتاً فشرده نامیده می‌شود هرگاه $\overline{A(D)}$ فشرده باشد.
۳.۳.۱ تعریف. فرض کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و K زیرمجموعه‌ای از آن باشد. گوییم K در E به طور ضعیف فشرده است هرگاه هر دنباله‌ی $\{x_n\}$ در K، دارای زیردنباله‌ای به طور ضعیف همگرا باشد.
۴.۳.۱ تعریف. فرض کنید X فضای باناخ و نگاشت پیوسته‌ی $T : U \subset X \to X$ را در نظر می‌گیریم.
T را فشرده می‌نامند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی بسته و کران‌دار U مانند K مجموعه‌ی $\overline{T(K)}$ فشرده باشد.
همچنین‌ازیک فضای متریک X موضعاً فشرده[۱۲] نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه از X، یک همسایگی فشرده داشته باشد. ضمناً یک فضای توپولوژیکی X فشرده‌ی دنباله‌ای[۱۳] نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله در X شامل یک زیر دنباله‌ی همگرا باشد.
یادآوری می‌کنیم که فضای توپولوژیک X، هاسدورف[۱۴] نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$، همسایگی‌های U و V به ترتیب از x و y موجود باشند به طوری که $U \cap V = \emptyset$.

۵.۳.۱ تعریف. فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و $K \subset E$. در این صورت بستار ضعیف K را که با $\bar{K}^w$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{K}^w = \{x \in E : \exists \{x_n\} \subset K \ni x_n \rightharpoonup x\}$$

[۱۰] Completely continuous
[۱۱] Relatively compact
[۱۲] Locally compact
[۱۳] Sequentially compact
[۱۴] hausdorff

فرض می‌کنیم K زیرمجموعه‌ای محدب در فضای برداری نرم‌دار E باشد. در این صورت، بستار قوی و ضعیف K برابرند؛ یعنی، $\bar{K} = \bar{K}^w$.

۶.۳.۱ قضیه([۱۹،ص ۱۷]). فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار با بعد نامتناهی باشد. در این صورت X فشرده‌ی موضعی نیست.

با بیان دو قضیه‌ی زیر بخش را خاتمه می‌دهیم.

۷.۳.۱ قضیه([۱۰،ص۱۶۳])(ابرلین — شمولیان[۱۵]). اگر X یک فضای باناخ باشد و $A \subset X$ آن‌گاه گزاره‌های زیر معادل‌اند:

الف) هر دنباله از عناصر A زیردنباله‌ای به طور ضعیف همگرا دارد.

ب) هر دنباله از عناصر A یک نقطه‌ی انباشتگی ضعیف دارد.

پ) بستار ضعیف A به طور ضعیف فشرده است.

۸.۳.۱ قضیه([۱۰،ص ۱۶۴])(کرین — شمولیان[۱۶]). اگر X یک فضای باناخ باشد و K یک زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی ضعیف X باشد، آن‌گاه $\overline{co}(K)$ به طور ضعیف فشرده است.

۴.۱ فضاهای انعکاسی

فرض می‌کنیم E یک فضای برداری نرم‌دار و $E^\star$ فضای دوگان باشد. دوگان $E^\star$ را با $E^{\star\star}$ نشان می‌دهیم و آن را دوگان دوم E می‌نامیم. بنابراین، $E^{\star\star}$ مجموعه‌ی تابعک‌های خطی کران‌دار روی $E^\star$ می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم $x \in E$. قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \hat{x}: & E^\star \to F \\ & f \longmapsto \langle x, f \rangle. \end{cases}$$

روشن است $\hat{x}$ یک تابعک خطی است؛ به علاوه،

$$|\langle f, \hat{x} \rangle| = |\langle x, f \rangle| \leq \| f \| \| x \| \quad , f \in E^\star.$$

[۱۵] Eberlin - Smulian

[۱۶] Krein - Smulian

در نتیجه، $\| x \| \leq \| \hat{x} \|$؛ یعنی، $\hat{x} \in E^{\star\star}$.
اکنون فرض می‌کنیم نگاشت $J_\circ$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\begin{cases} J_\circ : & E \to E^{\star\star} \\ & x \longmapsto \hat{x}_\circ \end{cases}$$

خطی بودن $J_\circ$ بدیهی است. از طرفی طبق یکی از نتایج قضیه‌ی هان – باناخ $f_x \in E^\star$ی موجود است که $\| f_x \| = ۱$ و $\| x \| = \langle x, f_x \rangle$؛ بنابراین

$$\| x \| = | \langle x, f_x \rangle | = | \langle f_x, \hat{x} \rangle | \leq \| \hat{x} \| \| f_x \|,$$

در نتیجه $\| x \| \leq \| \hat{x} \|$؛ چون $\| \hat{x} \| \leq \| x \|$ پس $\| \hat{x} \| = \| x \|$؛ و این به معنی ایزومتری بودن $J_\circ$ است. از مباحث بالا می‌توان نتیجه گرفت $E \hookrightarrow E^{\star\star}$ یعنی، E در $E^{\star\star}$ نشسته است.

۱.۴.۱ تعریف. نگاشت $J_\circ : E \to E^{\star\star}$ که در آن $J_\circ(x) = \hat{x}$، ایزومتری خطی – کانونی نام دارد.

اکنون آمادگی لازم را برای تعریف فضاهای انعکاسی داریم.

۲.۴.۱ تعریف. فضای برداری نرم‌دار E انعکاسی نامیده می‌شود هرگاه ایزومتری خطی – کانونی $J_\circ$ پوشا باشد.

مثال. فضاهای هیلبرت و l^p $(۱ < p < \infty)$ مثال‌هایی از فضاهای انعکاسی می‌باشند.

قضیه‌های زیر شرایط لازم و کافی را برای انعکاسی بودن یک فضای باناخ ارائه می‌دهند.

۳.۴.۱ قضیه([۱۰]،ص ۱۳۲). فضای باناخ X انعکاسی است اگر و فقط اگر گوی واحد بسته‌ی X به طور ضعیف فشرده باشد.

۴.۴.۱ قضیه([۱۳]،ص ۴). فرض می‌کنیم $B(\circ; ۱) = \{x \in E : \| x \| \leq ۱\}$ گوی واحد در E باشد. در این صورت فضای باناخ E، انعکاسی است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

آ) $E^\star$ انعکاسی باشد؛

ب) $B(\circ; ۱)$ در $E^\star$ به طور ضعیف فشرده باشد؛

پ) هر دنباله‌ی کران‌دار در E دارای زیر دنباله ای به طور ضعیف همگرا باشد؛

ت) برای هر $f \in E^\star$، $x \in B(\circ; 1) \subset E$ی موجود باشد به طوری که $f(x) = \| f \|$؛

ث) برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب K از E، و هر $f \in E^\star$، $x \in K$ی موجود باشد که $f(x) = \sup\{f(y) : y \in K\}$؛

ج) برای هر دنباله‌ی نزولی $\{K_n\}$ از زیرمجموعه های ناتهی، کران‌دار، بسته و محدب در E داریم: $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.