بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

رسالهٔ دورهٔ دکتری ریاضی (کاربردی)

روش‌های رونگه- کوتا با طول گام متغیر برای معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی

توسط

علی فروش باستانی

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

خرداد ۱۳۸۷

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

تاییدیه اعضای هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از رساله دکتری

آقای علی فروش‌باستانی رساله واحدی خود را باعنوان: «روشهای رونگه – کوتا با طول گام متغیر برای معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی» در تاریخ ۸۷/۳/۱۱ ارائه کردند.

اعضای هیات داوران نسخه نهایی این رساله را از نظر فرم و محتوا تایید کرده است و پذیرش آنرا برای تکمیل درجه دکتری پیشنهاد می کند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱– استاد راهنما	آقای دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲– استاد ناظر داخلی	آقای دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳– استاد ناظر داخلی	آقای دکتر علاءالدین ملک	دانشیار	
٤– استاد ناظر خارجی	آقای دکتر اسماعیل بابلیان	استاد	
٥– استاد ناظر خارجی	آقای دکتر بیژن ظهوری‌زنگنه	استاد	
٦– نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	آقای دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم پایه

بسمه تعالی

آیین‌نامهٔ چاپ پایان‌نامه (رساله) های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان‌نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش‌آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

مادهٔ ۲ در صفحهٔ سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کنند

«کتاب حاضر حاصل پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد/رسالهٔ دکتری نگارنده در رشتهٔ ریاضی کاربردی است که در سال ۱۳۸۷ در دانشکدهٔ علوم پایه دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار خانم /جناب آقای دکتر سید محمد حسینی ، مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر و مشاورهٔ سرکار خانم/جناب آقای دکتر از آن دفاع شده است.»

مادهٔ ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

مادهٔ ۴- درصورت عدم رعایت مادهٔ ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ‌شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تادیه کند.

مادهٔ ۵- دانشجو تعهد و قبول می‌کند درصورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در مادهٔ ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه‌شدهٔ نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

مادهٔ ۶- اینجانب علی نردبان باستانی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع دکتری تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: علی نردبان باستانی
تاریخ و امضا:
۱۳۸۷/۱۱/۲۰

۱۳۸۷ /۱۱/ ۲۰

دستورالعمل حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیات علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی که با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد ذیل را رعایت نمایند:

ماده ۱- حقوق مادی و معنوی پایان نامه‌ها / رساله‌های مصوب دانشگاه متعلق به دانشگاه است و هرگونه بهره‌برداری از آن باید با ذکر نام دانشگاه و رعایت آیین‌نامه‌ها و دستورالعمل‌های مصوب دانشگاه باشد.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و استاد راهنما مسئول مکاتبات مقاله باشند.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب حاصل از نتایج پایان نامه / رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی دانشگاه باید با مجوز کتبی صادره از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه های مصوب انجام می‌شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق حوزه پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این دستورالعمل در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۱۳۸۴/۴/۲۵ در شورای پژوهشی دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب لازم الاجرا است و هرگونه تخلف از مفاد این دستورالعمل، از طریق مراجع قانونی قابل پیگیری خواهد بود.

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و مهربانم،

همسرم

و

همه‌ی کسانی که موفقیت‌هایم موجب شادیشان می‌شود

با ژرف‌ترین سپاس‌ها از :

— لطف بی‌پایان الهی که هدایت‌گر درونم را شوق آموختن عطاکرد.

— پدر و مادرم که دعای خیرشان همیشه بدرقه راهم بوده و هست.

— همسر عزیزم که با حمایت‌های بی‌دریغ خود امکان نوشتن این رساله را فراهم آورد.

— استاد ارجمند جناب آقای دکتر سید محمد حسینی که زحمت راهنمائی این رساله را بر عهده داشتند.

— اساتید ارجمند آقایان دکتر سید مسعود امینی، دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر بیژن ظهوری زنگنه و دکتر علاء الدین ملک که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند .

— و همهٔ دوستانی که فرصت آشنائی آنها در طول دوران دانشجوئیم بر تجربهٔ زندگی من افزود.

با حق‌شناسی و سپاس فراوان

علی فروش باستانی

بهار ۱۳۸۷

چکیده

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی [1] به عنوان یک شاخهٔ علمی نسبتاً جدید، جایگاه مهمی را در میان شاخه‌های ریاضی به خود اختصاص داده است. این نظریه که با کارهای ایتو در دههٔ ۵۰، شکل انسجام یافته‌ای به خود گرفت، در سال‌های بعد به عنوان ابزاری مفید برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های طبیعی، اقتصادی و تکنولوژیکی، مورد توجه فراوان قرار گرفت. از آنجا که بسیاری از معادلات دیفرانسیل تصادفی مورد استفاده در شبیه‌سازی‌های کاربردی فاقد جواب تحلیلی هستند، بحث حل عددی این گونه معادلات، خود را به عنوان یک جایگزین مهم مطرح می‌کنند. یکی از مباحثی که در ادبیات حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی [2] سابقه‌ای طولانی داشته و توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است، بحث «روش‌های با طول گام متغیر» یا «روش‌های تطبیقی» برای گسسته‌سازی این گونه معادلات است.

بکارگیری روش‌های گسسته‌سازی تطبیقی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی، بحثی بسیار نوپا بوده و هنوز در مراحل آغازی خود به سر می‌برد. این امر در درجهٔ نخست به پیچیدگی ذاتی معادلات دیفرانسیل تصادفی (به دلیل وجود جملهٔ تصادفی) برمی‌گردد که به نوبهٔ خود منجر به پیچیدگی زیاد بسط‌های «تیلور- ایتو» یا «تیلور- استراتونویچ» برای جواب دقیق و جواب تقریبی مسئله می‌شود. از طرف دیگر حجم محاسبات لازم به منظور پیاده‌سازی روش‌های تطبیقی برای SDE ها بسیار بیشتر از روش‌های با طول گام ثابت است.

روش‌های رونگه – کوتای تصادفی با طول گام متغیر، به دلیل ماهیت تک – گامی

---

[1] Stochastic Differential Equations (SDEs)

[2] Ordinary Differential Equations (ODE)

آنها، در سال‌های اخیر مورد توجه فراوانی قرار گرفته‌اند. فرآیند تخمین خطای موضعی برای این خانواده از روش‌ها، عمدتاً بر پایهٔ در هم نشاندن دو روش رونگه – کوتا با مرتبه‌های مختلف و استفاده از تفاضل آنها انجام می‌شود. مزایای استفاده از این روش در مقایسه با هزینه‌های محاسباتی بالای آن چندان چشمگیر نیست.

در این رساله، به معرفی خانواده‌ای از روش‌های با طول گام متغیر برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌پردازیم. به عنوان روش زمینه‌ای از خانوادهٔ روش‌های رونگه – کوتای تصادفی [۳] و به منظور تخمین خطای موضعی، از ایدهٔ گامهای زمانی پیشرو – پسرو استفاده می‌کنیم. با بهره‌گیری از ایدهٔ «شکافت عملگر» [۴]، فرایند تخمین خطای موضعی را به چند مرحله تجزیه کرده و در هر یک از این مراحل، از جملات تصادفی و غیرتصادفی معادله به طور مناسبی استفاده می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که این روش‌ها از خواص پایداری مطلوب‌تری در مقایسه با روش‌های با طول گام ثابت متناظر برخوردارند. این امر برای انتگرال‌گیری عددی در زمان‌های طولانی، از اهمیت اساسی برخوردار است. به کمک مثال‌های عددی متعدد نشان می‌دهیم که بحث‌های نظری ارائه شده معتبر هستند و با انتخاب پارامترهای مناسب در این روش‌ها می‌توان به کارائی بسیار مطلوبی دست یافت.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، روشهای با طول گام متغیر، روش‌های رونگه – کوتای تصادفی، تخمین خطای موضعی، تخمین خطای پیشرو – پسرو، پایداری میانگین مربعات.

---

[۳] Stochastic Runge-Kutta

[۴] Operator Splitting

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

نظریهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی به عنوان زیر شاخه‌ای از آنالیز تصادفی[۱]، یکی از فعال‌ترین رشته‌های ریاضی چه به لحاظ تحقیقات بنیادی و چه از نقطه نظر کاربردی به شمار می‌رود. ارتباط این شاخه از ریاضیات با مباحث مهمی چون معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی[۲] و سهموی[۳]، فرایندهای مارکوف با زمان پیوسته[۴] و نظریهٔ فیلترسازی[۵] بر اهمیت نتایج بدست آمده در این شاخه افزوده است.

به لحاظ تاریخی، کشف حرکت براونی توسط رابرت براون[۶]، سپس توصیف فیزیکی آن توسط آلبرت آینشتاین و در نهایت ارائهٔ یک چهارچوب مستحکم ریاضی برای آن توسط

---

[۱] Stochastic Analysis

[۲] Elliptic

[۳] Parabolic

[۴] Continuous Time Markov Processes

[۵] Filtering Theory

[۶] Robert Brown

نربرت وینر[۷] و پل لوی[۸] به عنوان نقطه شروع این نظریه به شمار می‌روند. با تعریف انتگرال تصادفی توسط کیوشی ایتو[۹] در دههٔ ۵۰، این نظریه وارد مرحلهٔ جدیدی شد و شکل انسجام یافته‌ای به خود گرفت [۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴].

همزمان با گسترش مبانی تئوریک این نظریه، تلاش‌های فراوانی نیز در جهت استفاده از این ابزار برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی، اقتصادی و تکنولوژیکی صورت گرفت که با موفقیت زیادی مواجه شدند. ریاضیات مالی، دینامیک جمعیت، جریان سیال متلاطم، شناسائی ذخایر آبی، نظریهٔ کنترل بهینه، فیزیک، ژئوفیزیک، پزشکی، زیست شناسی، عصب‌شناسی، طراحی مدارهای الکترونیکی و اقیانوس‌شناسی تنها تعدادی از زمینه‌های متعددی هستند که در آنها از معادلات دیفرانسیل تصادفی (یا به اختصار SDE) برای مدل‌سازی استفاده می‌شود [۲۱].

از آنجا که بسیاری از معادلات دیفرانسیل تصادفی مورد استفاده در شبیه‌سازی‌های کاربردی فاقد جواب تحلیلی هستند، بحث حل عددی این گونه معادلات، خود را به عنوان یک جایگزین مهم مطرح می‌کند. برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، چندین خانوادهٔ مهم از روش‌ها از قبیل روش‌های مبتنی بر سری تیلور[۱۰]، روش‌های رونگه – کوتا[۱۱]، روش‌های چندگامی[۱۲] و روش‌های خطی عمومی[۱۳] در طی سالیان متمادی توسعه یافته و نرم‌افزارهای کاربردی متعددی بر پایهٔ آنها ارائه شده است. این امر در مورد SDE ها صادق

[۷] Norbert Wiener

[۸] Paul Lévy

[۹] K. Itô

[۱۰] Taylor Series

[۱۱] Runge-Kutta

[۱۲] Multistep

[۱۳] General Linear Methods

نیست، بدین معنی که اولین ایده‌های حل عددی آنها به اواسط دههٔ ۵۰ میلادی باز می‌گردد. همچنین به دلیل تفاوت موجود میان حسابان تصادفی و حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی، به راحتی نمی‌توان روش‌های مورد استفاده در حل عددی ODE ها را برای SDE ها بکار برد و این امر نیاز به بررسی‌های فراوان دارد.

یکی از مباحثی که در ادبیات حل عددی ODE سابقه‌ای طولانی داشته و توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است، بحث «روش‌های با طول گام متغیر»[۱۴] یا «روش‌های تطبیقی»[۱۵] برای گسسته‌سازی این گونه معادلات است. این روش‌ها، دارای این مزیت عمده هستند که با تغییر طول گام خود در حین انتگرال‌گیری، باعث صرفه‌جوئی عمده‌ای در هزینه‌های محاسباتی می‌شوند و بعلاوه خواص پایداری مطلوب‌تری نیز در مقایسه با روش‌های با طول گام ثابت از خود نشان می‌دهند. از مهم‌ترین روش‌های موجود در این رده می‌توان به روش‌های «رونگه – کوتا – فلبرگ»[۱۶]، «روش برونیابی ریچاردسون»[۱۷] و «ابزار میلنه»[۱۸] اشاره کرد. هر یک از این روش‌ها، ابزاری برای «تخمین خطای موضعی»[۱۹] بدست می‌دهند که به کمک آن می‌توان یک استراتژی تغییر طول گام مؤثر طراحی و پیاده‌سازی کرد.

بکارگیری روش‌های گسسته‌سازی تطبیقی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی، بحثی بسیار نوپا بوده و هنوز در مراحل آغازی خود به سر می‌برد. این امر در درجهٔ نخست به

[۱۴] Variable Step-size Methods

[۱۵] Adaptive Methods

[۱۶] Runge-Kutta-Fehlberg

[۱۷] Richardson Extrapolation

[۱۸] Milne Device

[۱۹] Local Error Estimation

پیچیدگی ذاتی معادلات دیفرانسیل تصادفی (به دلیل وجود جملهٔ تصادفی) برمی‌گردد که به نوبهٔ خود منجر به پیچیدگی زیاد بسط‌های «سری تیلور– ایتو»[20] یا «تیلور– استراتونویچ»[21] برای جواب دقیق و جواب تقریبی مسئله می‌شود. از طرف دیگر حجم محاسبات لازم به منظور پیاده‌سازی روش‌های تطبیقی برای SDE ها بسیار بیشتر از روش‌های با طول گام ثابت است.

روش‌های رونگه – کوتای تصادفی با طول گام متغیر، به دلیل ماهیت تک – گامی آنها در سال‌های اخیر مورد توجه فراوانی قرار گرفته‌اند. فرآیند تخمین خطای موضعی برای این خانواده از روش‌ها، عمدتاً بر پایهٔ در هم نشاندن دو روش رونگه – کوتا با مرتبه‌های مختلف و استفاده از تفاضل آنها انجام می‌شود. مزایای استفاده از این روش در مقایسه با هزینه‌های محاسباتی بالای آن چندان چشمگیر نیست.

در این رساله، با معرفی یک ایدهٔ محاسباتی کارا برای تخمین خطای موضعی که بر پایهٔ گام‌های زمانی پیشرو – پسرو و شکافت عملگر می‌باشد، خانواده‌ای از روش‌های انتگرال‌گیری را بدست می‌آوریم که در عین سادگی پیاده‌سازی، منجر به خطاهای سراسری مناسبی در ازای هزینهٔ صرف شده می‌شوند و بعلاوه تعداد طول گام‌های رد شدهٔ آنها نیز در مقایسه با روش‌های هم مرتبهٔ متناظر بسیار مناسب است. بعلاوه نشان می‌دهیم که این روش‌ها دارای خواص پایداری مطلوب‌تری در مقایسه با روش‌های با طول گام ثابت زمینه‌ای هستند. این امر بخصوص در بحث انتگرال‌گیری عددی در زمان‌های طولانی[22] بسیار حائز اهمیت خواهد بود.

نتایج تحقیقات انجام شده در قالب این رساله، به صورت مقالات تحقیقی و سخنرانی در مجلات و سمینارهای مختلف به شرح زیر ارائه شده است:

---

[20] Taylor-Itô

[21] Taylor-Stratonovich

[22] Long-Time Integration

1. A. Foroush Bastani & S. M. Hosseini (2007), *A new adaptive Runge-Kutta method for stochastic differential equations*, J. Computational and Applied Mathematics, 206, 631–644.

2. A. Foroush Bastani & S. M. Hosseini (2008), *On mean-square stability properties of a new adaptive stochastic Runge-Kutta method*, To be published in J. Computational and Applied Mathematics.

3. A. Foroush Bastani & S. M. Hosseini, *Adaptive Runge-Kutta methods for stochastic differential equations*, Workshop On Numerics and Theory for Stochastic Evolution Equations, 22-24 November 2006, Bielefeld, Germany.

۴) حل عددی معادلات دیفرانسیل تصادفی معمولی با طول گام متغیر بر پایهٔ روش رونگه – کوتا، سی و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه شهید چمران اهواز، بهمن ۱۳۸۳.

۵) پایداری میانگین مربعات برای روش‌های تطبیقی تصادفی، دومین کارگاه فرایندهای تصادفی و کاربردهای آن، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، بهمن ۱۳۸۵.

در ادامه و در فصل اول، ابتدا به انگیزه‌های مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی پرداخته و سپس به اجمال به روش‌های گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی اشاره می‌کنیم. سپس روش‌های رونگه – کوتای تصادفی را به عنوان یکی از مؤلفه‌های اصلی تشکیل دهندهٔ این رساله معرفی می‌کنیم. در فصل دوم، با مروری بر ادبیات روش‌های

گسسته‌سازی تطبیقی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی و غیرتصادفی، به اجزای اصلی تشکیل دهندهٔ یک الگوریتم با طول گام متغیر می‌پردازیم. در فصل سوم، رهیافت جدید خود را که مبتنی بر گام‌های زمانی پیشرو – پسرو می‌باشد را معرفی کرده و به تحلیل رفتار الگوریتم در حالت کلی می‌پردازیم. به منظور نشان دادن کارائی روش ارائه شده، چند مسئلهٔ آزمون که به دقت از ادبیات مربوط به SDE انتخاب شده‌اند را مورد بررسی عددی قرار داده و نشان می‌دهیم که این روش دارای مزایای متعددی در مقایسه با الگوریتم‌های مشابه است. در فصل چهارم، بحث مهم پایداری میانگین مربعات برای روش‌های عددی تصادفی را مطرح می‌کنیم. نشان می‌دهیم که روش ارائه شده، دارای خواص پایداری مطلوبی در مقایسه با روش‌های هم مرتبهٔ متناظر است و ناحیهٔ پایداری آن اکیداً شامل ناحیهٔ پایداری معادلهٔ دیفرانسیل تصادفی است. در پایان نیز با ارائهٔ خلاصه‌ای از مباحث مطرح شده در این رساله، به چند نکته در راستای گسترش نتایج این تحقیق به موارد دیگر اشاره می‌کنیم.

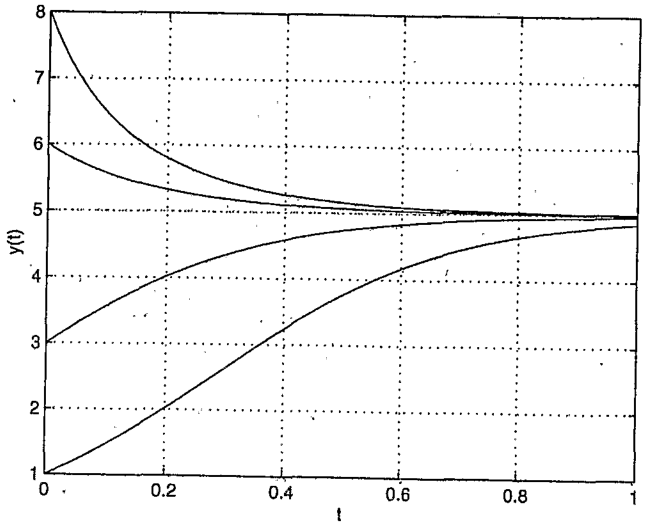
۱.۱ انگیزه برای مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل تصادفی

بسیاری از سیستمهای مورد مطالعه در ریاضیات، توسط دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) توصیف می‌شوند. تعداد زیادی از این ODE ها، تقریب‌هائی تعیّنی[۲۳] (غیرتصادفی) از واقعیت هستند که برای سادگی مطالعهٔ آنها بدین صورت مدل‌سازی می‌شوند.

معادلهٔ لجستیک[۲۴] که در مطالعهٔ دینامیک جمعیت مورد استفاده قرار می‌گیرد را در

[۲۳] Deterministic

[۲۴] Logistic Equation



شکل ۱.۱.۱: جوابهای معادلهٔ لجستیک به ازای $k = ۵$

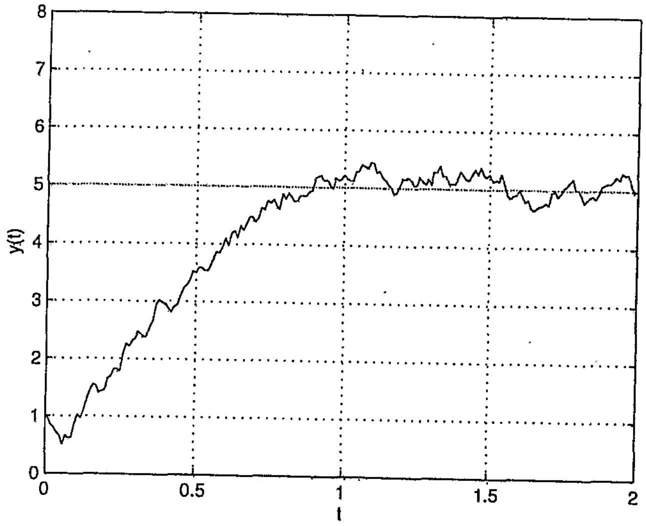
نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} dy(t) = y(t)(k - y(t))dt, \\ y(\circ) = y_\circ. \end{cases} \qquad (۱.۱.۱)$$

جوابهای این معادله، مسیرهائی غیرتصادفی و هموار هستند که دارای وضعیت‌های پایا[۲۵] در $y = \circ$ (ناپایدار) و $y = k$ (پایدار) می‌باشند. با این وجود، رفتار جمعیت یک گونهٔ مشخص از موجودات، بسیار به دور از یک رفتار تعینی است. با در نظر گرفتن فاکتورهای رقابتی می‌توان نتیجه گرفت که رفتار گونهٔ مورد نظر ممکن است دارای یک روند زمینه‌ای مشابه شکل (۱.۱.۱) باشد، اما در واقعیت، رفتار جمعیت فوق یک فرایند تصادفی حول این مسیر خواهد بود. مثالی از اینکه یک مدل از جمعیت واقعی چگونه به نظر خواهد رسید در شکل (۲.۱.۱) ارائه شده است.

[۲۵] Steady States

برخی از متخصصان دینامیک جمعیت معتقدند که مدل کردن روند زمینه‌ای فوق کافی است، با این وجود دلایلی برای مطالعهٔ یک مدل کامل از رفتار جمعیت (غیر از درستی ریاضی آن) وجود دارد. برای مثال، ملاحظه می‌شود که در شکل (۲.۱.۱) مسیر در یک نقطه از زمان نزدیک $t = 0$ خیلی به ۰ نزدیک می‌شود. اگر جمعیت ناگهان نزدیک $t = 0$ کاهش یابد (برای مثال بدلیل خشکسالی) و محور زمان را قطع کند، مسیر حاصل بسیار متفاوت از شکل (۲.۱.۱) خواهد بود (شکل (۳.۱.۱) را ببینید). این امکان در مدل غیرتصادفی در نظر گرفته نشده است.



شکل ۲.۱.۱: معادلهٔ لجستیک تصادفی— یک مسیر نمونه‌ای

بطور مشابه، فاکتورهای محیطی ممکن است تغییر کنند و در نتیجه ظرفیت اسمی مدل (یعنی وضعیت پایای k) ممکن است حول میانگین زمینه‌ای در نظر گرفته شده بطور تصادفی