بسم الله الرحمن الرحيم

۱۵۸۵۲۳_۲۰۳۳۹۷۱

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش هسته‌ای

مطالعه‌ی برهم‌کنش‌های بس‌ذره‌ای در هسته‌های اتمی در چارچوب نظریه‌ی تغییر شکل کوانتومی

استادان راهنما:

دکتر مجتبی مستجاب‌الدعواتی

دکتر محمدحسین نادری

پژوهشگر:

الهه یعقوبی‌پور

دی‌ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش هسته‌ای خانم الهه یعقوبی‌پور

تحت عنوان

مطالعه‌ی برهم‌کنش‌های بس‌ذره‌ای در هسته‌های اتمی در چارچوب نظریه‌ی تغییر شکل کوانتومی

در تاریخ ۱۳۸۹/۱۰/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱ -استاد راهنمای اول پایان نامه دکترسید مجتبی مستجاب‌الدعواتی با مرتبه ی علمی استادیار امضا

۲- استاد راهنمای اول پایان نامه دکتر محمدحسین نادری با مرتبه ی علمی دانشیار امضا

۳- استاد داور داخل گروه دکتر فردین خیراندیش با مرتبه ی علمی دانشیار امضا

۴- استاد داور خارج از گروه دکتر مهدی نصری نصرآبادی با مرتبه ی علمی استادیار امضا

امضای مدیر گروه

گروه فیزیک
University of Isfahan
Department of Physics

چکیده

کاربردهـــای موفقیـــت‌آمیـــز الگوهـــای جبـــری در مکانیـــک کوانتـــومی مســـیر نـــوینی بـــه ســـوی درک ماهیـــت فیزیکـــی ســـامانه‌هـــای بـــس‌ذره‌ای گشـــوده اســـت. در دو دهـــه‌ی اخیـــر، برخـــی ســـاختارهای جبـــری نامتعـــارف کـــه اساســـاً بـــا نظریـــه‌ی پراکنـــدگی کوانتـــومی وارون و الگوهـــای حـــل‌پـــذیر مکانیـــک آمـــاری ارتبـــاط دارنـــد در عرصـــه‌هـــای مختلـــف فیزیـــک، همچـــون نظریـــه‌ی میـــدان‌هـــای کوانتـــومی، اپتیـــک کوانتـــومی، فیزیـــک مـــاده چگـــال و فیزیـــک هســـته‌ای توجـــه فزاینـــده‌ای را بـــه دلیـــل کاربردهـــای متنـــوع و گســـترده بـــه خـــود جلـــب کـــرده‌انـــد. ســـاختارهای مزبـــور، کـــه بـــه جبرهـــای تغییـــر شـــکل یافتـــه‌ی q یـــا گـــروه‌هـــای کوانتـــومی موســـومند، بـــه عنـــوان صـــورت‌هـــای تغییـــر شـــکل یافتـــه‌ی جبرهـــای لـــی کلاســـیک بـــه شـــمار مـــی‌آینـــد و بـــه دســـته‌ای از تقـــارن‌هـــا مـــی‌انجامنـــد کـــه بســـیار غنـــی‌تـــر از تقـــارن‌هـــای مربـــوط بـــه ســـاختارهای جبـــر لـــی هســـتند. اغلـــب کاربردهـــای نظریـــه‌ی تغییـــر شـــکل کوانتـــومی بـــه نوســـانگر هماهنـــگ کوانتـــومی اختصـــاص یافتـــه اســـت. در واقـــع، انگیـــزه‌ی اساســـی در ایـــن زمینـــه برخاســـته از ایـــن دیـــدگاه اســـت کـــه نوســـانگرهای تغییـــر شـــکل یافتـــه در ســـامانه‌هـــای غیرخطـــی همـــان نقـــش نوســـانگرهای معمـــولی (تغییـــر شـــکل نیافتـــه) در مکانیـــک کوانتـــومی اســـتاندارد را ایفـــاء مـــی‌کننـــد. نخســـتین کاربردهـــای ســـاختارهای جبـــر کوانتـــومی در فیزیـــک هســـته‌ای مربـــوط بـــه توصـــیف نوارهـــای چرخشـــی در بینـــاب هســـته‌هـــای تغییـــر شـــکل یافتـــه‌ی محـــوری و تـــزویج نوکلئـــون‌هـــا مبتنـــی بـــر جبـــر تغییـــر شـــکل یافتـــه‌ی یکـــانی خـــاص دو بُعـــدی اســـت. اگرچـــه نتـــایج حاصـــل از مطالعـــات مربـــوط در ایـــن زمینـــه، بـــرازش مقـــادیر بهینـــه‌ی پـــارامتر تغییـــر شـــکل q مقـــادیر تجربـــی بینـــاب انـــرژی هســـته‌هـــا را بهبـــود بخشـــیده اســـت امـــا تعیـــین صـــریح سرشـــت فیزیکـــی تغییـــر شـــکل کوانتـــومی در ســـامانه‌هـــای بـــس‌ذره‌ای همچنـــان نیازمند کنکاش دقیق است.

موضـــوع ایـــن پایـــان‌نامـــه بـــه مطالعـــه‌ی بـــرهم‌کـــنش‌هـــای بـــس‌ذره‌ای در هســـته‌هـــای اتمـــی در چـــارچوب نظریـــه‌ی تغییـــر شـــکل کوانتـــومی اختصـــاص دارد. از ویژگـــی‌هـــای اساســـی الگوهـــای تغییـــر شـــکل یافتـــه‌ی کوانتـــومی آن اســـت کـــه قـــوانین پایســـتگی مربـــوط بـــه تکانـــه‌ی زاویـــه‌ای، تعـــداد کـــل ذرات و تصـــویر ایزواسپین در سامانه‌های بس‌ذره‌ای را برهم‌نمی‌زنند.

واژگـــان کلیـــدی: نظریـــه‌ی تغییـــر شـــکل کوانتـــومی، گـــروه‌هـــای کوانتـــومی، بـــرهم‌کـــنش‌هـــای بـــس‌ذره‌ای، تزویج نوکلئونی.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

پیش‌گفتار

در اواخر دهه‌ی هشتاد قرن میلادی گذشته، به دنبال کوشش‌هایی که به منظور تبیین گروه‌های کوانتومی به عنوان توصیف ریاضی جبرهای لی تعمیم یافته انجام پذیرفت، امکان تعمیم مفهوم عملگرهای آفرینش و نابودی مربوط به نوسانگر هماهنگ کوانتومی استاندارد مطرح گردید. تعمیم مزبور برخاسته از نوعی فرآیند غیرخطی‌سازی موسوم به رهیافت تغییر شکل f است. به طور کلی، در این رهیافت با شروع از یک سامانه‌ی خطی که دینامیک آن با دستگاهی از معادلات دیفرانسیل متناظر توصیف می‌شود و شامل تعدادی پارامتر ثابت است می‌توان به یک سامانه‌ی غیرخطی خاص دست یافت. البته در این رهیافت، تبدیل پارامترهای ثابت سامانه‌ی مورد مطالعه به توابعی از ثابت-های حرکت با معرفی یک تابع خوش‌تعریف و ناتکینه‌ی f انجام می‌پذیرد و به همین دلیل است که روش مزبور، تغییر شکل f نام گرفته است. هر انتخاب برای تابع مزبور، به مورد خاصی از تغییر شکل f منجر می‌شود. فرآیند غیرخطی‌سازی بر اساس تغییر شکل f نابندادی (غیرکانونیک) است. بدین معنا که عملگرهای تغییر شکل یافته بر خلاف عملگرهای استاندارد، مزدوج کانونیک یکدیگر نیستند.

تغییر شکل مزبور علاوه بر گروه‌های کوانتومی مفاهیم ریاضی مهم دیگری همچون هندسه‌ی جابه‌جاناپذیر را نیز دربرمی‌گیرد. میان دو ساختار گروه‌های کوانتومی و هندسه‌ی جابه‌جاناپذیر نیز ارتباط کاملاً مشخصی وجود دارد. به زبان ساده، مفهوم هندسه‌ی جابه‌جاناپذیر برخاسته از دیدگاه-هایی است که به موضوع کوانتش فضاهای برداری کلاسیک مربوط است. بر این اساس، در چنین فضاهای به اصطلاح کوانتیده، فرمولبندی و به کارگیری ساختارهای هندسه‌ی دیفرانسیل جابه-جاناپذیر (تغییر شکل یافته) ضرورتی اجتناب‌ناپذیر است. در این روند، گروه‌های کوانتومی به عنوان گروه‌های تقارنی مربوط نقش خود را ایفاء می‌کنند. به بیان صریح، هر ساختار هندسه‌ی دیفرانسیل جابه‌جاناپذیر تحت کنش یک گروه کوانتومی معین هموردا است.آنچه به ویژه لازم است مورد توجه قرار گیرد، مقایسه‌ی ساختار جبر تعمیم یافته‌ی حاصل از تغییر شکل f با جبر هایزنبرگ-ویل و جبرهای تعمیم یافته‌ای همچون جبرهای همتافت و جبرهای یکانی دو بُعدی است. در جبر ویل-هایزنبرگ حاصل جابه‌جاگر مولدهای گروه مربوط یک کمیت ثابت غیرعملگری است. در گامی به سوی تعمیم جبر می‌توان ساختارهایی را معرفی کرد که برای آنها حاصل جابه‌جاگری‌های مولدهای گروه‌های مربوط یک کمیت عملگری باشد که به عنوان مثال‌های مشخص می‌توان از جبرهای لی $su(1,1)$ و $su(2)$ متناظر با حالت‌های همدوس $su(1,1)$ و $su(2)$ نام برد. اما اکنون با جبرهای کلی‌تری سروکار پیدا کرده‌ایم که در آن حاصل جابه‌جاگر مولدهای گروه مربوط نه تنها یک

کمیت عملگری است بلکه، برای نمونه در جبر ویل-هایزنبرگ تغییر شکل یافته، برحسب عملگر مولد عددی نیز غیرخطی است. به ویژه، ارتباط آشکاری میان جبر غیرخطی جدید با جبر ویل-هایزنبرگ معمول وجود دارد، بدین معنا که در حد $f \to 1$ جبر ویل-هایزنبرگ از درون جبر غیرخطی مزبور قابل بازیافت است.

در نگرشی عام بر کاربردهای پدیده‌شناختی گروه‌های کوانتومی در الگوهای فیزیک نظری نوین دو شیوه‌ی نسبتاً متفاوت به چشم می‌خورد. در برخی کاربردها، الگوی مورد بررسی خود دارای ساختاری است که توصیف نتایج آن تنها به مدد ملاحظات نظریه‌ی گروه‌های کوانتومی میسر است که از آن جمله می‌توان به الگوسازی و توصیف بیناب ارتعاشی مولکول‌های چند اتمی، توصیف بیناب چرخشی هسته‌ها و تعیین عامل شکل در فرآیند پراکندگی الکترون-فوتون اشاره کرد. شیوه‌ی دیگر کاربرد گروه‌های کوانتومی در الگوهای فیزیکی آن است که یک الگوی معین چنان تغییر شکل داده می‌شود که از یک ساختار جبری کوانتومی معین پیروی کند و بدین ترتیب به جست‌وجوی پیامدهای نوین فیزیکی حاصل از این تغییر شکل پرداخته می‌شود.

طرح کلی پایان‌نامه‌ی حاضر چنین است. در فصل اول، نظریه‌ی تغییر شکل کوانتومی و گروه‌های کوانتومی را مطالعه می‌کنیم. به ویژه، تغییر شکل کوانتومی تحقق فرمیونی گروه همتافت $Sp_q(4)$ را به عنوان گروه تقارن دینامیکی سامانه‌های بس‌ذره‌ای مورد توجه قرار می‌دهیم.

در فصل دوم، به مطالعه‌ی برهم‌کنش‌های بس‌ذره‌ای در ساختارهای هسته‌ای می‌پردازیم. با به کارگیری رهیافتی مبتنی بر تبدیلات بوگولیوبوف نشان می‌دهیم که برهم‌کنش‌های بس‌ذره‌ای به شدت از تزویج نوکلئونی و گذارهای چندقطبی الکتریکی اثر می‌پذیرند.

در فصل سوم، ابتدا برخی جنبه‌های مهم امکان تعبیرسامانه‌های برهم‌کنشی در چارچوب نظریه‌ی تغییر شکل کوانتومی را مطرح می‌کنیم و سپس به مدد این تعبیر به توصیف فیزیکی برهم‌کنش‌های بوزون-فرمیون در سامانه‌های هسته‌ای خواهیم پرداخت. بدینسان درمی‌یابیم که بخش بوزونی برهم‌کنش‌های مزبور را می‌توان توسط جبر تغییر شکل یافته‌ی $su_q(2)$ توصیف کرد.

سرانجام در فصل چهارم، به مطالعه‌ی همبستگی‌های تزویج در هسته‌های اتمی در چارچوب نظریه‌ی تغییر شکل کوانتومی می‌پردازیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که زوج فرمیون‌های همبسته را می‌توان به عنوان بوزون‌های تغییر شکل یافته‌ی q تعبیر کرد.

فصل اول

تغییر شکل کوانتومی و گروه‌های کوانتومی

در ایـــن فصـــل، رهیافـــت تغییـــر شـــکل fمبتنـــی بـــر روش غیـــرخطـــی‌ســـازی [۱ و ۲] را مـــرور مـــی-کنـــیم و طـــرح کلـــی روش تغییـــر شـــکل ســـامانه‌هـــای خطـــی را مـــورد بررســـی قـــرار مـــی‌دهـــیم. ایـــن رهیافـــت، بـــرای بسیاری از ســـامانه‌هـــای دینـــامیکی کـــاربرد دارد. بـــه عنـــوان نمونـــه، در معادلـــه‌ی کلایـــن -گـــوردون [۳]، کـــه در آن جـــرم بـــه صـــورت یـــک کمیـــت ثابـــت ظـــاهر مـــی‌شـــود ، یـــا ســـرعت فـــاز کـــه پـــارامتر ثابـــت معادلـــه‌ی مـــوج اســـت [۱]، دو کمیـــت مزبـــور توســـط متغیـــرهـــای دینـــامیکی کـــه خـــود ثابـــت حرکـــت ســـامانه‌ی دینـــامیکی مـــورد نظرنـــد، جـــایگزین مـــی‌شـــوند. نقطـــه‌ی شـــروع تغییـــر شـــکل مـــذکور درســـامانه‌ی نوســـانگر هماهنـــگ بـــه کـــار بـــردن یـــک تبـــدیل غیـــر کانونیـــک روی دامنـــه‌ی مخـــتلط نوســـانگر اســـت [٤ و ٥]. در ایـــن وضـــعیت پـــارامتر ثـــابتی کـــه توســـط ثابـــت حرکـــت وابســـته بـــه دامنـــه‌ی

نوسان جایگزین می‌شود، بسامد نوسان است. به کار گیری این تبدیل عامل جدیدی را به دامنه‌ی مختلط نوسانگر اضافه می‌کند که انتگرال حرکت نوسانگر در رژیم نوسان خطی و غیرخطی است.

در این فصل، ابتدا معادله‌ی موج تغییر شکل یافته را بررسی می‌کنیم. سپس با معرفی نوسانگر هماهنگ کلاسیک و کوانتومی تغییر شکل یافته، ایده‌ی ویگنر [٦]، را که بیانگر وجود هامیلتونی و روابط جابه جایی گوناگون برای دینامیک یک سامانه است را معرفی می‌کنیم. در ادامه، نمونه‌هایی از گروه‌های کوانتومی، به عنوان گروه‌های تقارن دینامیکی سامانه‌های تغییر شکل یافته را مطرح می کنیم. در بخش پایانی، به دلیل اهمیت و کاربرد گروه $Sp(4)$ در فیزیک هسته‌ای به بررسی این گروه و صورت‌های تغییر شکل یافته‌ی آن می‌پردازیم.

۱-۱ تغییر شکل کوانتومی

۱-۱-۱ معادله‌ی موج تغییر شکل یافته

معادله‌ی موج با پارامتر ثابت سرعت موج که برابر با واحد فرض می‌شود، نمونه‌ای از سامانه‌های با بی‌نهایت درجه‌ی آزادی است. ابتدا معادله‌ی موج را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varphi(x,t)=0. \qquad (۱-۱)$$

به منظور نشان دادن روش تغییر شکل کوانتومی، این معادله را به عنوان دستگاه معادلاتی برای نوسانگرهای واجفتیده در نظر می‌گیریم. از این رو، برای ساده شدن صورت‌بندی معادله‌ی مذکور نمایش تکانه را برمی‌گزینیم. بدین ترتیب رابطه‌ی (۱-۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\ddot{\varphi}^2(k,t)+k^2\varphi(k,t)=0. \qquad (۲-۱)$$

در عبارت بالا، دامنه‌ی مختلط فوریه‌ی

$$\varphi(k,t)=\frac{1}{2\pi}\int\varphi(x,t)\exp(-ikx)\,dx, \tag{۱-۳}$$

نقش مختصه‌ی جدید را ایفاء می‌کند. از آنجا که $\varphi(x,t)=\varphi^{*}(x,t)$ است، برای $\varphi(k,t)$ نیز شرط $\varphi(k,t)=\varphi^{*}(-k,t)$ برقرار است. معادله‌ی (۱-۲) یک نوسانگر هماهنگ دو بعدی را توصیف می‌کند که مدهای آن دارای بسامد مساوی هستند. معادله‌ی مذکور را می‌توان در فضای فاز نوسانگر به شکل زیر نوشت:

$$\dot{\varphi}(k,t)=\pi(k,t),\dot{\pi}(k,t)=-k^{2}\varphi(k,t), \tag{۱-٤}$$

که در آن، بسامد نوسانات $\omega^{2}=k^{2}$ است، متغیرهای مختصه و تکانه به وسیله‌ی متغیرهای جدید $p\rightarrow\pi(k,t),q\rightarrow\varphi(k,t)$ جایگزین شده‌اند. با انتخاب انتگرال حرکت به صورت زیر [۱]:

$$\mu=\int dk\left\{\frac{1}{2|k|}\left[k^{2}\left|\varphi^{2}\right|(k,t)+\left|F_{k}\right|^{2}\right]\right\}, \tag{۱-٥}$$

سامانه‌ی خطی دستخوش تغییر شکل می‌شود. در این عبارت پارامتر μ بیانگر تعداد اولیه‌ی نوسانات است و F_k که نقش اندازه‌حرکت مختلط مد k را ایفاء می‌کند، در حقیقت پاسخ معادله‌ی

$$\dot{\varphi}(k,t)=F_{k}f_{q}\left\{\int dk'\left[k'^{2}\left|\varphi^{2}\right|(k',t)+\left|F_{k'}\right|^{2}\right]\right\}, \tag{۱-٦}$$

به شمار می‌رود. در این معادله، تابع f_q به شکل زیر است:

$$f_{q}(z)=\frac{\lambda}{\sinh(\lambda)}\cosh(\lambda z). \tag{۱-۷}$$

بدین ترتیب، با استفاده از رهیافت تغییر شکل، یعنی جایگزینی پارامتر ثابت سرعت فاز در معادله‌ی موج با تابعی از این ثابت حرکت، معادله‌ی موج زیر حاصل می‌شود که به معادله-ی موج استاندارد شباهت دارد:

$$\ddot{\varphi}(x,t)=f_q^2(\mu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t). \qquad (۱-۸)$$

در این معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی، ثابت حرکت یعنی سرعت فاز موج $f_q(\mu)$ به پیکر بندی اولیه‌ی میدان و مشتقات زمانی آن بستگی دارد. برای این معادله‌ی غیرخطی، می-توان پاسخ‌هایی به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\varphi_{\pm}(x,t)=\phi\left(x\pm f_q(\mu)t\right). \qquad (۱-۹)$$

در واقع، آنچه به عنوان پیامد فیزیکی این رهیافت تغییر شکل حاصل می‌شود، وجود برهم کنش‌های غیرخطی میان مُدهای میدان است.

۱-۱-۲ نوسانگر هماهنگ کلاسیکی تغییر شکل یافته‌ی q

به منظور مطالعه‌ی تغییر شکل کوانتومی نوسانگر هماهنگ ساده، ابتدا وضعیت کلاسیک را درنظر گرفته می‌گیریم. نوسانگر هماهنگ کلاسیک با بسامد نوسان واحد در فضای مختصه و تکانه دارای هامیلتونی زیر است:

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}mx^2. \qquad (۱-۱۰)$$

اکنون متغیرهای جدید α و α^* را برحسب تکانه و مختصه به گونه‌ای تعریف می-کنیم که دارای کروشه‌ی پواسون غیر صفر باشند:

$$\alpha=\frac{q+ip}{\sqrt{2}};\alpha^*=\frac{q-ip}{\sqrt{2}}, \qquad (۱-۱۱)$$

$$\{\alpha,\alpha^*\}=-i. \qquad (۱۲-۱)$$

بـــا در نظـــر گـــرفتن تـــابع تغییـــر شـــکل $f\equiv f_q=\sqrt{\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\alpha\alpha^*\sinh\lambda}}$ مـــی‌تـــوان شـــکل جدیـــدی برای متغیرهای α و α^* تعریف کرد:

$$\alpha_q=\sqrt{\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\alpha\alpha^*\sinh\lambda}}\ ;\ \ \alpha_q^*=\sqrt{\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\alpha\alpha^*\sinh\lambda}}\ \alpha^* \qquad (۱۳-۱)$$

در این وضعیت، کروشه‌ی پواسون به شکل زیر در می‌آید:

$$\{\alpha_q,\alpha_q^*\}=-i\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\sqrt{1+|\alpha_q|^4(\sinh\lambda)^2}. \qquad (۱٤-۱)$$

بنـــابراین، مـــی‌تـــوان ســـامانه‌ی جدیـــدی را کـــه برحســـب متغییـــرهـــای α_q و α_q^* بـــا تـــابع هامیلتونی

$$H(\alpha_q,\alpha_q^*)=\alpha_q\alpha_q^*, \qquad (۱۵-۱)$$

توصیف می‌شوند، معرفی کرد. در این وضعیت معادلات حرکت نوسانگر عبارتند از:

$$\dot{\alpha}_q=-i\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\sqrt{1+|\alpha_q|^4(\sinh\lambda)^2}\,\alpha_q. \qquad (۱٦-۱)$$

پاسخ‌های این معادلات عبارتند از:

$$\alpha_q(t)=\alpha_q(0)\exp\left[\frac{-it\lambda}{\sinh\lambda}\sqrt{1+|\alpha_q(0)|^4(\sinh\lambda)^2}\right]. \qquad (۱۷-۱)$$

ملاحظـه مـی‌شـود کـه بـا انجـام یـک تبـدیل غیـر کنونیـک غیـرخطـی معادلـه‌ی حرکـت نوسـانگر تغییـر شـکل یافتـه حاصـل مـی‌شـود. دسـتیابی بـه نوسـانگر هماهنـگ کلاسـیک تغییـر شـکل یافتـه‌ی q بـه

شیوه‌ای دیگر نیز امکان‌پذیر است [۱]. در این روش، کروشه‌ی پواسون بدون تغییر می‌ماند، در حالی‌که هامیلتونی دستخوش تغییر می‌شود. با تعریف هامیلتونی به صورت

$$H_q\left(\alpha,\alpha^*\right)=\frac{\sinh\lambda\alpha\alpha^*}{\sinh\lambda}, \tag{۱-۱۸}$$

معادلات حرکت عبارتند از:

$$\dot{\alpha}=-i\omega_q\alpha;\dot{\alpha}_q^*=i\omega_q\alpha^*. \tag{۱-۱۹}$$

در معادلات فوق، ω_q برابر است:

$$\omega_q\equiv\omega_q\left(\alpha\alpha^*\right)=\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\cosh\lambda\alpha\alpha^*. \tag{۱-۲۰}$$

باید توجه داشت که $\alpha\alpha^*$ ثابت حرکت برای هر دو سامانه‌ی فوق محسوب می‌شود. همان گونه که ملاحظه می‌شود، تابع غیرخطی افزون بر ثابت حرکت، به پارامتر پیوسته‌ی λ نیز بستگی دارد. روشن است در وضعیت حدی که $\lambda\to 0$، نتایج مربوط به نوسانگر هماهنگ معمولی بازیابی می‌شود. بنابراین نوسانگر تغییر شکل یافته‌ی q به عنوان یک سامانه‌ی غیرخطی تعبیر می‌شود، که بسامد نوسان به دامنه‌ی نوسان وابسته است [۱].

۱-۳-۱نوسانگر هماهنگ کوانتومی تغییر شکل یافته

تغییر شکل در یک نوسانگر هماهنگ کوانتومی با جایگزینی عملگرهای نابودی و آفرینش استاندارد $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ توسط عملگرهای تغییر شکل یافته‌ی $\hat{A}$ و $\hat{A}^\dagger$ انجام می‌شود. به طور کلی تابع تغییر شکل f هر تابع تحلیلی و مثبتی می‌تواند اختیار شود. اما در نظر گرفتن این تابع به صورت $f\left(\hat{n}\right)=\sqrt{\frac{q^{\hat{n}}-q^{-\hat{n}}}{\hat{n}\left(q-q^{-1}\right)}}$ به تولید دسته‌ی خاصی از تغییر شکل‌ها که به تغییر شکل‌های q معروف‌اند، منجر می‌شود [۲]. ابتدا، تغییر شکل f و سپس تغییر شکل q نوسانگر هماهنگ را مطالعه می‌کنیم.

بـــرای شـــروع، عملگـــرهـــای آفـــرینش و نـــابودی استـــاندارد $\hat{a}^{\dagger}$ و $\hat{a}$ را در نظـــر مـــی گیـــریم [٤، ٥، ۷]. ایـــن عملگـــرهـــا از روابـــط جابـــه‌جـــایی استـــاندارد زیـــر یـــا بـــه عبـــارت دقیـــق‌تـــر از جبـــر ویـــل-هـــایزنبرگ[1] تبعیت می‌کنند:

$$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]=1,\left[\hat{a},\hat{n}\right]=-\hat{a},\left[\hat{a}^{\dagger},\hat{n}\right]=\hat{a}^{\dagger}. \quad (۲۱-۱)$$

در روابـــط بـــالا $\hat{n}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$ عملگـــر تعـــداد در فضـــای فـــوک اســـت. در نظـــر گـــرفتن تغییـــر شـــکل f به صورت

$$\hat{A}=\hat{a}f\left(\hat{n}\right),\hat{A}^{\dagger}=f^{\dagger}\left(\hat{n}\right)\hat{a}^{\dagger},\hat{N}=\hat{A}\hat{A}^{\dagger}=F\left(\hat{n}\right), \quad (۲۲-۱)$$

بـــرای عملگـــرهـــای آفـــرینش و نـــابودی، افـــزون بـــر بـــروز غیـــرخطیـــت در ســـامانه‌ی مـــورد نظـــر، منجـــر بـــه تغییراتـــی در روابـــط جابـــه‌جـــایی ایـــن عملگـــرهـــا و جبـــر حاصـــل از آن‌هـــا مـــی‌شـــود. بـــدین ترتیـــب در کلـــی‌تـــرین وضـــعیت تغییـــر شـــکل یعنـــی تغییـــر شـــکل f، رابطـــه‌ی جابـــه‌جـــایی اســـتاندارد بـــه شـــکل زیر در می‌آید:

$$\left[\hat{A},\hat{A}^{\dagger}\right]=\left(\hat{n}+1\right)f\left(\hat{n}+1\right)\hat{f}^{\dagger}\left(\hat{n}+1\right)-\hat{n}f\left(\hat{n}\right)f^{\dagger}\left(\hat{n}\right). \quad (۲۳-۱)$$

بـــا در نظـــر گـــرفتن تـــابع عملگـــری $f\left(\hat{n}\right)$ بـــه عنـــوان یـــک تـــابع هرمیتی، کـــه $f\left(\hat{n}\right)=\hat{f}^{\dagger}\left(\hat{n}\right)$، رابطه‌ی بالا به شکل زیر در می‌آید:

$$\left[\hat{A},\hat{A}^{\dagger}\right]=\left(\hat{n}+1\right)f^{2}\left(\hat{n}+1\right)-\hat{n}f^{2}\left(\hat{n}\right), \quad (۲٤-۱)$$

به طوری که

$$\left[\hat{A},\hat{A}^{\dagger}\right]=\hat{A},\left[\hat{A}^{\dagger},\hat{n}\right]=-\hat{A}^{\dagger}. \quad (۲۵-۱)$$

[1] Weyl – Heisenberg algebra

روابـط جابـه‌جـایی بـالا یـک گـروه کوانتـومی را تشـکیل مـی‌دهنـد کـه صـورت تعمـیم یافتـه‌ای از گـروه ویـل-هـایزنبرگ بـه شـمار مـی‌آیـد و هـامیلتونی نوسـانگر هماهنـگ کوانتـومی تغیـیر شـکل یافته تحت کنش آن ناوردا می‌ماند.

اینـک، نوسـانگر هماهنـگ کوانتـومی تغییـر شـکل یافتـه‌ی q را معرفـی مـی‌کنـیم. معادلـه‌ی حرکـت نوسـانگر کوانتـومی خطـی کـه دارای جـرم و بسـامد واحـد اسـت برحسـب عملگرهـای آفرینش و نابودی که از روابط جابه‌جایی (۱-۲۱) پیروی می‌کنند، چنین است:

$$\hat{a}+i\hat{a}=0,\hat{a}^{\dagger}-i\hat{a}^{\dagger}=0. \tag{۱-۲۶}$$

هـامیلتونی توصـیف کننـده‌ی ایـن سـامانه در وضـعیت اسـتاندارد بـه صـورت زیـر نوشـته مـی-شود:

$$\hat{H}=\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{1}{2}\right). \tag{۱-۲۷}$$

بـا درنظـرگـرفتن تغییـر شـکل q، کـه منجـر بـه تغییـر شـکل عملگرهـای بـوزونی اسـتاندارد، بـه صورت زیر می‌شود [۱]:

$$\hat{A}=\hat{a}_q=\hat{a}\sqrt{\frac{\sinh(\lambda\hat{n})}{\hat{n}\sinh\lambda}},\hat{A}_q^{\dagger}=\hat{a}_q^{\dagger}\sqrt{\frac{\sinh(\lambda\hat{n})}{\hat{n}\sinh\lambda}}\hat{a}^{\dagger}, \tag{۱-۲۸}$$

رابطه‌ی جابه‌جایی (۱-۲۳) به شکل زیر در می‌آید:

$$\left[\hat{a}_q,\hat{a}_q^{\dagger}\right]=\frac{\sinh\lambda(\hat{n}+1)-\sinh\lambda\hat{n}}{\sinh\lambda}. \tag{۱-۲۹}$$

معادلات حرکت رابطه‌ی (۱-۲۶) نیز به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\hat{a}_q+i\hat{a}_q=0,\hat{a}_q^{\dagger}-i\hat{a}_q^{\dagger}=0, \tag{۱-۳۰}$$

و در این وضعیت هامیلتونی سامانه به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\hat{H} = F^{-1}\left(\hat{N}\right) + \frac{1}{2}. \qquad (۱-۳۱)$$

در یک فضای هیلبرت دیگر، با درنظرگرفتن عملگرهای $\hat{B}$ و $\hat{B}^{+}$ که از روابط جابه-جایی بوزونی استاندارد پیروی می‌کنند:

$$\hat{B}\hat{B}^{\dagger} - \hat{B}^{\dagger}\hat{B} = \hat{1}, \qquad (۱-۳۲)$$

در حالی‌که هامیلتونی سامانه، دچار تغییر شده و به صورت زیر درآید:

$$\hat{H}' = \hat{B}^{\dagger}\hat{B} + \frac{1}{2}, \qquad (۱-۳۳)$$

توصیف دیگری از نوسانگر هماهنگ کوانتومی تغییر شکل یافته به‌دست می‌آید. در این وضعیت معادلات حرکت سامانه عبارتند از:

$$\dot{\hat{B}} + i\hat{B} = 0, \dot{\hat{B}}^{\dagger} - i\hat{B}^{\dagger} = 0. \qquad (۱-۳۴)$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که روابط جابه‌جایی و هامیلتونی توصیف کننده‌ی یک سامانه‌ی فیزیکی به طور یکتا تعیین نمی‌شوند.

به طور کلی هامیلتونی‌هایی که برای سامانه‌های فیزیکی نوشته می‌شود، همانند هامیلتونی نوسانگر هماهنگ، تحت کنش یک گروه تقارنی ناوردا هستند، با تغییر شکل یافتن سامانه‌ی فیزیکی گروه‌های تقارنی مربوط به آنها نیز تغییر می‌کند. بنابراین بررسی گروه‌های کلاسیک و همتاهای تغییر شکل یافته‌ی آنهاز اهمیت زیادی برخوردار است. در بخش بعد، به بررسی این گروه‌ها می‌پردازیم.

۱-۲ گروه‌های کوانتومی

مفهوم گروه‌های کوانتومی در اوایل دهه‌ی هشتاد قرن میلادی گذشته مطرح گردید [۸، ۹، ۱۰، ۱۱]. گروه‌های کوانتومی نسخه‌ی تغییر شکل یافته‌ای از گروه‌های لی کلاسیک هستند؛ به طوری که با میل کردن پارامترهای تغییر شکل به سمت واحد، نتایج مربوط به ساختارهای جبر لی کلاسیک بازیابی می‌شود. تقارن‌های مطرح شده در چارچوب گروه‌های مذکور، بسیار غنی‌تر از تقارن های ظاهر شده در قالب گروه‌های لی هستند. به طور کلی، این گروه‌ها، برای توصیف سامانه‌های خارج از قلمرو جبر لی کلاسیک به کار می‌روند. گروه‌های کوانتومی در ابتدا برای مطالعه‌ی الگوهای حل پذیر در مکانیک آماری [۸] معرفی شدند و سپس به سایر شاخه‌های فیزیک مانند نظریه‌ی میدان [۱۲ و ۱۳]، اپتیک کوانتومی [۱٤ و ۱۵]، ذرات بنیادی [۱٦] و فیزیک هسته‌ای [۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰] راه یافتند. جبرهای تغییر شکل یافته، درجه‌ی آزادی جدیدی را معرفی می‌کنند که می‌توانند بیان بهتری از اثرات غیر خطی را ارائه کنند. مطالعه‌ی این جبرها به درک عمیق‌تری از مفهوم فیزیکی تغییر شکل منتهی می‌شود.

این گروه‌ها نه تنها در قلمرو فیزیک و شیمی کوانتومی، بلکه در عرصه‌ی ریاضیات محض نیز اهمیت بسزایی دارند. از دیدگاه ریاضی، در دهه‌ی اخیر، کوشش‌ها بیشتر بر مطالعه‌ی تغییر شکل‌های مختلف جبر لی کلاسیک متمرکز شده است. حساب دیفرانسیل تعریف شده روی فضاهای جابه‌جاناپذیر به همان نتایج جبری کوانتیده شده در مسأله‌ی پراکندگی کوانتومی وارون، منتهی می‌شود. هندسه‌ی جابه‌جاناپذیر پیامدی از کوانتیده کردن فضاهای برداری کلاسیک است [۲۱ و ۲۲]. در این فرایند کوانتش، فرض اساسی، جابه‌جاناپذیر بودن مختصه‌های فضایی است. در واقع، رابطه‌ی بین مختصه‌های فضایی در صفحه‌ی کوانتومی به صورت زیر است:

$$xy = qyx , \qquad (۱-۳۵)$$