بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

فضاهای نرم‌دار احتمالی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

محمدرضا کوشش خواجویی

استاد راهنما

دکتر فرید بهرامی

۱۳۸۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی آقای محمدرضا کوشش خواجویی

تحت عنوان

فضاهای نرم‌دار احتمالی

در تاریخ ۸۱/۱/۱۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ـ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر فرید بهرامی
۲ـ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر علی رجالی
۳ـ استاد داور۱	دکتر محمود لشگری‌زاده بمی
۴ـ استاد داور۲	دکتر قدسیه وکیلی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر امیر نادری

بسمه تعالی

برخود لازم می دانم از همه کسانیکه مرا در انجام این رساله یاری نموده اند صمیمانه تشکر نمایم. بخصوص از جناب آقایان دکتربهرامی ودکتر رجالی که راهنمایی و مشاوره اینجانب را عهده دار بوده اند و همچنین از سرکار خانم دکتر وکیلی و جناب آقای دکتر لشکری زاده که زحمت بازخوانی این پایانامه را متقبل شده اندکمال تشکر را دارم.

محمدرضا کوشش خواجویی

۱۳۸۱/۳/۲۸

تقدیم به:

پدر و مادر

و

برادران عزیزم

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب .... هشت

چکیده........ ۱

فصل اول: مقدمه

مقدمه........ ۲

فصل دوم: پیشنیازها

۲-۱- چند تعریف مقدماتی ۵

۲-۲- تعریف یک متر بر روی مجموعهٔ توابع توزیع ۶

۲-۳- همگرایی ضعیف ۸

۲-٤- چند خاصیت مهم از متر d ۱٤

۲-۵- توابع مثلثی ۱٦

۲-٦- فضاهای نرمدار احتمالی ۱۷

۲-۷- توپولوژی قوی ۱۸

فصل سوم: چند قضیهٔ پیوستگی در فضاهای نرمدار احتمالی

مقدمه........ ۲۲

۳-۱- پیوستگی تابع نرم ۲۳

۳-۲- پیوستگی تابع جمع ۲۵

۳-۳- بررسی پیوستگی تابع ضرب اسکالر........ ۲٦

فصل چهارم: کامل سازی یک فضای PN

مقدمه ۳٦

جادهی یک فضای نرمدار احتمالی ۳۷

فصل پنجم: کرانداری در فضاهای نرمدار احتمالی

کرانداری ٤٨

فصل ششم: عملگرهای خطی بین دو فضای نرمدار احتمالی

مقدمه ٥٦
٦-١- پیوستگی یک عملگر خطی ٥٦
٦-٢- کرانداری یک عملگر خطی ٥٨
٦-٣- بررسی چند زیر فضا از فضای عملگرهای خطی ٥٨

منابع ٧٨

چکیده:

در این پایان نامه ابتدا به معرفی مفهوم جدید فضاهای نرمدار احتمالی (به اختصار فضای PN) می‌پردازیم. سپس بعضی خواص پیوستگی مرتبط با این فضاها را بررسی نموده به وسیله یک مثال نشان خواهیم داد با وجود این که در حالت کلی این فضاها، فضای برداری توپولوژیک نمی‌باشند ولی با نهادن شرط نسبتاً ضعیفی به یک فضای برداری توپولوژیک تبدیل می‌شوند. در ضمن نشان خواهیم داد هر فضای PN را می‌توان درون فضایی کامل جا داد. در مرحله بعد به تعمیم مفهوم کرانداری به فضاهای نرمدار احتمالی پرداخته و در نهایت زیرمجموعه‌های خاصی از فضای عملگرهای خطی بین دو چنین فضا را در نظر گرفته و شرایطی را بررسی خواهیم نمود که تحت آن این زیرمجموعه‌ها به زیر فضا تبدیل شوند.

فصل اول
مقدمه

مقدمه

از آنجا که ایدهٔ اصلی فضای نرمدار احتمالی ریشه در مبحث قدیمی‌تر فضای متریک احتمالی[1] دارد، بهتر آن است که ابتدا مختصری به فضاهای متریک احتمالی بپردازیم.

در سال ۱۹٤۲ منجر[2]، با جایگزین نمودن عدد حقیقی $d(p,q)$ در تعریف یک فضای متریک، توسط تابع توزیع F_{pq}، مفهوم جدید فضای متریک آماری[3] را ابداع نمود:

۱-۱ تعریف. فرض کنیم S یک مجموعه، F تابعی از $S \times S$ به Δ^+ و T یک t نرم باشد. (رجوع کنید به بخش ۲-۱ و تعریف ۳-۳-٦) گوییم (S,F,T) یک فضای متریک آماری است هرگاه برای هر $p,q,r \in S$ داشته باشیم:

(۱) $F_{pq} = \varepsilon_0$، اگر و تنها اگر، $p = q$ (رجوع کنید به بخش ۲-۱).

(۲) $F_{pq} = F_{qp}$.

(۳) $\forall x,y \in R;\ F_{pr}(x+y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$.

روابط بالا به وضوح تعمیم‌هایی از خواص متناظر فضاهای متریک می‌باشند.

---

[1] Probabilistic metric space

[2] K. Menger

[3] Statistical metric space

در سال ۱۹٦٤، برای تطابق بیشتر اسامی با آنچه اکنون مرسوم است، فضای متریک آماری به فضای متریک احتمالی تغییر نام یافت. در همان سال و بعد از گذشت ۲۲ سال از ارائه اولین تعریف از فضای متریک احتمالی و پس از ارائه تعمیم‌های گوناگونی از نامساوی مثلث، سرنف[4] (رجوع کنید به [۱]) تعریف جامعی ارائه داد که تعاریف قبلی را در بر می‌گرفت.

۱-۲ تعریف. فرض کنیم مفروضات تعریف فوق برقرار باشد، علاوه بر این τ تابع مثلثی باشد (تعریف ۲-۵-۱) گوییم (S, F, τ) یک فضای متریک احتمالی است اگر روابط (۱) و (۲) ذکر شده در فوق و رابطهٔ (۳´) زیر برقرار باشند:

(۳´) $F_{pr} \geq \tau(F_{pq}, F_{qr})$.

دقیقاً مشابه روشی که فضاهای متریک احتمالی را تعریف نمودیم می‌توان فضای نرمدار احتمالی را نیز تعریف کرد:

۱-۳ تعریف. (مرجع [۲]) فرض کنیم V یک فضای برداری روی R، ν تابعی از V به Δ^{-} و τ تابعی مثلثی و پیوسته باشد. گوییم (V, ν, τ) یک فضای نرمدار احتمالی است هرگاه برای هر $p, q \in V$ شرایط زیر برقرار باشند:

(٤) $\nu(p) = \varepsilon_0$، اگر و تنها اگر، $p = 0$.

(٥) $\nu(p+q) \geq \tau(\nu(p), \nu(q))$.

(٦) $\forall \lambda \in R, \forall x \in R;\ \nu(\lambda p)(x) = \nu(p)\left(\frac{x}{|\lambda|}\right)$.

توجه کنید که رابطه (٦) ایجاب می‌کند:

$$\forall p \in V;\ \ \nu(-p) = \nu(p)$$

بر خلاف فضاهای متریک احتمالی که از زمان ظهور آن تا کنون شاهد رشد سریعی بوده است فضاهای نرمدار احتمالی تعریف شده در فوق بسیار کند پیش رفته است، به همین دلیل و شاید دلایل دیگر تعریف فوق با تعریف ۲-٦-۱ که ادعا می‌شود تعمیم صحیح فضاهای نرمدار به فضای نرمدار احتمالی است جایگزین شده است. در آنچه پیش رو داریم همواره تعریف جدید مد نظر خواهد بود.

---

[4] A.N. Serstnev

در این پایان نامه سعی بر آن است به معرفی فضاهای نرمدار احتمالی بپردازیم. فصل دوم به ارائه مقدمات اختصاص یافته است. فصل سوم تقریباً تمامی مطالب مرجع [۳] را می‌پوشاند. فصل چهارم موضوع بحث مرجع [٤] است و در پایان دو فصل آخر به تفصیل مطالب مرجع [٥] و برخی مطالب مرجع [٦] می‌پردازد.

فصل دوم

پیشنیازها

۲-۱- چند تعریف مقدماتی

در این بخش به ارائه مطالب مورد نیاز در فصول بعد خواهیم پرداخت. بیشتر قضایای این بخش را می‌توان در مراجع[۷] و [۸] یافت. کار خود را با ارائه چند تعریف آغاز می‌کنیم.

منظور از تابع توزیع[1] (که به اختصار با $d.f.$ نشان می‌دهند) تابعی مانند $F : \overline{R} \to [0,1]$ است که افزایشی و از طرف چپ در تمام نقاط R پیوسته است. علاوه بر این $F(-\infty) = 0$ و $F(+\infty) = 1$. در اینجا $\overline{R} = R \cup \{\pm\infty\}$. مجموعه تمامی توابع توزیع را با Δ نمایش می دهیم و از Δ^+ برای نشان دادن زیر مجموعه‌ای از آن شامل تمام توابع توزیعی که در شرط $F(0) = 0$ صدق می‌کنند استفاده خواهیم کرد. این دسته از توابع را توابع توزیع فاصله‌ای[2] خواهیم نامید. تابع توزیع F را سره[3] نامیم هرگاه $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ و $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$. مجموعه تمام توابع سره در Δ و Δ^+ را به ترتیب با D و D^+ نشان خواهیم داد.

---

[1] Distribution function

[2] Distance d.f.

[3] Proper

برای دو تابع توزیع F و G می‌نویسیم $F \le G$ در صورتی که به ازای هر $x \in R$ داشته باشیم $F(x) \le G(x)$. این رابطه روی Δ و Δ^{+} یک رابطه ترتیب تعریف می‌کند.

برای هر $0 \le a$ تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_a : \overline{R} \to [0,1]$$

$$\varepsilon_a(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ 1 & x > a \end{cases}$$

در این صورت ε_0 و ε_∞ به ترتیب عناصر بیشینه و کمینه Δ^{+} خواهند بود.

۲-۲- متر بر روی مجموعه توابع توزیع

حال به تعریف یک متر[4] روی مجموعه Δ می‌پردازیم. برای F و G در Δ و h در $[0,1]$ گوییم شرط $(F,G;h)$ برقرار است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in (-\frac{1}{h},\frac{1}{h})$ داشته باشیم:

$$F(x-h)-h \le G(x) \le F(x+h)+h$$

برای FوG در Δ تعریف می‌کنیم:

$$d(F,G) = Inf\{h \in [0,1] \mid (F,G;h),(G,F;h)\}$$

نشان می‌دهیم تابع d یک متر تعریف می‌کند.

برای F و G در Δ و x در $(-1,1)$ داریم $F(x-1)-1 \le G(x) \le F(x+1)+1$. بنابراین شرط $(F,G;1)$ برقرار است. به طریق مشابه شرط $(G,F;1)$ نیز برقرار بوده، d خوش‌تعریف است.

به وضوح $d(F,G) \ge 0$.

حال فرض می‌کنیم $d(F,G)=0$، آنگاه دنباله‌ای در $[0,1]$ مانند (h_n) وجود دارد که، $h_n \to 0$ و علاوه بر آن به ازای هر n دو شرط (F,G,h_n) و $(G,F;h_n)$ برقرار باشند. برای $x \in R$ عدد صحیح N وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \ge N$، $x \in (-\frac{1}{h_n},\frac{1}{h_n})$. بنابراین برای این مقادیر n داریم:

$$G(x-h_n)-h_n \le F(x), F(x-h_n)-h_n \le G(x)$$

[4] Sibley metric

حال با توجه به این که توابع F و G از طرف چپ پیوسته‌اند خواهیم داشت:

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}(G(x-h_n)-h_n)\le F(x)\quad,\quad F(x)=\lim_{n\to\infty}(F(x-h_n)-h_n)\le G(x)$$

یعنی $F(x)=G(x)$ به ازای هر $x\in R$ و یا $F=G$.

به وضوح برای هر F در Δ، $d(F,F)=0$. چرا که برای هر $h\in(0,1]$، با توجه به صعودی بودن F داریم:

$$\forall x\in R;\quad F(x-h)-h\le F(x)\le F(x+h)+h$$

به علاوه با توجه به تعریف، d نسبت به F و G متقارن است.

اینک به بررسی نامساوی مثلثی می‌پردازیم. به عبارت دیگر برای $F,G,H\in\Delta$ نشان خواهیم داد:

$$d(F,H)\le d(F,G)+d(G,H)$$

برای این منظور $a,b\in(0,1]$ را طوری اختیار می‌کنیم که شروط $(F,G;a)$، $(G,F;a)$، $(G,H;b)$ و $(H,G;b)$ برقرار باشند. نشان می‌دهیم که $d(F,H)\le a+b$.

اگر $a+b>1$ که رابطه فوق به وضوح برقرار است. پس فرض می‌کنیم $0<a+b\le 1$. نشان خواهیم داد شروط $(F,H;a+b)$ و $(H,F;a+b)$ برقرارند. برای $x\in(-\frac{1}{a+b},\frac{1}{a+b})$ داریم $x\in(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$ و بنابراین:

$$F(x-a)-a\le G(x)\le F(x+a)+a$$

از طرفی $-\frac{1}{a}\le-\frac{1}{a+b}+b<x+b<\frac{1}{a+b}+b\le\frac{1}{a}$. بنابراین $b+x\in(-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$ و

$$F(x+b-a)-a\le G(x+b)\le F(x+b+a)+a \qquad (۱)$$

از طرف دیگر شرط $(G,H;b)$ برقرار بوده و $x\in(-\frac{1}{b},\frac{1}{b})$. بنابراین:

$$G(x-b)-b\le H(x)\le G(x-b)+b \qquad (۲)$$

با استفاده از (۱) و (۲) داریم:

$$H(x)\le G(x+b)+b\le F(x+a+b)+a+b \qquad (۳)$$

حال با توجه به این که $-\frac{1}{a}\le-\frac{1}{a+b}-b<x-b<x<\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{a}$، خواهیم داشت: