[section] [section] [section] [chapter] [chapter]
[chapter] [chapter]

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

استراتژی جستجوی چندگانه‌ی مسئله‌ی کوله‌پشتی (۱ ـ ۰) چندبعدی

استاد راهنمای اول:

دکتر غلامحسن شیردل

استاد راهنمای دوم:

دکتر مهری باقریان

نگارنده:

فهیمه تورانی

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به:

خدایی که در این نزدیکی است

و پدر و مادر عزیزم

که با تمام وجود دوستشان دارم

و برادر عزیزم سعید.

تشکر و قدردانی:

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و سایه پدر و مادر را که نشانه‌ای از رحمت اوست بر سرمان گستراند، که تشکر من در اینجا نمی‌تواند گوشه‌ای از محبت‌های آن‌ها را جبران کند.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر غلامحسن شیردل و سرکار خانم دکتر مهری باقریان که مرا مورد لطف خود قرار دادند و از علم خود بهره‌مند ساختند، تشکر و سپاسگذاری کنم. همچنین از استاد این دو بزرگوار جناب آقای دکترحسن صالحی فتح آبادی که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

و در پایان از تمامی دوستان عزیزم که مشوق من در این راه بودند و آوردن نام آن‌ها در این مجال نمی‌گنجد، تشکر می‌کنم.

چکیده

٤

در این پایان‌نامه روش پایه‌ای دقیقی بر اساس جستجوی چندگانه برای حل مسئله‌ی کوله‌پشتی (۱ـ ۰) چندبعدی ارائه شده است. استراتژی این جستجو بر روی هزینه‌های تقلیل یافته‌ی متغیرهای غیرپایه‌ای، جواب LPـتخفیف می‌باشد. فرض کنید متغیرها باتوجه به مقدار قدرمطلق هزینه‌شان به صورت نزولی اکید مرتب شده باشند. در جستجوی درخت، نوک شاخه‌ها با استراتژی «**جستجوی مصمم**»، شاخه‌های میانی با استراتژی «**شاخه و کرانه**» و شاخه‌های پایینی با استراتژی «**جستجو با تقدم در عمق ساده**» بازشماری می‌شوند. برای مثال، برنامه‌ی یک شرکت تعاونی نمونه‌ای از مسئله‌ی کوله‌پشتی چند بعدی (۱ـ ۰) در مقیاس بزرگ می‌باشد، که این استراتژی قادر به حل اینگونه مسائل می‌باشد.

کلمات کلیدی: جستجوی مصمم، شاخه و کرانه، هزینه‌های تقلیل یافته، مسئله‌ی کوله‌پشتی (۱ـ ۰) چندبعدی

مقدمه

مسئله‌ی اصلی کوله‌پشتی، مسئله‌ی کوهنوردی است که زیرمجموعه‌ای از عناصر یک لیست را برای کوله‌اش انتخاب می‌کند، به‌طوریکه عناصر انتخابی مفید بوده و وزن نهایی آن از یک حد معین بیشتر نباشد. مسئله‌ی کوله‌پشتی ۱ـ ۰ چندبعدی، به نوعی در ارتباط با مدل‌های خاصی است و کاربردهای فراوانی در اقتصاد و صنعت دارد.

مسئله کوله‌پشتی ۱ـ ۰ چندبعدی یک مسئله $NP-hard$ بوده، اما قویاً $NP-hard$ نیست. ریاضی‌دانان توانسته‌اند با روش‌های ابتکاری این مسئله را با الگوریتم‌های شبه‌ـچندجمله‌ای با هر تقریب دلخواهی حل کنند. از سویی برای بسیاری از مسائل کوله‌پشتی ۱ـ ۰ چندبعدی در اندازه‌های بزرگ که به نمونه‌های سخت معروف هستند، جوابی بدست نیامده و از سوی دیگر زمان محاسبه و اشغال نشدن حافظه‌ی رایانه برای حل این نوع مسائل مهم می‌باشد. از این رو این مسائل ما را بر آن داشت که در این پایان‌نامه به روش‌های حل مسئله‌ی کوله‌پشتی ۱ـ ۰ چندبعدی بپردازیم.

الگوریتم ارائه شده در این پایان‌نامه، الگوریتم ترکیبی است، که توانسته علاوه بر کاهش زمان محاسبات، بسیاری از جواب‌هایی که با الگوریتم‌های قبلی بدست نیامده بودند را محاسبه کند. این الگوریتم، ترکیبی از سه الگوریتم «جستجوی مصمم، بازشماری ضمنی و جستجو با تقدم در عمق» می‌باشد.

این پایان نامه مشتمل بر چهار فصل می‌باشد و به ترتیب زیر تنظیم شده است.

در فصل اول تعریف مسئله کوله‌پشتی ۱ـ ۰ چندبعدی و نظریه‌ی پیچیدگی این مسئله را مطرح کرده‌ایم و به خلاصه روش‌های حل این مسئله پرداخته‌ایم.

در فصل دوم به دو الگوریتم ترکیبی استفاده شده در این پایان‌نامه، با نام‌های «بازشماری ضمنی» که الگوریتم شاخه‌وکرانه با تغییرات خاص است و «الگوریتم جستجو با تقدم در عمق» می‌پردازیم. سپس جواب‌های بدست آمده با الگوریتم بازشماری ضمنی را بر روی بعضی از نمونه مسائل مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم به جزئیات الگوریتم باقی‌مانده‌ی ترکیبی این پایان‌نامه به نام جستجوی مصمم می‌پردازیم.

در فصل چهارم به نحوه‌ی ترکیب الگوریتم‌های ارائه شده در فصل‌های دوم و سوم برای حل مسئله کوله‌پشتی ۱ـ۰ چندبعدی می‌پردازیم.

مقالات اصلی که این پایان‌نامه با کمک آن‌ها تدوین شده است، مقالات [۳]، [۵] و [۲۱] می‌باشند.

فهیمه تورانی

دانشگاه قم

شهریور ۱۳۹۰

فهرستِ مطالب

۴ الگوریتم ترکیبی برای مسئله‌ی کوله‌پشتی (۱-۰) چندبعدی

نتیجه‌گیری

الف واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

ب واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

چکیده‌ی انگلیسی

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصلِ ۱

مسئله کوله پشتی (۱ـ ۰) چندبعدی

۱-۱ مقدمه

مسئله‌ی اصلی کوله پشتی، مسئله کوهنوردی است که زیرمجموعه ای از عناصر یک لیست را برای کوله‌اش انتخاب می‌کند، بطوریکه عناصر انتخابی مفید بوده و وزن نهایی آن از یک حد معین بیشتر نباشد. مسئله‌ی کوله پشتی ۱-۰ چند بعدی، به نوعی در ارتباط با مدل های خاصی است که اولین بار به صورت مدل بودجه بندی(مسائل سرمایه گذاری) مطرح گردید و هدف این مسائل تعیین زیر مجموعه‌ی n طرحی است به‌طوریکه سود نهایی ماکزیمم شود و همه‌ی حدود منابع در آن صدق کند. از کاربردهای اقتصادی آن می توان مسائل صنعتی مانند انتخاب پروژه، الگوهای برش کنده، مسائل بارگیری و مخابرات را نام برد. اخیراً این مسئله مانند یک زیر مسئله در مدل های بزرگ برای پردازشگرهای محاسباتی اختصاصی و پایگاه داده در یک سیستم کامپیوتر توزیع تعیین می شود. بنابراین مسئله‌ی کوله‌پشتی حائز اهمیت می‌باشد.
مسائل کوله پشتی به دو دسته‌ی زیر تقسیم می شوند: دسته اول، مسائل تک محدودیتی مانند مسئله‌ی کوله پشتی دودویی (۱-۰)، کران دار، غیر کران دار، زیرمجموعه-جمعی، چند انتخابی، تغییر ساختار، دو معیاره و دسته دوم، شامل مسائل چند محدودیتی مانند مسئله‌ی کوله پشتی چند منظوره، چند بعدی، تخصیص کلی و بسته بندی می باشد.

۲-۱ تعریف

مدل ریاضی مسئله‌ی کوله پشتی چندبعدی ۱-۰ در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$P: \quad max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , \quad i \in M = \{1, \dots, m\}$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad , \quad j \in N = \{1, \dots, n\}$$

n تعداد متغیرها، m تعداد قیود، b_i گنجایش کوله i ام، c_j سود واحد کالای j ام و a_{ij} وزن کالای j متناظر کوله i ام می‌باشد. مؤلفه های x_j از x متغیر های تصمیم هستند که اگر متغیر j ام انتخاب شود، $x_j = ۱$ ودر غیر این صورت $x_j = ۰$ می باشد. معمولاً در مسائل ضرایب را به مقادیر صحیح مثبت تبدیل می کنیم، فرض نامنفی بودن ضرایب و منحصر به فرد نبودن محدودیت ها از نقطه نظر تولید کران‌های بالا، مجموعه‌ی مرتب شده‌ی خاص و محدودیت‌های تعیین محل این مسئله را از مسئله‌ی برنامه ریزی خطی ۱ـ ۰ متمایز می‌کند. این فرضیات اساسی بوده زیرا وجود محدودیت‌های خاص برای بدست آوردن روش‌های حل مسائل خطی ۱ـ ۰ در اندازه‌ی بزرگ ضروری است[۶]،[۱۴].

نظریه‌ی پیچیدگی تمایز مسئله کوله‌پشتی چندبعدی (MKP)[1] را از مسئله کوله‌پشتی KP[2] نشان می‌دهد.با وجود طرح‌های تقریب چندجمله‌ای بطور کامل برای $m = ۱$، بدست آوردن الگوریتم‌های تقریب چندجمله‌ای بطور کامل برای $m > ۱$ آن را به مسئله‌ی $NP - hard$ تبدیل می‌کند. مسئله‌ی کوله‌پشتی (۱ـ ۰) چندبعدی $(MKP۰۱)$ در اندازه‌ی بزرگ یک مسئله $NP - hard$ بوده و حالت خاصی از مسئله‌ی برنامه ریزی خطی صحیح ۱ـ ۰ می‌باشد که قویاً $NP - hard$ نیست، زیرا الگوریتم‌های تقریبی چند جمله‌ای برای حل آن‌ها وجود دارد. در حالت $m = ۱$ ، الگوریتم‌های کارایی وجود دارد، اما باافزایش m معمولاً روش‌های دقیق نمی‌توانند جواب بهینه را بدست آورند.

۱-۳ نظریه‌ی پیچیدگی

فرض کنید p یک مسئله و A الگوریتمی برای حل مسئله‌ی p باشد. پیچیدگی الگوریتم A برای حل مسئله‌ی p با$\varphi_A(p)$ نمایش داده و برابر با تعداد اعمالی است که باید در الگوریتم A برای حل مسئله‌ی p انجام شود. در عمل محاسبه‌ی دقیق $\varphi_A(p)$ لازم نیست، بلکه کافی است تابع g و ثابت c را طوری بیابیم که داشته باشیم $\varphi_A(p) \leq cg$. در این صورت می‌نویسیم: $\varphi_A(p) \equiv O(g)$ و می‌گوییم الگوریتم A از مرتبه‌ی زمانی g است.

---

[1] Multidimensional Knapsack Problem

[2] (Knapsack Problem)

اگر بتوانیم مسئله‌ای را با الگوریتم چندجمله‌ای حل کنیم، آن‌گاه الگوریتم را با پیچیدگی چندجمله‌ای و آسان و در غیر اینصورت الگوریتم با پیچیدگی نمایی و سخت می‌نامیم.
نظریه‌ی پیچیدگی متمرکز بر رابطه بین مسائل مختلف می‌باشد و به دسته مسائلی می‌پردازد که قابل مقایسه هستند. اولین کلاس از یک رده‌ی پیچیدگی کلاس P می‌باشد، این دسته از مسائل را رام شدنی گویند. این مسائل می‌توانند توسط یک الگوریتم در زمان چندجمله‌ای حل شوند. به طور خاص مسئله‌هایی هستند که برای ثابت k می‌توانند در زمان $O(n^k)$ اجرا شوند (n اندازه‌ی ورودی مسئله است).

ابتدا مفهوم تبدیل در مسائل را بیان می‌کنیم، تبدیل یکی از ابزارهای اصلی در ریاضیات است که به کمک آن می‌توان یک مسئله‌ی ناشناخته را به مسئله‌ای شناخته شده تبدیل کرد و از این طریق بررسی آن را آسانتر کرد. طرح مسئله‌ای که جواب دودویی (بله یا خیر) دارد: فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ دو مسئله‌ی مشخص باشند، گوییم مسئله‌ی $\pi_۱$ قابل تبدیل به مسئله‌ی $\pi_۲$ (در زمان چندجمله‌ای) است، هرگاه یک الگوریتم با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای وجود داشته باشد بطوریکه با مفروض بودن یک نمونه‌ی $I_۱$ از مسئله‌ی $\pi_۱$ ، خروجی آن یک نمونه‌ی $I_۲$ از مسئله‌ی $\pi_۲$ باشد، با این خاصیت که $I_۱$ یک نمونه بله‌ی مسئله‌ی $\pi_۱$ است اگروفقط‌اگر $I_۲$ یک نمونه بله‌ی مسئله‌ی $\pi_۲$ باشد.
مسئله‌ی برنامه‌ریزی صحیح ۱ـ ۰ $(zoip)$[3] را در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی شروع برای بررسی سختی مسائل این است که مسئله‌ی $(zoip)$ یک مسئله‌ی سخت است و وجود یک الگوریتم با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای برای آن بعید می‌باشد، از این رو بعید است که هر مسئله‌ای که حداقل به سختی $(zoip)$ باشد را نیز بتوان در زمان چندجمله‌ای حل کرد.
مسائلی که تاکنون الگوریتمی برای آن‌ها طراحی نشده است که بتواند آن‌ها را در زمان چندجمله‌ای حل کند را رام نشدنی گویند. کلاس NP[4] شامل مسائلی است که می‌توان هر یک از آن‌ها را در زمان چندجمله‌ای به مسئله‌ی برنامه‌ریزی صحیح $(zoip)$ تبدیل کرد. به عبارت دیگر بیشتر مسائل تصمیم دارای این خاصیت هستند که برای هر نمونه‌ی « بله » برای آن‌ها اثباتی وجود دارد که « بله » بودن جواب مسئله را ثابت می‌کند و اثبات آن می‌تواند در زمان چندجمله‌ای صورت گیرد. اما برای نمونه‌های « خیر » چنین اثباتی وجود ندارد و در عمل باید تمام حالات موجود در الگوریتم را

[3] zero - one integer problem

[4] Nondeterministic Polynomial

امتحان کرد تا با صدق نکردن آن‌ها جواب « خیر » به مسئله بدهیم (که به آن الگوریتم نامعین گوییم). می‌توان نشان داد هر مسئله در کلاس P در کلاس NP نیز هست، زیرا اگر مسئله‌ای در P باشد، آنگاه می‌توان آن را در زمان چندجمله‌ای به مسئله‌ی $(zoip)$ نیز تبدیل و حل کرد $(P \subseteq NP)$. هنوز مشخص نیست که P زیرمجموعه‌ی محض NP هست یا خیر و این احتمالاً مهمترین مسئله‌ی باز در نظریه‌ی محاسبات می‌باشد. اگر $P = NP$ باشد آنگاه$(zoip)$ و همه‌ی مسائل دیگر در NP را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد، برعکس اگر $(zoip)$ متعلق به کلاس P باشد، آن‌گاه هر مسئله در کلاس NP نیز متعلق به کلاس P خواهد بود، چون می‌توان آن را به $(zoip)$ تبدیل کرد. بنابراین $P = NP \;\Leftrightarrow\; (zoip)$ را بتوان در مدت زمان چندجمله‌ای حل کرد.

یک مسئله را $NP - hard$ (NPـسخت) گوییم هرگاه بتوان $(zoip)$ را در زمان چندجمله‌ای به آن مسئله تبدیل کرد. به عبارت دیگر اگر برای $L' {\le}_p L$ $(\{L \in \{۰,۱\}^*\})$ که لزوماً $L \in NP$ نباشد، گوییم L ، $NP - hard$ است. یک الگوریتم با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای برای یک مسئله‌ی $NP - hard$ به یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای $(zoip)$ که وجود آن بعید است، منجر می‌شود. به این دلیل $NP - hard$ بودن یک مسئله دلیل محکمی بر حل‌ناپذیری با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای می‌باشد.

تعریف بعدی به مسائلی اشاره دارد که دقیقاً به سختی $(zoip)$ می‌باشند، یک مسئله‌ی π را NPـکامل می‌نامیم هرگاه متعلق به NP بوده و $NP - hard$ باشد، یعنی هرگاه بتوان مسئله‌ی π را به$(zoip)$ و $(zoip)$ را به π تبدیل کرد. مسائل NP ـکامل را می‌توان به عنوان سخت‌ترین مسائل در NP در نظر گفت. از این تعریف می‌توان نتیجه گرفت مجموعه مسائل NP ـکامل هم ارز هستند. یک الگوریتم با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای برای یک مسئله‌ی NP ـکامل را می‌توان به یک الگوریتم با مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای برای همه‌ی مسائل NP ـکامل و همچنین همه‌ی مسائل NP تبدیل کرد. یک مسئله قویاً $NP - hard$ از دسته مسائلی است که نتایج پیچیدگی به طور قطعی سختی این مسائل را تشخیص داده است و به طور تجربی منابع محاسباتی، حل این نوع مسائل را با رشد نمایی پیش‌بینی کرده است و الگوریتم‌های شبه‌ـچندجمله‌ای[5] برای آن‌ها وجود ندارد. در بخش قبل بیان کردیم که $(MKP۰۱)$ مسئله‌ی قویاً $NP - hard$ نیست، این بدین معناست که مسئله را می‌توان با الگوریتم‌های شبه‌ـچندجمله‌ای با هر تقریب دلخواهی حل کنیم.

---

[5] الگوریتمی که زمان پیچیدگی آن با چندجمله‌ای n و c کران‌دار است .