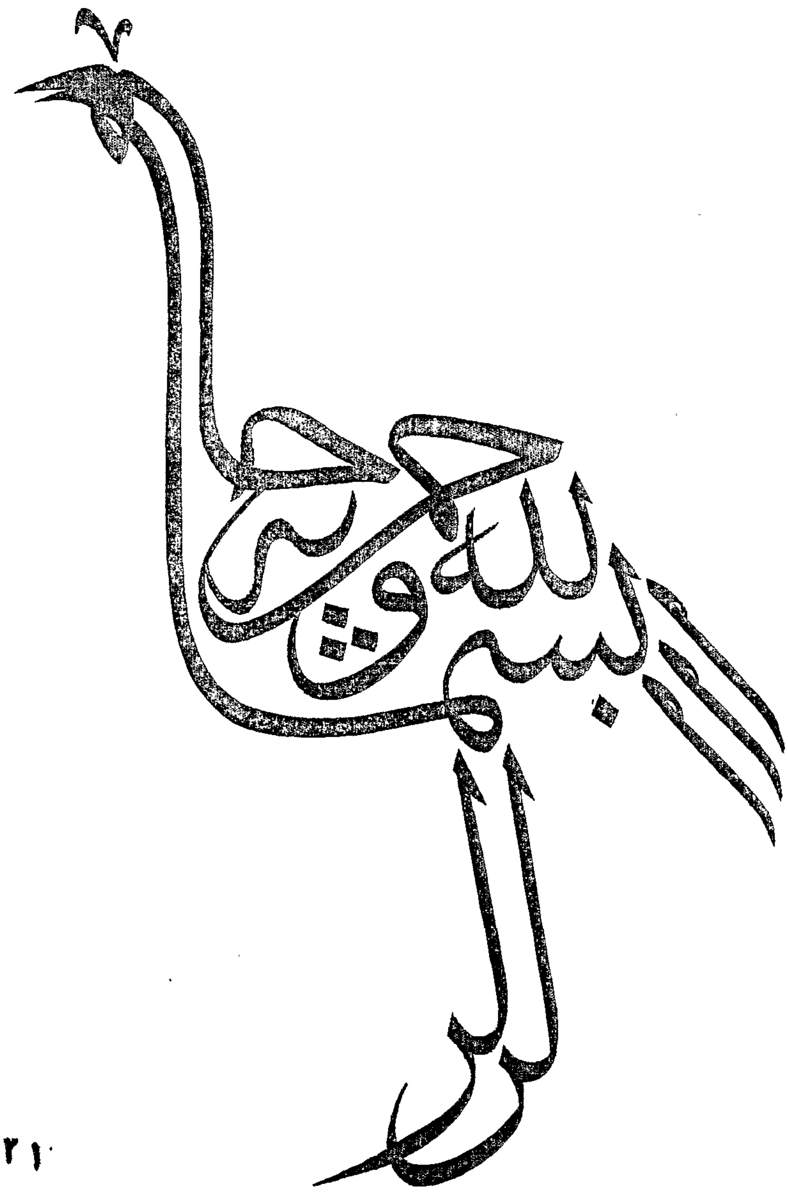

۱۳۸۷/۲/۲۱

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد ریاضی محض

یونینرم های لاتیس مقداری و عملگرهای استلزام وابسته به آنها

استاد راهنما :

دکتر ماشااله ماشین چی

مؤلف :

حسین تقی خانی

تیر ماه ۱۳۸۵

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : حسین تقی خانی

استاد راهنما : دکتر ماشاالله ماشین چی

داور ۱ : دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۲ : دکتر سینا هدایت

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکتر رضا نکوئی

تقدیم به :

پدر و مادر عزیزم

و برادران فداکار و خواهران مهربانم

تشکر و قدردانی

" ن و القلم "

به نام آنکه به قلم سوگند یاد کرد، سپاس خدا را که به ما توان کسب علم ودانش عطا فرمود و به حق هرچه داریم و هرچه هستیم از حضرت اوست.پیش از هر چیز بر خود لازم می دانم به روان پاک مهندس علیرضا افضلی پور انسانی والا و ارجمند- بنیانگذار دانشگاه شهید باهنر کرمان- درود وسلام بفرستم و برای روح آن بزرگوار طلب شادی و مغفرت بنمایم و نیز به مصداق "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" از زحمات بی دریغ اساتید ارجمندی که در طی این دوره آموزشی از محضر مبارکشان بهره فراوان برده ام، بالاخص جناب آقای دکترماشاالله ماشین چی که با سعه صدر پاسخگوی سئوالات این حقیر بوده اند و راهنمایی های مفید و بجای این بزرگوار مشوق اینجانب بوده است، تشکر و قدردانی نمایم و از درگاه حضرت حق برای این بزرگوار سلامتی و طول عمر با عزت را خواهانم. به امید اینکه در راه اعتلای میهن عزیزمان،**ایران**،گام برداریم و شاهد درخشش روز افزون **ایران** سرافرازمان در عرصه های علمی باشیم.

حسین تقی خانی

تیر ماه ۸۵

چکیده

این نوشتار مشتمل بر سه فصل می باشد در فصل اول به معرفی t- نرم ها و t- کونرم ها و u- نرم ها وهمچنین تعاریف و قضایای استنتاجگرهای وابسته به u- نرم ها می پردازیم و در واقع این فصل پایه واساس فصول بعدی می باشد .

در فصل دوم t- نرم ها و t- کونرم ها و u- نرم ها و u- نرم های قابل نمایش را رویمجموعه جدیدی که با L^* معرفی میکنیم ،تعریف کرده و پاره ای ازخواص u- نرم ها را روی آن به دست می آوریم. در این فصل ثابت می کنیم که مجموعه L^* با رابطه ای که روی آن تعریف شده است ،یک مشبکه کامل است .

در فصل سوم استنتاجگرها را روی L^* تعریف می کنیم که آن را با L^*e- استنتاجگر نشان می دهیم و خواص آن را بررسی می کنیم .

لازم به ذکر است که برهانها و یا مثالهایی که با علامت * مشخص شده اند ،از نگارنده است. در ضمن علت مطالعه u- نرم ها کاربرد وسیعی است که در مسایل کاربردی دارند، در واقع درک عمیقی از ساختار u- نرم ها در جهت بکارگیری آنها در مسایل کاربردی ما را ناگزیر به مطالعه آنها کرده است .به امید اینکه راه برای کسانی که تمایل به مطالعه کاربردهای u- نرم ها دارند هموار شده باشد.

فهرست:

موضوع | صفحه

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ مجموعه های مرتب و مشبکه

تعریف ۱-۱-۱ [19] فرض کنیم U مجموعه ای د لخواه باشد. هرزیر مجموعه از حاصلضرب دکارتی $U \times U$ را یک *رابطه می نامند که آنرا با* R نمایش می دهند.

نماد گذاریهای مختلفی برای نمایش یک رابطه برروی یک مجموعه وجود دارد . به عنوان مثال اگر R یک رابطه بر U باشد $(x,y) \in R$ را با نماد xRy نمایش می دهند . با این نمادگذاری $\subseteq$ یک رابطه بر $P(U)$ می باشد و $A \subseteq B$ به این معنی بکار برده می شود که : $\subseteq \in .(A,B)$

تعریف ۲-۱-۱ [19] فرض کنیم $\leq$ یک رابطه بر مجموعه U باشد دراین صورت گوئیم $\leq$ یک رابطه ترتیبی جزئی است هرگاه :

(۱) (خاصیت انعکاسی) $\forall\, x \in U \;\; x \leq x$

(۲) (خاصیت تعدی) $\forall\, x,y,z \in U\; (x \leq y \;\&\; y \leq z \;\Rightarrow\; x \leq z)$

(۳) (خاصیت پادمتقارن) $\forall\, x,y \in U \quad (x \leq y \;\&\; y \leq x \;\Rightarrow\; x = y)$

تعریف ۳-۱-۱ [19] فرض کنیم U یک مجموعه و $\leq$ یک رابطه ترتیبی جزئی بر U باشد در اینصورت ، $(U,\leq)$ را یک مجموعه جزئاً مرتب می نامیم .

تعریف ٤-۱-۱ [5] فرض کنید $(U,\leq)$ مجموعه جزئاً مرتب باشد و $A \subseteq U$.

(i) عنصر $s \in U$ را یک کران بالا برای A گوییم هرگاه :

$$t \leq s \quad \forall t \in A$$

(ii) عنصر $s \in U$ را یک کران پائین برای A گوییم هرگاه :

$$s \leq t \;\; \forall t \in A$$

تعریف ۵-۱-۱ [5] فرض کنید $(U,\leq)$ مجموعه جزئاً مرتب باشد و $A\subseteq U$.

(i) $s\in U$ را کوچکترین کران بالای A می نامیم هرگاه :

(۱) s یک کران بالای A باشد.

(۲) بازاء هر کران بالای دیگر A مانند t داشته باشیم : $s\leq t$.

(ii) $s\in U$ را بزرگترین کران پایین A می نامیم هرگاه :

(۱) s یک کران پایین A باشد.

(۲) بازاء هر کران پایین دیگر A مانند t داشته باشیم : $t\leq s$.

کوچکترین (بزرگترین) کران بالای (پایین) A را با نماد $\vee A$ یا $SupA$ ($\wedge A$ یا $InfA$) نمایش می دهند. اگر $A=\{x,y\}$ در اینصورت $\vee\{x,y\}$ $(\wedge\{x,y\})$را با نماد $x\vee y$ $(x\wedge y)$ نمایش می دهند.

تعریف ۶-۱-۱ [5] مجموعه جزئاً مرتب ، $(U,\leq)$ را یک زنجیر می نامیم هرگاه:

$$\forall x,y\in U \qquad (x\leq y \text{ یا } y\leq x)$$

مثال ۷-۱-۱ هر زیر مجموعه U از اعداد حقیقی تحت رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی یک زنجیر می باشد، بویژه بازه بسته $[0,1]$ یک زنجیر است.

تذکر: فرض کنید U یک زنجیر باشد و $x,y\in U$ آنگاه $x\vee y$ $(x\wedge y)$ موجود می باشد و برابر یکی از دو عنصر x یا y است.

تعریف ۸-۱-۱ [5] مجموعه جزئاً مرتب $(U,\leq)$ را یک مشبکه می نامیم هرگاه هر دو عنصر آن دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین در U باشد.

تعریف۹-۱-۱ [5] مشبکه $(U,\leq)$ را کامل می نامیم هرگاه هر زیر مجموعه آن دارای سوپریمم و اینفیمم باشد.

مثال۱۰-۱-۱ [19] بازه بسته $[\circ,\text{۱}]$ و رابطه $\leq$ معمولی بر اعداد حقیقی را در نظر بگیرید آنگاه $([\circ,\text{۱}],\leq)$ یک مشبکه کامل است.

۱-۲ t- نرم ها و t -کو نرم ها

تعریف۱-۲-۱ [19] عمل دوتایی $T\ :\ [\circ,\text{۱}]\times[\circ,\text{۱}]\longrightarrow[\circ,\text{۱}]$ را یک t- نرم می نامیم هرگاه در خواص زیر صدق کند:

$$\forall \quad x\in[\circ,\text{۱}] \quad T(\text{۱},x)=x \qquad (\text{۱})$$

$$\forall \quad x,y\in[\circ,\text{۱}] \quad T(x,y)=T(y,x) \qquad (\text{۲})$$

$$\forall \quad x,y,z\in[\circ,\text{۱}] \qquad T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z) \qquad (\text{۳})$$

$$\forall\ x,y,z,w\in[\circ,\text{۱}] \quad (w\leq x\ \&\ y\leq z) \ \Rightarrow\ T(w,y)\leq T(x,z) \qquad (\text{۴})$$

اگر بجای خاصیت (۱) داشته باشیم $T(\circ,x)=x$ در اینصورت T را یک t- کونرم می نامیم.

تذکر: اگر T یک t- نرم باشد بدیهی است که $T(\circ,x)=\circ$.

مثال۲-۲-۱ [19] پنج عمل دوتایی $T_\circ,T_\text{۱},T_\text{۲},S_\text{۱},S_\text{۲}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم ، به سهولت دیده می شود که $T_\circ,T_\text{۱},T_\text{۲}$، t- نرم و $S_\text{۱},S_\text{۲}$ ، t-کو نرم هستند.

$$(۱)\quad T_{\circ}(x,y)=\begin{cases} x\wedge y & \text{اگر } x\vee y=۱ \\ \circ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$(۲)\quad T_{۱}(x,y)=\circ\vee(x+y-۱)$$

$$(۳)\quad T_{۲}(x,y)=x\wedge y=Min\{x,y\}$$

$$(۴)\quad S_{۱}(x,y)=x\vee y=Max\{x,y\}$$

$$(۵)\quad S_{۲}(x,y)=\begin{cases} x\vee y & \text{اگر } x\wedge y=\circ \\ ۱ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

گزاره۳-۲-۱ [19] اگر T یک t-نرم باشد در اینصورت :

$$\left(T_{\circ}(x,y)\le T(x,y)\le T_{۲}(x,y)\right)\quad \forall\ x,y\in[\circ,۱]$$

تعریف ٤-۲-۱ [21] یک u-نرم R نگاشتی به صورت $R:[\circ,۱]\times[\circ,۱]\longrightarrow[\circ,۱]$ می باشد بطوریکه $\forall\ a,b,c\in[\circ,۱]$ در خواص زیر صدق کند:

(i) (خاصیت جابجایی) $R(a,b)=R(b,a)$

(ii) (خاصیت یکنوایی) $a\ge c\ \&\ b\ge d\Rightarrow R(a,b)\ge R(c,d)$

(iii) (خاصیت شرکتپذیری) $R(a,R(b,c))=R(R(a,b),c)$

(iv) (خاصیت همانی) عنصری مانند $e \in [0,1]$ که عنصر همانی نامیده می شود موجود باشد بطوریکه بازاء هر $a \in [0,1]$ داشته باشیم: $R(a,e)=a$.

همانطور که ملاحظه می کنیم u - نرم ها در سه خاصیت نخست با t - نرم ها و t -کونرم ها مشترکند، اما u - نرم ها نسبت به خاصیت (iv) در مقایسه با t - نرم ها و t -کونرم ها حق انتخاب بیشتری دارند.

با توجه به تعریف بالا ملاحظه می شود که t - نرم ها و t -کونرم ها حالات خاصی از u - نرم ها هستند با $e=1$ و $e=0$

. از این به بعد فرض می کنیم که: $e \in (0,1)$.

قضیه ۵-۲-۱ [21] فرض کنیم R یک u - نرم با عنصر همانی e باشد،دراینصورت $\hat{R}$ تعریف شده به صورت زیر، یک u - نرم با عنصر همانی $\bar{e}=1-e$ می باشد.

$$\hat{R}(a,b)=1-R(\bar{a},\bar{b})$$

که در رابطه فوق $\bar{a}=1-a$. $\hat{R}$ را دوگان R می نامیم.

لم۶-۲-۱[21] فرض کنیم R یک u - نرم با عنصر همانی e باشد در این صورت:

$$(1) \quad \forall a,b \text{ و } b>e \quad R(a,b)\geq a$$

$$(2) \quad \forall a,b \text{ و } b<e \quad R(a,b)\leq a$$

قضیه۷-۲-۱ [21] فرض کنید R یک u - نرم با عنصر همانی e باشد در این صورت:

$$(i) \quad \forall a\leq e \quad R(a,0)=0$$

$$(ii) \quad \forall a\geq e \quad R(a,1)=1$$

تعریف۸-۲-۱[11] فرض کنید U یک u-نرم با عنصر همانی $e\in(0,1)$ باشد. دو تابع T_U و S_U را بر $[0,1]^2$ به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$T_U(x,y)=\frac{U(ex,ey)}{e} \qquad x,y\in[0,1]$$

$$S_U(x,y)=\frac{U(e+(1-e)x,e+(1-e)y)-e}{1-e} \qquad x,y\in[0,1]$$

لم۹-۲-۱[11] بازاء هر u-نرم U با عنصر همانی e ، T_U تعریف شده توسط رابطه بالا یک t-نرم و S_U تعریف شده توسط رابطه (۲ . ۵) یک t-کونرم می باشد.

لم۱۰-۲-۱ [11] فرض کنیم U یک u -نرم با عنصر همانی e باشد و $x\le e\le y$ یا $x\ge e\ge y$ در اینصورت:

$$Min(x,y)\le U(x,y)\le Max(x,y)$$

لم۱۱-۲-۱ [11] بازای هر u-نرم U با عنصر همانی $e\in(0,1)$ خواهیم داشت:

$$\underline{U}_e(x,y)\le U(x,y)\le \overline{U}_e(x,y) \qquad \forall(x,y)\in[0,1]^2$$

۱-۳ دسته های دمورگان

تعریف۱-۳-۱ [11] تابع پیوسته و اکیدا نزولی $N:[0,1]\to[0,1]$ را نقیض قوی می نامیم هرگاه:

$$N(N(x))=x \qquad \forall x\in[0,1]$$

در غیر این صورت آن را نقیض اکید می نامیم.

مثال ۲-۳-۱

(الف) تابع $N:[0,1]\to[0,1]$ با ضابطه $N(x)=1-x$ یک نقیض قوی است.

(ب) $N:[0,1]\to[0,1]$ با ضابطه $N(x)=1-x^2$ یک نقیض اکید است.

تعریف ۳-۳-۱[11] فرض کنیم U_1 و U_2 دو u-نرم و N یک نقیض قوی باشد، سه تایی (U_1,U_2,N) را سه تایی دمورگان می نامیم هرگاه:

$$N(U_1(x,y))=U_2(N(x),N(y)) \qquad \forall x,y\in[0,1]$$

تعریف ٤-۳-۱ [11] فرض کنیم U_1 و U_2 دو u-نرم و N یک نقیض اکیدباشد،سه تایی (U_1,U_2,N) را سه تایی شبه دمورگان می نامیم هرگاه:

$$N(U_1(x,y))=U_2(N(x),N(y)) \qquad \forall x,y\in[0,1]$$

لم ٥-۳-۱ [11] فرض کنید، U_1 و U_2، u-نرم هایی با عنصر همانی به ترتیب e_1 و e_2 باشند، N را نقیض قوی در نظر بگیریدو فرض کنید T_i و S_i $(i=1,2)$ به ترتیب t-نرم ها و t-کونرم های وابسته به U_1 و U_2 باشند، اگر (U_1,U_2,N) سه تایی دمورگان باشد در این صورت:

(i) $U_2(0,1)=N(U_1(0,1))$ و $e_2=N(e_1)$

(ii) نقیض های اکید n_1 و n_2 وجود دارند بطوریکه سه تایی های (T_1,S_2,n_2) و (T_2,S_1,n_1) سه تایی های شبه دمورگان می باشند و بعلاوه اگر $e_1\le e_2$ در این صورت:

$$n_2(x)=\frac{1-e_1}{1-e_2}n_1\left(\frac{e_1}{e_2}x\right)+\frac{e_1-e_2}{1-e_2} \qquad \forall x\in[0,1]$$

در حالتی که $e_2\le e_1$، تساوی مشابه با اندیس های متناظر برقرار است.

۴-۱ u - نرم های قابل نمایش

تعریف ۱-۴-۱ [11] فرض کنیم U یک u - نرم با عنصر همانی e باشد ، U را قابل نمایش می نامیم هرگاه تابع پیوسته و اکیدا صعودی $h:[0,1] \to \overline{R}$ $\left(\overline{R} = R \cup \{-\infty, \infty\}\right)$ موجود باشد بطوریکه $h(e)=0$ و $h(0)=-\infty$ و $h(1)=\infty$ و بعلاوه:

$$U(x,y)=h^{-1}\left(h(x)+h(y)\right) \qquad \forall (x,y)\in[0,1]^2 \setminus \{(0,1),(1,0)\}$$

h را مولد جمعی u - نرم U می نامیم.

مثال۲-۴-۱[11] فرض کنیم $c>0$ در اینصورت

$$h_c(x)=\log\left(-\frac{1}{c}\log(1-x)\right) \qquad x\in(0,1)$$

مولد جمعی u - نرم ، U_c تعریف شده به صورت زیر می باشد که $e=1-\exp(-c)$ عنصر همانی ، U_c است:

$$U_c(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } (x,y)\in\{(0,1),(1,0)\} \\ 1-\exp\left(-\frac{1}{c}\log(1-x).\log(1-y)\right) & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ملاحظه می کنیم که:

$$h_c(e)=0 \text{ و } h_c(0)=\lim_{x\to 0}h_c(x)=-\infty \text{ و } h_c(1)=\lim_{x\to 1}h_c(x)=\infty$$

بعلاوه:

$$U(x,y)=h^{-1}\left(h(x)+h(y)\right) \qquad \forall (x,y)\in[0,1]^2 \setminus \left\{(0,1),(1,0)\right\}$$

که در آن $h_c^{-1}(x)=1-\exp(-c\exp(x))$.

لم ۳-٤-۱ [11] فرض کنیم U یک u-نرم قابل نمایش با عنصر همانی e و مولد جمعی h باشد در این صورت $N_U:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ با ضابطه $N_U(x)=h^{-1}(-h(x))$ نقیض قوی با نقطه ثابت e می باشد.

لم ٤-٤-۱ [11] فرض کنیم U یک u-نرم قابل نمایش با عنصر همانی e و مولد جمعی h باشد در این صورت:

(i) $U(x,y)=N_U\left(U\left(N_U(x),N_U(y)\right)\right) \quad \forall (x,y)\in[0,1]^2\setminus\left\{(0,1),(1,0)\right\}$

(ii) $U\left(x,N_U(x)\right)=e \qquad \forall x\in(0,1)$

(iii)

(۱) $U(x,x)<e \qquad \forall x\in(0,e)$

(۲) $U(x,x)>e \qquad \forall x\in(e,1)$

۵-۱ نیمگروه e - استنتاجگر ها

تعریف ۱-۵-۱ [25] فرض کنیم e عددی حقیقی در بازه $(0,1]$ باشد $I_e:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,1]$ را یک e-استنتاجگر می نامیم هرگاه در خواص زیر صدق کند:

(i) $I_e(0,0)=I_e(1,1)=e$

(ii) $I_e(x,x)=e \qquad \forall x\in(0,1)$

$$\forall x \in (0,1) \qquad I_e(e,x)=x \qquad \text{(iii)}$$

(iv)

(۱) برای هر t ، x_1 و x_2 در $[0,1]$ اگر $x_1 \leq x_2$ آنگاه

$I_e(x_1,t) \geq I_e(x_2,t)$.

(۲) برای هر t ، y_1 و y_2 در $[0,1]$ اگر $y_1 \leq y_2$ آنگاه

$I_e(t,y_1) \leq I_e(t,y_2)$.

مثال ۲-۵-۱

(الف) فرض کنیم e عددی حقیقی در بازه $(0,1]$ باشد، $I_e:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ با ضابطه

$$I_e(x,y)=\begin{cases} Min\{Max\{e-x+y,0\},1\} & (x,y)\in(0,1]\times[0,1) \\ 1 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

یک e- استنتاجگر می باشد.

لم ۳-۵-۱ [25] فرض کنیم e یک عدد حقیقی در بازه $(0,1]$ و I_e یک e- استنتاجگر باشد، در این صورت:

$$\forall y \in [0,1] \qquad I_e(0,y)=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\forall y \in [0,1] \qquad I_e(x,1)=1 \qquad \text{(ii)}$$

$$I_e(1,0)=0 \qquad \text{(iii)}$$

تعریف ۴-۵-۱ [25] فرض کنیم e عددی حقیقی در بازه $[0,1)$ باشد $I_e : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$، را یک شبه e - استنتاجگر می نامیم هرگاه در خواص (i) ، (ii) و (iii) تعریف ۱-۵-۱ صدق کند . و بعلاوه داشته باشیم :

(iv)

(۱) برای هر x_1 و x_2 در $[0,1]$ و t در $(0,1)$ اگر $x_1 \leq x_2$ آنگاه

$$I_e(x_1,t) \geq I_e(x_2,t).$$

(۲) برای هر y_1 و y_2 در $[0,1]$ و t در $(0,1)$ اگر $y_1 \leq y_2$ آنگاه

$$I_e(t,y_1) \leq I_e(t,y_2).$$

مثال ۵-۵-۱ فرض کنیم e عددی حقیقی در بازه $[0,1)$ باشد ، $I_e : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$ با ضابطه

$$I_e(x,y) = \begin{cases} Min\{Max\{e-x+y,0\},1\} & (x,y) \in [0,1]^2 \setminus \{(0,0),(1,1)\} \\ 1 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

یک شبه eاستنتاجگر می باشد . -

مثال۶-۵-۱ فرض کنیم U یک u - نرم قابل نمایش با عنصر همانی $e \in (0,1)$ باشد، $I_e : [0,1]\times[0,1] \longrightarrow [0,1]$ با ضابطه

$$I_e(x,y)=\begin{cases} U(N_U(x),y) & (x,y)\in[۰,۱]^۲ \setminus \{(۰,۰),(۱,۱)\} \\ ۱ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

یک شبه eاستنتاجگر می باشد . -

قرارداد : فرض کنیم e یک عدد حقیقی در بازه $(۰,۱]$ باشد، مجموعه همه e- استنتاجگرها را با نماد Ie و مجموعه همه شبه e- استنتاجگرها را با نماد Ple نمایش می دهیم.

لم۷-۵-۱ [25] فرض کنیم I_e و J_e، e- استنتاجگرهای (شبه e - استنتاجگرهای) متناظر با $e\in(۰,۱]$ باشند ، در این صورت Ie (Ple) تحت اعمال زیر بسته است :

(الف) $I_e \wedge J_e : [۰,۱]^۲ \rightarrow [۰,۱]$ با ضابطه

$(x,y)=Min\{I_e(x,y),J_e(x,y)\}$ که $(I_e \wedge J_e)$ یک

e - استنتاجگر (شبه e - استنتاجگر) می باشد .

(ب) $I_e \vee J_e : [۰,۱]^۲ \rightarrow [۰,۱]$ با ضابطه

$(x,y)=Max\{I_e(x,y),J_e(x,y)\}$ که $(I_e \vee J_e)$ یک

e- استنتاجگر(شبه e - استنتاجگر) می باشد .

لم ۸-۵-۱ [25] اعمال ∧ و ∨ شرکت پذیراند .