بسمه تعالی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تعداد سیکل‌های حدی در معادلات کلاسیک لیینارد

سخنران: هادی حاجی‌لری

زمان: چهارشنبه ۹۲/ ۶/ ۲۷ ساعت ۱۳ : ۳۰

مکان: سالن خوارزمی دانشکده علوم ریاضی

هیئت داوران

۱– دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۲– دکتر رسول عاشقی

۳– دکتر مجید گازر

۴– دکتر رضا مزروعی

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم تعداد سیکل‌های حدی معادلات کلاسیک لیینارد را بدست آوریم.
معادلات کلاسیک لیینارد معادلاتی به شکل زیر هستند

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

که در آن $F(x)$ یک چندجمله‌ای است. درجه معادلات کلاسیک لیینارد، درجه چندجمله‌ای $F(x)$ است.
در سال ۱۹۷۶ میلادی لینز، دملو و پو حدس زدند که تعداد سیکل‌های حدی معادلات کلاسیک لیینارد از درجه n برابر با $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ (بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{n-1}{2}$) است و حدس خود برای $n = 3$ را ثابت کردند. در این پایان نامه ابتدا وجود ۴ سیکل حدی هذلولوی در معادلات لیینارد از مرتبه ۶ را اثبات می‌کنیم. روش اثبات مبتنی بر نظریه اختلال تکین هندسی یا همان معادلات کند تند است. در ادامه این اثبات را توسیع داده و نشان می‌دهیم که معادلات کلاسیک لیینارد از درجه $n \geq 6$ می‌توانند $\left[\frac{n-1}{2}\right] + 2$ سیکل حدی داشته باشند، که این اثبات نشان می‌دهد حدس ارائه شده توسط لینز و همکارانش درمورد $n \geq 6$ نادرست است.
در فصل پایانی این پایان نامه نشان می‌دهیم که معادلات کلاسیک لیینارد از درجه ۴ حداکثر یک سیکل حدی دارد که این سیکل حدی در صورت وجود یکتاست. با این اثبات حدس لینز و همکارانش درمورد تعداد سیکل‌های حدی برای $n = 4$ اثبات می‌شود.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سیکل‌های حدی در معادلات کلاسیک لیینارد

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

هادی حاجی‌لری

استاد راهنما

دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی آقای هادی حاجی‌لری
تحت عنوان

تعداد سیکل‌های حدی در معادلات کلاسیک لیینارد

در تاریخ ۲۷ /۶ /۹۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تأیید نهایی قرار گرفت.

۱– استاد راهنما　　دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

۲– استاد مشاور　　دکتر رسول عاشقی

۳– استاد داور۱　　دکتر مجید گازر

۴– استاد داور۲　　دکتر رضا مزروعی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه

حمد و سپاس خدایی راست که به نور رحمت، بندگانش را از ظلمات نادانی رهایی بخشید و نور علم را در قلب هر یک از بندگانش که خواست، قرار داد. بر خود لازم می‌دانم که از زحمات استاد راهنمای گرامی جناب دکتر ظهوری زنگنه که در طول انجام پروژه از راهنمایی‌های ایشان بهره‌مند بودم و از اخلاق نیکوی ایشان درس می گرفتم، تشکر نمایم. بعلاوه از زحمات جناب دکتر عاشقی که با مشاوره‌های راهگشای ایشان انجام پروژه هموارتر گردید قدردانی می‌نمایم.

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم تعداد سیکل‌های حدی معادلات کلاسیک لیینارد را بدست آوریم. معادلات کلاسیک لیینارد معادلاتی به شکل زیر هستند

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x, \end{cases}$$

که در آن $F(x)$ یک چندجمله‌ای است. درجه معادلات کلاسیک لیینارد، درجه چندجمله‌ای $F(x)$ است.

در سال ۱۹۷۶ میلادی لینز، دملو و پو حدس زدند که تعداد سیکل‌های حدی معادلات کلاسیک لیینارد از درجه n برابر با $[\frac{n-۱}{۲}]$ (بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی $\frac{n-۱}{۲}$) است و حدس خود برای $n = ۳$ را ثابت کردند. در این پایان نامه ابتدا وجود ۴ سیکل حدی هذلولوی در معادلات لیینارد از مرتبه ۶ را اثبات می‌کنیم. روش اثبات مبتنی بر نظریه اختلال تکین هندسی یا همان معادلات کند تند است. در ادامه این اثبات را توسیع داده و نشان می‌دهیم که معادلات کلاسیک لیینارد از درجه $n \geq ۶$ می‌توانند $[\frac{n-۱}{۲}] + ۲$ سیکل حدی داشته باشند، که این اثبات نشان می‌دهد حدس ارائه شده توسط لینز و همکارانش درمورد $n \geq ۶$ نادرست است.

در فصل پایانی این پایان نامه نشان می‌دهیم که معادلات کلاسیک لیینارد از درجه ۴ حداکثر یک سیکل حدی دارد که این سیکل حدی در صورت وجود یکتاست. با این اثبات حدس لینز و همکارانش درمورد تعداد سیکل‌های حدی برای $n = ۴$ اثبات می‌شود.

فصل ۱

مقدمه

مسئله پیدا کردن تعداد و موقعیت مکانی سیکل‌های حدی برای میدان‌های برداری چندجمله‌ای در صفحه به مسئله شانزدهم هیلبرت برمی گردد که در سال ۱۹۰۰ میلادی توسط هیلبرت مطرح شد که یکی از مهمترین مسائل باز در نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل در صفحه است. هدف اصلی در این مسئله تعیین ماکزیمم تعداد سیکل‌های حدی برای یک دستگاه چند جمله‌ای از مرتبه n برحسب درجه چندجمله ای است. این مسئله با گذشت بیش از یک قرن علی رغم تحقیقات فراوان و بررسی انواع مختلف از دستگاه‌های خاص و چاپ صدها مقاله پیرامون آن هنوز حتی برای $n = ۲$ باز است. به همین دلیل، اسمیل [۱] در دو سخنرانی تحت عنوان "مسائل بزرگ، کوشش هایی که با شکست روبرو شد" و "مسائل ریاضی قرن آینده " مجموعه مسائلی را برای قرن ۲۱ ارائه داد و در آن چندین صورت ساده و محدود شده از این مسئله که توسط محققین مختلف طرح شده بود را مطرح کرد که در میان آنها می توان به مسئله مماسی هیلبرت، مساله هیلبرت-آرنولد، معادلات لیینارد و آبل اشاره کرد.

مسئله شانزدهم هیلبرت برای معادلات لیینارد یا مساله هیلبرت-اسمیل به پیدا کردن تعداد سیکل‌های حدی برای این نوع از معادلات کاهش می‌یابد.

در این پایان نامه به بررسی حالت خاصی از مساله معروف هیلبرت-اسمیل مبتنی بر دو مقاله [۵] و [۲] می‌پردازیم.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را درنظر بگیرید که اولین بار توسط یک فیزیک‌دان فرانسوی به نام لیینارد [۲] در سال ۱۹۲۸ میلادی مطرح شد:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = ۰$$

به این دلیل این معادله به معادله لیینارد معروف است.

---

[۱] Smale [۲] Lineard

این معادله را می توان به شکل دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x - f(x)y, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

و یا

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \tag{۲.۱}$$

بازنویسی کرد که در آن

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(s)\mathrm{d}s$$

دستگاه معادلات (۱.۱) و (۲.۱) به طور تحلیلی مزدوج هستند و هر دو معادلات کلاسیک لیینارد نامیده می شوند. درجه معادله لیینارد بوسیله درجه $F(x)$ داده می شود. تعداد سیکلهای حدی معادلات لیینارد می توانند در هر دو فرم (۱.۱) و (۲.۱) مطالعه شوند.

در سال ۱۹۷۶ میلادی لینز [1]، دملو [2] و پو [3] حدس زیر را ارائه کردند :

حدس ۱.۰.۱ کران بالای تعداد سیکل‌های حدی معادلات لیینارد از درجه n برابر با $[\frac{n-1}{2}]$ (بزرگ‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{n-1}{2}$) است.

درک منطقی بودن این حدس، زیاد سخت نبود. درواقع با یک تغییر متغیر آفین شامل تغییر جهت زمان در حالت $n = 2l$ می توان چندجمله‌ای $F(x)$ در دستگاه (۲.۱) را به صورت

$$F(x) = x^{2l} + \sum_{i=1}^{2l-1} a_i x^i \tag{۳.۱}$$

و در حالت $n = 2l + 1$ به صورت

$$F(x) = x^{2l+1} + \sum_{i=1}^{2l} a_i x^i \tag{۴.۱}$$

نوشت. هرگاه همه a_i ها با اندیس فرد صفر باشند، دستگاه (۲.۱) با F تعریف شده در (۳.۱) نمایش دهنده یک مرکز است، چون با تبدیل $(x, t) \longrightarrow (-x, -t)$ سیستم عوض نمی‌شود یعنی دارای تقارن است و برگشت پذیر است. فرض کنید این a_i ها را به صورت $(a_1, a_3, \cdots a_{2l-1})$ بنویسیم. همان طور که در بخش ۵.۲ در فصل بعد در

[1] A.Lins [2] W.de Melo [3] C.pugh

مورد میدان‌های برداری دوران یافته توضیح داده خواهد شد، دیده می‌شود که تعداد l پارامتر به این شکل وجود دارند که "پارامترهای چرخشی" نامیده می شوند، به این مفهوم که اگر تنها یکی از آنها در عبارت (۳.۱)، مثلا a_{2j-1} تغییر کند آنگاه دترمینان

$$\begin{vmatrix} y-(x^{2l}+\sum_{i=1}^{2l-1}a_ix^i+\tilde{a}_{2j-1}x^{2j-1}) & y-(x^{2l}+\sum_{i=1}^{2l-1}a_ix^i) \\ -x & -x \end{vmatrix}$$

به صورت $(\tilde{a}_{2j-1}-a_{2j-1})x^{2j}$ داده می شود که همه جا به جز در $x=0$ هم علامت با $\tilde{a}_{2j-1}-a_{2j-1}$ است. هرگاه تنها یکی از این پارامترها موجود باشد آنگاه به سادگی مشاهده می شود که سیستم (۲.۱) دارای سیکل حدی نیست. می توان انتظار داشت که تحت تاثیر تمام پارامترهای $(a_1, a_3, \cdots a_{2l-1})$، حداکثر $l-1$ سیکل حدی ایجاد شود. حتی بعضی افراد در نوشته‌های خود ادعا کردند که این حدس را بر مبنای خواص چرخشی این پارامترها اثبات کرده اند. به هر حال استفاده از این راهبرد حداقل برای $n=2l$ منطقی به نظر می آید.

در [۱۱]، وجود معادلات کلاسیک لینارد از درجه ۷ با حداقل ۴ سیکل حدی اثبات شد که این مطلب به راحتی وجود معادلات کلاسیک لینارد از درجه $n \geq 7$، با تعداد $[\frac{n-1}{2}]+1$ سیکل حدی را ایجاب می کند. مثال نقضی که آنها ارائه دادند سیستمی به شکل

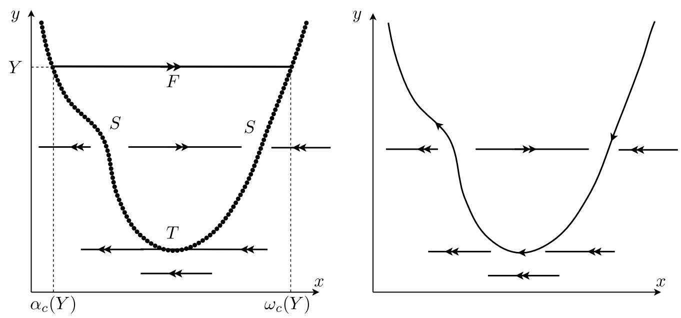
$$\begin{cases} \dot{x}=y-(x^7+\sum_{i=2}^{6}c_ix_i), \\ \dot{y}=\varepsilon(b-x), \end{cases} \tag{۵.۱}$$

برای $\varepsilon>0$ کوچک است که با تغییر مختصات آفین نسبت به (x,y,t)، اما برای $a=(a_1,\cdots a_{2l})$ با مقادیر بزرگ $\|a\|$ می تواند به صورت سیستم (۲.۱) با F داده شده در (۴.۱) نوشته شود. سیستم (۵.۱) نمایش دهنده یک مساله اختلال تکین است، چون وقتی $\varepsilon=0$ داریم $\dot{y}=0$ یا به عبارتی $y=cte$. در [۱۱] پارامترهای $(c_1,\cdots c_6)$ طوری انتخاب شدند که تابع $x^7+\sum_{i=2}^{6}c_ix_i$ دارای ۶ نقطه بحرانی باشد به طوریکه امکان استفاده از نتایج قضیه مائسچالک [۱] و دومورتیه [۲] فراهم شود. این محاسبات کاملا پیچیده بودند و تا آنجا که ما اطلاع داریم تا کنون کسی موفق به ارائه یک مثال عددی خاص با ۴ سیکل حدی نشده است.

از بین نتایج دیگر می توان به بررسی سیستم

$$\begin{cases} \dot{x}=y-(x^{2l}+\sum_{i=2}^{2l-1}c_ix_i), \\ \dot{y}=\varepsilon(b-x), \end{cases} \tag{۶.۱}$$

[1] Maesschalck [2] Dumortier



شکل ۱.۱: سمت چپ: دینامیک مساله لایه‌ای و یک سیکل .FSTS سمت راست: دینامیک تند، همراه با دینامیک کند روی منحنی کند.

در مقاله [۴] اشاره کرد که در آن c_i ها طوری انتخاب شده‌اند که $x^{2l} + \sum_{i=2}^{2l-1} c_i x_i$ تنها دارای یک نقطه بحرانی مثلا یک می نیم است. این شرایط ما را به ساده‌ترین مجموعه‌های شناخته شده حدی تناوبی ناتباهیده ی ممکن هدایت می کند، که از آنها چگونگی انشعاب تعداد زیادی سیکل حدی شناخته شده است. یک مجموعه حدی-تناوبی ناتباهیده برای یک "مساله لایه ای"، یعنی سیستم (۵.۱) به ازای $\varepsilon = 0$، یک منحنی بسته قطعه‌ای هموار شامل مدار های تند (مدارهای منظم $_\varepsilon$(۵.۱)) و قسمت‌هایی از منحنی کند $y = x^{2l} + \sum_{i=2}^{2l-1} c_i x_i$ است، که آن را یک سیکل کند-تند می نامیم. شکل ۱.۱ را مشاهده کنید.

در این پایان نامه خود را محدود به نوعی از سیکل‌های کند-تند می کنیم که در شکل ۱.۱ نمایش داده شده است. آنها را سیکل‌های $FSTS$ (**تند-کند-نقطه برگشت -کند**) گوییم .

منحنی‌های کندی که در این پایان نامه با آنها مواجه خواهیم شد دارای نقاط برگشت (برگشت) هستند اما به جز در مبدا دارای نقطه بحرانی نیستند. سیکل‌های حدی سیستم (۶.۱) که در اندازه هاسدورف به سیکل‌های $FSTS$ نزدیک هستند، **نوسان‌های آرام ساز** نامیده می شوند، به این معنی که سرعت حرکت در نزدیکی مسیرهای تند از $O(1)$ است درحالی که سرعت حرکت در نزدیکی منحنی کند از $O(\varepsilon)$ است و اندازه خود نوسان آرام‌ساز از $O(1)$ است.

در مقاله [۴] نویسندگان با استفاده از انتگرال دیورژانس کند موفق به یافتن نوسان های آرام ساز با نوسانات بالا به همراه شکافت کامل شدند اما قادر به ارائه مثال نقض جدیدی برای حدس ۱.۰.۱ نشدند و تنها توانستند با استفاده از " انتگرال دیورژانس کند" مقدار ماکزیمم پیش بینی شده را تایید کنند.

در این پایان نامه با استفاده از انتگرال دیورژانس در طول مسیرهای بسته اطلاعات مهمی درمورد ماهیت منحنی‌های بسته مانند خواص پایداری و یا ناپایداری آنها بدست می آوریم. در چارچوب یک سیستم کند-تند، مدارها مدت زمان بیشتری را در نزدیکی منحنی کند می گذرانند و از این رو نشان می دهیم که تقریب جمله پیشرو انتگرال دیورژانس، بعد از ضرب در ε توسط انتگرال دیورژانس کند داده می شود. می توان انتگرال دیورژانس کند را با محاسبه دیورژانس میدان برداری در طول منحنی کند و سپس محاسبه انتگرال نسبت به ۱-فرم های القا شده در طول منحنی کند محاسبه کرد.

خانواده زیر از میدان های برداری کند-تند را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - H(x,y), \\ \dot{y} = \varepsilon(b-x), \end{cases} \tag{۷.۱}$$

که در آن $H(x,y) = x^{2l} + \sum_{i=2}^{2l-1} c_i x^i$ و منحنی $y = H(x,y)$ شبیه شکل ۱.۱ است. برای مثال می توانیم سیکل های $FSTS$ را با مقدار Y طوری پارامتری کنیم که مدارهای تند محور y را قطع کنند. این مدار تند یک نقطه ω-حدی خاص $(\omega_c(Y), H_c(\omega_c(Y)))$ و یک نقطه α-حدی خاص $(\alpha_c(Y), H_c(\alpha_c(Y)))$ بر روی منحنی کند $\{y = H_c(x) := H(x,c)\}$ دارد. سیکل $FSTS$ یعنی Γ_Y^c برای مقدار c، با مدار تند گذرا از $(0, Y)$ به همراه قسمتی از منحنی کند بین $x = \omega_c(Y)$ و $x = \alpha_c(Y)$ تعریف شده است.

در اینصورت انتگرال دیورژانس کند در طول Γ_Y^c بوسیله رابطه زیر داده می شود:

$$I(Y,c) = \int_{\omega_c(Y)}^{\alpha_c(Y)} \frac{h(x,c)^2}{x} \mathrm{d}x \tag{۸.۱}$$

در [۴] روی مقادیری از c_0 و سیکل‌های $\Gamma_{Y_0}^{c_0}$ کار شده است که به ازای هر c_{2j+1} موجود در عبارت $H(x,c)$ شرط زیر برقرار است:

$$\frac{\partial I}{\partial c_{2j+1}}(Y_0, c_0) \neq 0. \tag{۹.۱}$$

شرط (۹.۱) تقریبا همیشه برای سیستم (۶.۱) صدق می کند و در [۴] منجر به اثبات نتایج مورد نظر برای معادلات کلاسیک لیینارد شد. این شرط شبیه یک شرط طبیعی برای بیان این مطلب است که پارامتر c_{2j+1} هنگامی که $\varepsilon \to 0$ بطور یکنواخت چرخشی باقی می ماند. (به عبارت دیگر هرگاه $\|a\|$ با $(a = a_1, \cdots a_{2l-1})$ همچون در (۳.۱) به بی نهایت میل کند).

اما در [۴] همچنین با ترکیب هایی به شکل (Y_0, c_0) روبرو شدند که شرط (۹.۱) برای همه c_{2j+1} های موجود در $H(x,c)$ نقض می شد. این یک حالت کاملا استثنایی است که برای $n = 6$ اتفاق می افتد. با بررسی این مساله مشاهده شد که برای $n = 6$ مواجهه با مقادیر c_0 ای که به ازای آن ۴ سیکل حدی می توانند از اجتماع سیکل‌های $x = \omega_{c_0}(Y)$ از مسئله لایه ای منشعب شوند امکان پذیر است. به طور دقیق تر قضیه زیر را اثبات می کنیم:

قضیه ۲.۰.۱ (قضیه A) ([۵]) برای خانواده (ε, δ, b)-پارامتری مفروض از معادلات چندجمله ای لیینارد از درجه ۶ به صورت

$$\begin{cases} \dot{x} = y - (\frac{1}{2}x^2 + 5\delta x^3 - \frac{35}{46}x^4 - 12\delta x^5 + \frac{21}{46}x^6), \\ \dot{y} = \varepsilon(b-x), \end{cases} \tag{۱۰.۱}$$

و برای $k \in \{1,2,3,4\}$ مفروض، یک منحنی هموار به شکل

$$b = \varepsilon \mathcal{B}_k(\varepsilon, \delta)$$

تعریف شده برای $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ و $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ (برای $\varepsilon_0 > 0$ و $\delta_0 > 0$ به اندازه کافی کوچک) موجود است به طوری که هرگاه $\delta \neq 0$ و $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1(\delta))$ (برای یک $\varepsilon_1 : [-\delta_0, \delta_0] \to \mathbb{R}$ با $\varepsilon_1(\delta) > 0$ برای $\delta \neq 0$) سیستم (۱۰.۱) دقیقا k سیکل حدی دارد. همه این سیکل های حدی هذلولوی هستند و یک کانون هذلولوی جاذب را برای $\delta < 0$ و یک کانون هذلولوی دافع را برای $\delta > 0$ احاطه می کنند.

برای $\delta \sim 0$ و $\delta \neq 0$، سیکل های حدی بدست آمده در قضیه ۲.۰.۱ نوسانات آرام ساز هستند و زمانی که $\delta \to 0$ به سیکل های کند-تند $\Gamma_{Y_0}^{c_0}(i = 1, \cdots, k)$ میل می کنند. نشان می دهیم که ارتفاع های Y_i این سیکل های کند-تند درون یک بازه فشرده $[Y_{min}, Y_{max}]$ قرار می گیرند که به (ε, δ) بستگی ندارند و از صفر فاصله دارند. بنابراین **سیکل‌های کانارد** نوسانات آرام ساز از اندازه $O(1)$ هستند.

طبق معمول در این ساختن ها ε_1 را تابعی هموار بر $[-\delta_0, \delta_0]$ در نظر می‌گیریم که در آن $\varepsilon_1(0) = 0$. همچنین باید تذکر دهیم که توابع $\mathcal{B}_k$ یکتا نیستند. در حقیقت برای $k \in \{1,2,3,4\}$ مفروض، تعداد نامتناهی از چنین منحنی هایی وجود دارد.

فرض کنید $(\varepsilon, \delta, b) = (\varepsilon_0, -\nu_0, b_0)$ ثابت نگه داشته شده اند و هم چنین فرض کنید

$$\begin{cases} \dot{x} = y - H(x, \nu_0), \\ \dot{y} = \varepsilon_0 (b_0 - x), \end{cases} \tag{۱۱.۱}$$

با

$$H(x, \nu_0) = \frac{1}{2}x^2 - 5\nu_0 x^3 - \frac{35}{46}x^4 + 12\nu_0 x^5 + \frac{21}{46}x^6$$

نمایش یک دستگاه با ۴ سیکل حدی هذلولوی باشد که بزرگترین آنها جاذب است(و درنتیجه $\nu_0 > 0$). اگر در (۱۱.۱)، اختلالی در $H(x, \nu_0)$ برای ν_1 به اندازه کافی کوچک به شکل $H(x, \nu_0) + \nu_1 x^7$ ایجاد کنیم، آنگاه این ۴ سیکل حدی حفظ خواهند شد. علاوه بر این اگر ν_1 را منفی اختیار کنیم دایره در بینهایت جاذب خواهد بود و درواقع سیستم جدید از درجه ۷، حداقل ۵ سیکل حدی با تکرار فرد خواهد داشت. با ثابت نگه داشتن $\nu_1 < 0$ و $\nu_1 \sim 0$ و با درنظر گرفتن $H(x, \nu_0) + \nu_1 x^7 + \nu_2 x^8$ با ν_2 به اندازه کافی کوچک، یک سیستم از درجه ۸ باحداقل ۵ سیکل حدی از تکرار فرد ارائه می دهیم. با ادامه این روند و با اضافه کردن $\nu_j x^j$ برای $j > 9$ و تغییر در علامت ν_j ها با j فرد به آسانی قضیه زیر را بدست می آوریم:

قضیه ۳.۰.۱ (قضیه B ([۵])) فرض کنید $n \geq 6$. میدان های برداری چند جمله ای از درجه n به شکل (۲.۱) با حداقل $2 + [\frac{n-1}{2}]$ سیکل حدی هذلولوی، وجود دارند.

در ادامه قضیه زیر را با استفاده از مرجع [۲] برای $n = ۴$ ثابت می‌کنیم:

قضیه ۴.۰.۱ (قضیه C) هر معادله کلاسیک لیینارد از درجه ۴ حداکثر یک سیکل حدی دارد، و این سیکل حدی در صورت وجود هذلولوی است.

فصل ۲

مفاهیم پایه

در این فصل مفاهیم، قضایا و تعاریف پایه‌ای مورد نیاز در فصول آینده را مطرح می‌کنیم.

۱.۲ مفاهیمی از سیستم‌های دینامیکی

مطالب این بخش از منبع [۹] ارائه می‌شوند. میدان برداری زیر را درنظر بگیرید:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x) \tag{۱.۲}$$

که در آن f یک نگاشت C^r و $x \in E$ که E زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۱.۱.۲ به نقطه $x \in E$ نقطه تعادل، نقطه ثابت یا نقطه تکین f گوییم هرگاه $f(x) = ۰$. در غیر اینصورت، یعنی اگر $f(x) \neq ۰$ به آن نقطه عادی گوییم. ▲

چند تعریف

فرض کنیم x یک نقطه تعادل f باشد، دراینصورت $\phi(t) = x$ با $t \in \mathbb{R}$ ، یک جواب از (۱.۲) است، یعنی $۰ = \dot{\phi}(t) = f(\phi(t)) = f(x)$.

فرض کنیم $X = (P, Q)$ یک میدان برداری از رده C^r در صفحه باشد. همچنین فرض کنیم p یک نقطه ثابت از این میدان برداری باشد. گوییم

$$DX(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(p) & \frac{\partial P}{\partial y}(p) \\ \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(p) & \frac{\partial Q}{\partial y}(p) \end{bmatrix}$$

قسمت خطی میدان برداری X در نقطه تعادل p است.

- هرگاه ۰ مقدار ویژه ماتریس فوق نباشد گوییم p **ناتباهیده** است.
- اگر هر دو مقدار ویژه ماتریس فوق دارای قسمت حقیقی مخالف صفر باشند، به نقطه p هذلولوی گفته می‌شود.
- نقطه تعادل p پوچتوان نامیده می‌شود هرگاه هردو مقدار ویژه ماتریس $DX(p)$ برابر صفر باشند اما $DX(p) \neq 0$.
- نقطه تعادل p یک **مرکز** نامیده می‌شود هرگاه یک همسایگی p وجود داشته باشد که علاوه بر نقطه ثابت شامل **مدارهای تناوبی** نیز باشد. گوییم نقطه تعادل به طور خطی یک مرکز است اگر مقادیر ویژه $DX(p)$ موهومی محض باشند ولی صفر نباشند.
- هرگاه مقادیر ویژه $DX(p)$ مختلط باشند، نقطه p را کانون گویند. هرگاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه λ_1 و λ_2 از $DX(p)$ ناصفر باشند، p را یک کانون هذلولوی و هرگاه $Re(\lambda_1) < 0$ کانون هذلولوی جاذب و هرگاه $Re(\lambda_1) > 0$، کانون هذلولوی دافع نامیده می‌شود. هرگاه $Re(\lambda_1) = 0$، p یک نقطه کانون ضعیف (غیرهذلولوی) نامیده می‌شود.

فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^2$ و Λ یک منیفلد n-بعدی از پارامترها باشد. برای هر $\lambda \in \Lambda$، یک خانواده تحلیلی از میدان‌های برداری، یک میدان برداری $X_\lambda = a(x,y,\lambda)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y,\lambda)\frac{\partial}{\partial y}$ تعریف شده در U است به طوری که توابع $a,b : U \times \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}$ تحلیلی باشند. اگر Λ یک مجموعه باز در $\mathbb{R}^n$ بوده و a,b دو چندجمله‌ای باشند، دراینصورت گوییم که X_λ یک خانواده چندجمله‌ای از میدان‌های برداری در صفحه است.

تعریف ۲.۱.۲ یک **مجموعه حدی تناوبی** (lps) برای X_λ، یک زیرمجموعه فشرده ناتهی $\Gamma \subset U$ است به طوری که برای هر $\lambda_0 \in \Gamma$ یک دنباله $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ در فضای پارامتر موجود باشد به طوری که $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = \lambda_0$ و همچنین یک دنباله از سیکل‌های حدی $\gamma_n \subset U$ از X_{λ_n} (در متر هاسدورف) وجود داشته باشد به طوری که $\gamma_n \longrightarrow \Gamma$. ▲

مطالعه مجموعه‌های حدی تناوبی یک موضوع کلاسیک در نظریه انشعاب است. برخی از مثال‌های معمول غیربدیهی عبارتند از حلقه هموکلینیک، کانون ضعیف و حلقه هتروکلینیک.

تعریف ۳.۱.۲ فرض کنید (X,d) يك فضاي متریک کراندار و Λ گردایه همه زیرمجموعه هاي بسته X باشد. تابع $H : \Lambda \times \Lambda \longrightarrow [0,\infty]$ با ضابطه $H(A,B) = \inf\{r : A \subset N_r(B), B \subset N_r(A)\}$ یک متر روی Λ تعریف می‌کند که متر هاسدورف نامیده میشود. ▲

منیفلد

تعریف ۴.۱.۲ فرض کنید X یک فضای متریک باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از X باشند. یک همیومورفیسم از A به روی B، یک نگاشت یک به یک و پیوسته h از A به روی B است به طوری که معکوس آن یعنی

$h^{-1}: B \longrightarrow A$ نیز پیوسته باشد. مجموعه‌های A و B همیومورف یا هم‌ارز توپولوژیکی نامیده می‌شوند هرگاه چنین همیومورفیسمی از A به روی B وجود داشته باشد. ▲

تعریف ۵.۱.۲ یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر n-بعدی (یا یک منیفلد از رده C^k) که با M نشان می‌دهیم یک فضای متریک همبند با یک پوشش باز یعنی $M = \cup_\alpha U_\alpha$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

اولا: برای هر α، U_α با گوی باز فضای $\mathbb{R}^n$ یعنی $B = \{x \in \mathbb{R}^n \Big| |x| < 1\}$ همیومورف باشد. به عبارت دیگر برای هر α، همیومورفیسم h_α از U_α به B وجود داشته باشد.

ثانیا: اگر $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ و $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow B$ و $h_\beta : U_\beta \longrightarrow B$ همیومورفیسم‌هایی باشند، آنگاه $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ و $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ هستند و نگاشت

$$h = h_\alpha o h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

برای هر $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ دیفرانسیل‌پذیر است و دترمینان ماتریس ژاکوبی یعنی $Dh(x) \neq 0$ است. منیفلد M تحلیلی نامیده می‌شود هرگاه نگاشت‌های $h = h_\alpha o h_\beta^{-1}$ تحلیلی باشند. ▲

زوج (U_α, h_α) یک چارت برای منیفلد M نامیده می‌شود و مجموعه تمامی چارت‌ها یک اطلس برای M است. منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M جهت‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه اطلسی با شرط

$$Dh_\alpha o h_\beta^{-1}(x) > 0; \qquad \forall \alpha, \beta\, ,\, \forall x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

وجود داشته باشد.

۱.۱.۲ سیکل‌های حدی

در نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل معمولی، تحقیق در مورد سیکل‌های حدی، یک موضوع مشکل و جذاب است. بعد از نقاط ثابت، سیکل‌های حدی موضوع اصلی مطالعه در نظریه سیستم‌های دیفرانسیل دو بعدی است. در این بخش در مورد سیکل‌های حدی بحث خواهیم کرد.

سیستم معادلات دیفرانسیل به شکل زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \tag{۲.۲}$$

که در آن x، y و t متغیرهای حقیقی هستند و P و Q توابعی C^1 از x و y هستند. دراینصورت براساس قضیه وجود و یکتایی، وجود و یکتایی جواب‌های این معادله تضمین می‌شود.

اگر یک جواب $\{(x, y) = \big(f(t), g(t)\big)\}$ از سیستم (۲.۲)، یک تابع تناوبی غیرثابت از t باشد، دراینصورت

به $\gamma = \{(x,y) : x = f(t), y = g(t)\}$، یک مدار تناوبی از این سیستم گفته می‌شود.

اگر در یک همسایگی کوچک دلخواه بیرونی (درونی) از مدار تناوبی γ ، هیچ مدار تناوبی دیگری موجود نباشد، دراینصورت به γ یک سیکل حدی خارجی (داخلی) گوییم.

اگر یک همسایگی کوچک دلخواه بیرونی (درونی) از مدار تناوبی γ وجود داشته باشد، به طوری که با مدارهای تناوبی پر شده باشد، دراینصورت به γ سیکل حدی از نوع مرکز گفته می‌شود.

اگر در هر همسایگی بیرونی (درونی) از مدار تناوبی γ ، هم مدارهای غیرتناوبی و هم مدارهای تناوبی متفاوت با γ وجود داشته باشد، دراینصورت به γ سیکل نامعین خارجی (داخلی) گفته می‌شود. اگر یک مدار تناوبی هم نامعین داخلی و هم نامعین خارجی باشد، به آن سیکل نامعین گوییم.

گزاره ۶.۱.۲ هر مدار تناوبی γ، یک سیکل حدی خارجی (داخلی)، یا یک سیکل حدی از نوع مرکز خارجی (داخلی)، و یا یک سیکل نامعین خارجی (داخلی) است. نوع اول، خود به دو نوع تقسیم می‌شود:

(آ) یک همسایگی به اندازه کافی کوچک بیرونی (درونی) از γ وجود دارد به طوری که همه مدارها در این همسایگی غیرتناوبی هستند، و برای این مدارها، γ به عنوان مجموعه ω−حدی است. دراینصورت به γ سیکل حدی پایدار خارجی (داخلی) گفته می‌شود. اگر γ هم پایدار داخلی و هم پایدار خارجی باشد، دراینصورت گوییم γ سیکل حدی پایدار است.

(ب) یک همسایگی به اندازه کافی کوچک بیرونی (درونی) از γ وجود دارد به طوری که همه مدارها در این همسایگی غیرتناوبی هستند، و برای این مدارها، γ به عنوان مجموعه α−حدی است. دراینصورت به γ سیکل حدی ناپایدار خارجی (داخلی) گفته می‌شود. اگر γ هم ناپایدار خارجی و هم ناپایدار داخلی باشد، دراینصورت گوییم γ سیکل حدی ناپایدار است.

اگر γ پایدار خارجی و ناپایدار داخلی باشد، یا برعکس پایدار داخلی و ناپایدار خارجی باشد، گوییم γ سیکل حدی نیمه پایدار است.

گزاره ۷.۱.۲ فرض کنیم در طول یک مسیر بسته γ از سیستم (۲.۲) داشته باشیم:

$$\int_{\circ}^{T} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}t < \circ (> \circ) \qquad (۳.۲)$$

دراینصورت γ یک سیکل حدی پایدار (ناپایدار) است. از این گزاره نتیجه می‌شود که برای همه مدارهای تناوبی دیگر، باید داشته باشیم:

$$\int_{\circ}^{T} (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}t = \circ. \qquad (۴.۲)$$

تعریف ۸.۱.۲ در هر دو حالت خارجی و داخلی، هرگاه شرط (۳.۲) برقرار باشد گوییم γ یک سیکل حدی هذلولوی است؛ هرگاه شرط (۴.۲) برقرار باشد گوییم γ یک مدار تناوبی چندگانه است؛ و اگر این مدار تناوبی سیکل حدی