
بسم الله الرحمن الرحیم
الحمد لله رب العالمین
الرحمن الرحیم
مالک یوم الدین
ایاک نعبد وایاک نستعین
اهدنا الصراط المستقیم
صراط الذین انعمت علیهم غیر المغضوب علیهم ولا الضالین

دانشگاه الزهرا(س)
دانشکده علوم‌پایه

پایان‌نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش جواب‌های بنیادی برای حل برخی مسائل بایهارمونیک معکوس

استاد راهنما:
دکتر علیمردان شاه رضایی

استاد مشاور:
دکتر یداله اردوخانی

دانشجو:
مدینه فیروزی

بهمن‌ماه ۱۳۹۰

چکیده

مسائل بایهارمونیک معکوس از مسائل به روز در معادلات با مشتقات جزئی می‌باشند که می‌توان آن را با استفاده از روش‌های مختلف حل نمود.

در این رساله، روش عددی جدیدی برای حل مسائل بایهارمونیک معکوس بدون استفاده از شبکه‌بندی و انتگرال‌گیری به کار گرفته شده است. در این روش عددی، با استفاده از جواب‌های بنیادی، توابع پایه‌ای را به دست آورده و بعد از تولید توابع پایه‌ای، جواب اصلی معادله مطرح می‌شود. جواب تقریبی بایستی در شرایط کرانه‌ای صدق کند آنگاه دستگاه معادلات غیرخطی بدوضع حاصل می‌شود که برای حل آن روش منظم‌سازی تیخانف [1]و روش اصل اختلاف (یا روش منحنی L) را به کار می‌گیریم.

روش جواب‌های بنیادی، الگوریتمی است که جواب تقریبی برای حل برخی مسائل بیضوی با مقادیر کرانه‌ای را فراهم می‌سازد. همچنین در این نوشتار به حل مسائل هارمونیک معکوس همگن و ناهمگن به روش جواب‌های بنیادی پرداخته شده است.

کلمات کلیدی:معادله‌ی بایهارمونیک، مساله‌ی معکوس، روش جواب‌های بنیادی، روش منظم‌سازی تیخانف، اصل اختلاف، معادلات ناهمگن، دستگاه معادلات غیرخطی بدوضع، روش منحنی L .

[1] Tikhonov

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست اشکال

مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات‌جزئی در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابعی می‌باشند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارند، مطرح می‌شوند. اغلب مسائل مکانیک سیالات و جامدات، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس، مکانیک کوانتوم و دیگر زمینه‌های فیزیکی و علوم به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی منجر می‌شوند.
در دو دهه اخیر، تحقیقات روی حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی مرتبه چهارم و کاربرد آنها در بسیاری از علوم به سرعت گسترش یافته است[۴].
در مدلسازی پدیده‌های مختلف در علوم به خصوص در علم مکانیک جامدات و در مسائل مربوط به خیز صفحات تحت بارگذاری متفاوت و یا بدون بار با شرایط کرانه‌ای مفروض، با مسائلی موسوم به مسائل بایهارمونیک مواجه هستیم. مسائل بایهارمونیک از نوع مسائل مقدار کرانه‌ای بیضوی مرتبه‌ی چهارم هستند، بسته به این که صفحه در شرایط بار گذاری یا بدون بار در نظر گرفته شود، معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به ترتیب حالت همگن یا ناهمگن خواهد داشت، این مسائل پایه‌ی مهمی در ریاضیات و فیزیک هستند.

به نظر می‌رسد آلمانسی [۲] ریاضیدان ایتالیائی اولین کسی باشد که به طور جدی درباره مسائل بایهارمونیک به تحقیق پرداخته است. در سال ۱۸۹۷ آلمانسی تئوری معروف خود را یعنی نمایش تابع بایهارمونیک بر حسب دو تابع هارمونیک با ضریب r^2 ارائه داد. بعد از او در سال‌های ۱۹۵۳ – ۱۹۸۰ به ترتیب، برگمن و شیفر [۳] [۳۷] و جزوان و شیدفر [۴] [۳۸]، روی صورت‌های دیگر این نمایش و تعمیم آن کار کردند.

---

[۲] *Almansi*

[۳] *Bregman and Schiffer*

[۴] *Jaswan and Shidfar*

روش جواب‌های بنیادی (MFS)[۵] اولین بار در سال ۱۹۶۴ توسط کورپرداز و الکسدس [۶] پیشنهاد شد [۳۹] و سپس در سال‌های ۱۹۷۷- ۱۹۷۹ توسط دانشمندانی چون میتون و جانستون [۷] فرمول‌بندی گردید [۴۰]. فرویزر و کارجوراقیس [۸] در سال ۱۹۸۷، روش MFS و در سال ۱۹۸۸، روش‌جواب‌های بنیادی آلمانسی ($AMFS$) [۹] را در فضای دو بعدی ارائه کردند.
بعد از آن MFS به طور موفقیت‌آمیزی در حل عددی معادله‌ی پوآسن [۳۵]، معادله‌ی نفوذ [۴۱]، معادله‌ی هلمهولتز [۴۲]، معادله‌ی بایهارمونیک [۹] و معادلات استوکس [۴۳] به کار گرفته شد. فرمول‌بندی MFS برای حل چندین مساله با مقادیر کرانه‌ای بیضوی در سال ۱۹۸۵ توسط بوگومونلی[۱۰] صورت گرفت.
روش MFS همچنین برای حل مسائل معکوس به کار می‌رود .

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم گردیده است. در فصل اول، مقدمات و پیش‌نیازهایی که در مورد نیاز در فصل‌های بعدی است، ارائه می‌گردد. فصل دوم به کاربرد مسائل بیضوی معکوس مرتبه‌ی چهارم در علوم از جمله مکانیک سیالات، خوردگی و نظایر آن اختصاص یافته است. در فصل سوم به معرفی و بررسی روش منظم‌سازی تیخانف و اصل اختلاف که برای حل مساله بیان شده به کار می‌روند، پرداخته شده است. در فصل چهارم، روش جواب‌های بنیادی برای حل مساله لاپلاس و پوآسن معکوس مورد مطالعه قرار گرفته است و در نهایت در فصل پنجم روش MFS را برای حل عددی مساله بایهارمونیک همگن و ناهمگن بررسی شده است و همچنین در پایان پیشنهادات و نظرات مربوط به تعمیم این مطالب بیان گردیده است.
این رساله مبتنی بر مطالعه و بررسی مقالات زیر می‌باشد:

L. marin D. Lesnic, The method of fundamental solutions for inverse boundary value problems associated with the two-dimensional biharmonic equation, *Mathematical and Computer Modelling* **42** (2005) 261–278.[21]

A. Zeb · D. B. Ingham · D. Lesnic, The method of fundamental solutions for a bi-

[۵] *The Method of Fundamental Solution*

[۶] *V.D.Kurpradze andM.A.Aleksidze*

[۷] *R.Mathon and R.L.Johnston*

[۸] *Fairweather and Karagearghis*

[۹] *The Almansi MFS*

[۱۰] *A.Bogomolny*

harmonic inverse boundary determination problem. *Comput Mech* (2008) **42**:371–379.[34] T. Shigeta, D. L.Yong, Regularized solutions with a singular point for the inverse biharmonic boundary value problem by the method of fundamental solutions, *Engineering Analysis With Boundary Elements* **35** : 883-894 (2011).[18]

مدینه فیروزی
بهمن ۱۳۹۰

فصل ۱

تعاریف،مفاهیم پایه‌ای و پیش نیازها

مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و ابزار مورد نیاز برای درک مفاهیم فصل‌های بعدی می‌پردازیم. بدین منظور به مفاهیم اساسی از آنالیز حقیقی، نظریه تقریب و سپس به انواع مسائل با مقادیر کرانه‌ای اشاره می‌کنیم و در نهایت به مطالعه در مورد مسائل کوشی و تحلیل حساسیت در جواب اینگونه مسائل پرداخته شده است.

۱.۱ مفاهیم پایه در آنالیزحقیقی

۱.۱.۱ فضای برداری

تعریف ۱.۱.۱. *یک فضای برداری (یا فضای خطی) روی میدان F مجموعه‌ای ناتهی مانند X با دو عمل جمع و ضرب (ضرب اسکالر) است. اعضای x و y از X را بردار نامیم و اعضای α و β از میدان F را اسکالر خوانیم به طوری‌که $(X,+)$ تشکیل یک گروه آبلی می‌دهد یعنی به ازای هر x، y و z از X داشته باشیم[۱]:*

۱) $x+y \in X$

۲) $(x+y)+z = x+(y+z)$

۳) *X دارای عضو خنثی باشد یعنی به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $x+0=0+x=x$.*

۴) هر $x \in X$ دارای عضو قرینه $-x \in X$ باشد یعنی به ازای هر $x \in X$ داریم $x + (-x) = 0$.
۵) $x + y = y + x$.
همچنین به ازای هر اسکالر $\alpha, \beta \in F$ و هر بردار $x, y \in X$ داشته باشیم:
۶) $\alpha.x \in X$
۷) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
۸) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
۹) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\| . \|$ از X به $\mathbb{R}^+$ یک نرم گویند هرگاه [۱]:*
الف) به ازای هر $x \in X$، $\| x \| \geq 0$ و $\| x \| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$،
ب) به ازای هر $x \in X$ و هر اسکالر α، $\| \alpha x \| = |\alpha| \| x \|$،
ج) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$.

تعریف ۳.۱.۱. *به فضای خطی X که دارای یک نرم است، فضای خطی نرم دار گوییم. اگر X یک فضای خطی نرم دار باشد و برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $d(x, y) = \| x - y \|$ که در آن به تابع d یک متر روی X گویند، آنگاه X به یک فضای متریک معروف است.*

تعریف ۴.۱.۱. *فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ گوییم در صورتی‌که فضای متری (X, d) با متر متعارف (متری که به وسیله نرم القا می‌شود)، یک فضای متری کامل باشد.*
فضای متری (X, d) کامل است در صورتی‌که هر دنباله کوشی در X همگرا به عضوی از X باشد.

تعریف ۵.۱.۱. *برای بردار مفروض x از فضای برداری X، نرم- p را با نماد $\| . \|_p$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\| x \|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}; \qquad p \in \mathbb{N}, \quad x = [x_1, x_2, ..., x_n]^T.$$

همچنین برای بردار مفروض x، نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\| x \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنید M فضای برداری همه ماتریسهای $n \times n$ باشد. تابع $\|.\|$ از M به $\mathbb{R}^+$ را نرم ماتریسی گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند [۲]:*

۱) *به ازای هر ماتریس $A \in M$ همواره $\| A \| \geq ۰$،همچنین $\| A \| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$ ،*

۲) *به ازای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و $A \in M$ ، $\| \alpha A \| = |\alpha| \| A \|$ ،*

۳) *به ازای هر $A, B \in M$ ، $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$ ،*

۴) *به ازای هر $A, B \in M$ ، $\| AB \| \leq \| A \| . \| B \|$.*

مثال ۱.۱.۱. *برای ماتریس A ، l^p- نرم چنین تعریف می‌گردد:*

$$\| A \|_p = \left(\sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|^p \right)^{\frac{۱}{p}} ; \qquad p = ۱, ۲, ۳, \cdots .$$

و اگر $p = ۲$ باشد آنگاه آن را نرم اقلیدسی یا فروبینیوس گویند.

مثال ۲.۱.۱. *برای ماتریس A ، l^∞ - نرم ماتریس یا نرم مجموع درایه‌های سطری A چنین تعریف می‌شود :*

$$\| A \|_\infty = \max_{۱ \leq i \leq n} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|.$$

مثال ۳.۱.۱. *برای ماتریس A ، $l^۱$- نرم ماتریس یا نرم مجموع درایه‌های ستونی A به صورت:*

$$\| A \|_۱ = \max_{۱ \leq j \leq n} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ij}|,$$

تعریف می‌گردد.

تعریف ۷.۱.۱. *برای $۱ \leq p < \infty$ ، فضای متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیر $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ را که در شرط $\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty$ صدق می‌نمایند فضای $L^p[a,b]$ گوییم. پس خواهیم داشت:*

$$L^p[a,b] = \left\{ f | f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}; \text{ اندازه پذیر } f \text{ و } \int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

حال نرم فضای خطی L^p را برای $f \in L^p$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\| f \|=\| f \|_p= \left(\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} .$$

تعریف ۸.۱.۱. ضرب داخلی (ضرب عددی یا ضرب نقطه‌ای) روی فضای برداری X، یک تابع عددی مانند نماد $<.,.>$ روی $X \times X$، است، به طوری‌که برای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

۱) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$،

۲) $(x, y) = \overline{(y, x)}$،

۳) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$،

۴) $(x, x) \geq 0$، $(x = 0 \iff (x, x) = 0)$.

آنگاه (x, y) ضرب داخلی x و y نامیده می‌شود.

این ضرب داخلی یک نرم به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\forall x \in X, \qquad \| x \|= \sqrt{(x, x)}.$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید X و Y فضای خطی نرم دار باشند، عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را پیوسته گوییم هرگاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ که به x همگرا باشد، داشته باشیم:

$$\lim_{n \to \infty} \| Tx_n - Tx \|= 0.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر (X, d) یک فضای متریک و $M \subset X$، خانواده $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ از مجموعه‌های باز X یک پوشش باز برای M گوییم هرگاه $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید (X, d) یک فضای متری و $M \subset X$ باشند، M را در X فشرده گویند هرگاه به ازای هر پوشش باز $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ برای M یک زیر پوشش متناهی از آن، M را بپوشاند.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید X و Y دو فضای برداری باشند، عملگر $A : X \longrightarrow Y$ یک عملگر پیوسته کامل یا فشرده نامیده می‌شود هرگاه A یک عملگر پیوسته بوده و به ازای هر زیر مجموعه کراندار M از X، بستار تصویر M تحت عملگر A یک مجموعه فشرده باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. *هر گاه (X,d) یک فضای متری و $M \subset X$ آن‌گاه M در X چگال است اگر هر نقطه X یا متعلق به M یا یک نقطه حدی M باشد.*

۲.۱ تقریب توابع

در این بخش ابتدا به تعریف مجموعه‌های متعامد می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و $x,y \in X$ متمایز باشند. x را بر y عمود گوییم هرگاه برای $x \neq y$ داشته باشیم $(x,y) = ۰$ و آن را با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم.*

اگر به ازای هر $x,y \in A$ داشته باشیم:

$$(x,y) = \begin{cases} ۰ & ; \quad x \neq y, \\ \alpha > ۰ & ; \quad x = y. \end{cases}$$

آن‌گاه زیرمجموعه $A \subset X$ را متعامد گوییم.

اگربرای هر $x \in A$ داشته باشیم $\| x \| = ۱$، مجموعه A را متعامد یکه یا نرمال گوییم.

تعریف ۲.۲.۱. *دنباله چندجمله‌ای‌های چبیشف $\{T_n(x)\}_{n=۰}^{\infty}$ روی فاصله $[-۱, ۱]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$ متعامدند و یک سیستم متعامد کامل درفضای $L^۲[a,b]$ می‌باشد که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند،*

$$T_۰(x) = ۱,$$

$$T_۱(x) = x,$$

$$T_{n+۱}(x) = ۲xT_n(x) - T_{n-۱}(x); \qquad n = ۱, ۲, \cdots.$$

این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-۱}(x)); \qquad n = ۰, ۱, ۲, \cdots.$$

ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف را صفرهای چبیشف یا نقاط چیبیشف می‌نامیم. لذا داریم:

$$T_n(x) = 0 \Longrightarrow x_j = \cos\frac{j\pi}{2n}; \quad j = 0, 1, 2, \cdots n.$$

قضیه ۱.۲.۱. *اگر f_1، f_2، ... و f_n دنباله متناهی از توابع متعامد نرمال (یکه) در $L^2(a,b)$ و $f \in L^2(a,b)$ باشند، آنگاه α_1، α_2، ... و α_n ی وجود دارد که*

$$\| f - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \|_2$$

مینیمم شود. به $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ تقریب کمترین مربعات f گوییم.

اثبات: برهان در مرجع [۴۸] موجود است.

تعریف ۳.۲.۱. *تابع $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع لیپ‌شیتز [1] می‌نامند هرگاه عدد ثابت M موجود باشد به طوری‌که داشته باشیم :*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M||x - y||; \qquad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

تعریف ۴.۲.۱. *فرض کنید $\varphi : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و $\{p_j\}_{j=1}^{N}$، N نقطه مجزا در $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ باشد. تابع به صورت*

$$f(p) = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi(\| p - p_j \|) + p_m(p),$$

را که در آن $\| . \|$ یک نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^d$ است، و p_m یک چند جمله‌ای از درجه m باشد یک تابع پایه شعاعی نامیم.

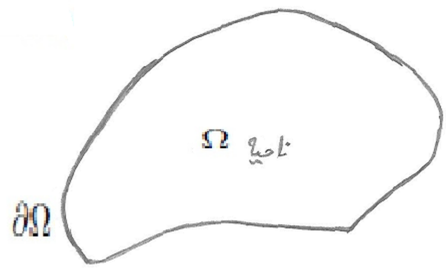
۳.۱ مسائل با مقادیر کرانه‌ای

در علم ریاضیات، در زمینه معادلات دیفرانسیل، یک مساله مقدار کرانه‌ای، یک معادله دیفرانسیل با مجموعه‌ای از محدودیت‌های اضافی که شرایط کرانه‌ای نامیده می‌شوند، است.
برای به دست آوردن جواب یکتای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی به یک مجموعه از

[1] *Lipschitz*

شرایط مکمل نیاز است. شرایط مکمل به شرایط اولیه و شرایط کرانه‌ای تقسیم می‌شوند.
شرط اولیه به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته در یک حالت اولیه است، در حالی‌که شرایط کرانه‌ای به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته و یا مشتقات آن در کرانه‌های قلمرو حل معادله دیفرانسیل جزئی است [۲].

تعریف ۱.۳.۱. *معادله دیفرانسیل $L[\psi] = f$ در ناحیه Ω، با شرایط کرانه‌ای معین $B[\psi] = g$ روی کران Ω را که در آن L یک عملگر دیفرانسیل با مشتقات جزئی و B یک عملگر وابسته به L و Ωمی‌باشد ،یک مساله دیفرانسیلی با مقادیر کرانه‌ای گویند که شکل (۱-۱) نمایش مساله عمومی با مقادیر کرانه‌ای را نشان می‌دهد.*



شکل ۱.۱: نمایش مساله عمومی با مقادیر کرانه‌ای

حال اگر در مساله دیفرانسیلی فوق، عملگر L خطی باشد آن‌گاه مساله را یک مساله دیفرانسیلی خطی می‌نامیم [۳].
جواب یک مساله مقدار کرانه‌ای، جواب معادله دیفرانسیل با مقادیر کرانه‌ای است که در شرایط کرانه‌ای صدق می‌کند. مقادیر کرانه‌ای از شرایط فیزیکی ناشی می‌شوند.
بیشتر کارهای تئوری در زمینه معادلات با مشتقات جزئی به حل مسائل مقدار کرانه‌ای اختصاص می‌یابد.

انواع شرایط کرانه‌ای

یک مساله در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط کرانه‌ای (مثل مساله‌ی لاپلاس، پوآسن و نظایر آن) و یا با شرایط اولیه - کرانه‌ای (مانند مساله‌ی گرما، موج و نظایر آن)همراه می‌باشد. انواع شرایط کرانه‌ای عبارت‌اند از:

۱-شرط کرانه‌ای از نوع دیریکله: