بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

(گرایش محض)

عنوان :

حل بعضی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی

از:

پریرخ اسماعیل نژاد

استاد راهنما:

دکتر نصیر تقی زاده- دکتر مژگان اکبری

اسفند ۱۳۹۳

ماحصل آموخته هایم تقدیم به

مقدس ترین واژه ها در لغت نامه دلم، پدر و مادر مهربانم که زندگیم را مدیون مهر و عطوفت شما هستم. مشفقانی بردبار و حامی که هر آنچه آموختم در مکتب عشق شما آموختم و هرچه بکوشم قطره ای از دریای بی کران لطف تان را سپاس نتوانم گفت امروز، هستی ام به امید شماست و فردا کلید باغ بهشتم رضای شما.

و تقدیم به استادان بزرگوارم، استادانی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشتند و برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنا کردند.

تقدیر و تشکر

زندگی صحنه ی یکتای هنرمندی ماست
هر کسی نغمه ی خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته به جاست
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق»

بسی شایسته است از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکتر تقی زاده که با کرامتی چون خورشید، سرزمین دل را روشنی بخشیدند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنماییهای ارزشمند و سازنده بارور ساختند و درس زندگی و نکات اخلاقی به من آموختند، تقدیر و تشکر نمایم و هم چنین از استاد با کمالات و شایسته سرکار خانم دکتر اکبری که همواره مشوق من بودند و از هیچ راهنمایی و تلاشی دریغ ننمودند بسیار سپاس گزارم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر کیانپور و جناب آقای دکتر یاقوتی که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را بر عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

هم چنین از کلیه اساتید بزرگوار دانشکده علوم ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب علم و معرفت نمودم تشکر می نمایم.

فهرست مطالب

چکیده:

حل بعضی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی

پریرخ اسماعیل نژاد

دراین پایان نامه بعضی از معادلات معروف را با استفاده از روش زیرمعادله دیفرانسیل معمولی برنولی حل کرده‌ایم. معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی غیرخطی را با تغییر متغیر مناسب به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نموده و پس از یکسری اعمال جبری مناسب، جواب‌های دقیق معادلات را به طوریکه به جواب معادله برنولی وابسته شود، به دست می آوریم.

کلید واژه:
روش زیرمعادله دیفرانسیل معمولی برنولی، معادلات دیفرانسیل بامشتقات جزئی

Abstract:

Solving some partial diffrential Equations by Sub-ODE Method.

Parirokh Esmaeelnejad

In this thesis, we have solved some famous equations by Bernoulli Sub-ODE method. We convert nonlinear partial differential equations to ordinary differential equations by changing proper variable and after doing some suitable algebraic actions, we obtain exact solutions of equations which depends on solution of Bernoulli equation.

Key words:
Bernoulli sub-ODE method, partial differential equations.

پیشگفتار:

پدیده‌های غیر خطی در طیف گسترده‌ای از علوم نظیر فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد، دینامیک سیالات و غیره ظاهر می‌شوند. به این منظور، ریاضیدانان برای پیدا کردن جواب های دقیق آن ها تلاش های زیادی انجام می دهند و روش‌های مختلفی برای ساخت جواب‌های دقیق معادلات غیر خطی کشف شده است. چندین روش قدرتمند و خوب برای بدست آوردن جواب های دقیق معادلات غیر خطی مثل روش تعادل همگن [۲۱]، [۲۲]و [۱۸] روش تانژانت [۱۳] و [۱۸]، روش بسط تابع تانژانت [۲] و [۱۸]، روش ضرب تابع نمایی [۱۲] و [۱۸]، روش تابع گویای تبدیل یافته [۱۱] و [۱۸]، روش انتگرال اول [۳] و [۱۸]، روش پراکندگی وارون [۵] و [۱۸]، روش بسط تابع بیضوی ژاکوبی [۹]، [۴] و [۱۷]، روش تبدیل بکلاند [۱۵]، [۱۶] و [۱۹]، روش دو خطی هیروتا [۶]، [۷] و [۱۹]، روش معادله ریکاتی تعمیم یافته [۲۵]، [۱۴] و [۱۹]، روش تابع بیضوی وایرشتراس [۱] و روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی و غیره ارائه شده است.

مطالب این پایان نامه به شرح زیر می‌باشد:

در فصل اول تعاریف و مقدمات اولیه که پیش نیاز این پایان نامه است بیان می‌شود و در رابطه با برخی ازمعادلاتی که در این پایان نامه حل شده توضیحاتی ارائه می‌شود.

در فصل دوم روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی معرفی شده و از آن در حل معادلات دیفرانسیل دو خطی کورت وگ یک بعدی و دو بعدی [۱] استفاده می‌شود.

در فصل سوم نیز معادلاتی همچون نیژینک-نویکاف-وسلو[۲]، برگر[۳]، واریانت بوسینسک [۴]، بوسینسک (۱+۲) بعدی و کادمتسو- پتویاشویلی[5] و ... به روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی آورده می‌شود و در نهایت اینجانب معادله غیر خطی شرودینگر [۶] و همچنین معادله غیر خطی شرودینگر با قانون توانی غیر خطی[۷] را با استفاده از روش ارائه شده حل می‌نمایم.

[۱] 1 Dimensional and 2 Dimensional Billinear Kortweg De Vrise
[۲] Nizhink-Novikov-vesselov
[۳] Burgers
[۴] Variant Boussinesq
[۵] (2+1)- dimensional Boussinesq and Kadomtsev- Petviashvili
[۶] Nonlinear Shrödinger
[۷] The Shrödinger equation with power law nonlinearity

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پایه

۱-۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه که در این پایان نامه از آن‌ها استفاده می‌کنیم، بیان می‌شود.

تعریف ۱-۱-۱. در هر پدیده و فرآیندی در طبیعت پارامترهای مختلفی وجود دارد که مطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با هم ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی یک معادله تابعی است و معادله تابعی حاصل از پدیده ای که در آن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغیر مستقل بررسی شود معادله دیفرانسیل نامیده می شود. اگر متغیر مستقل یکی باشد معادله دیفرانسیل را معمولی[۱] و اگر متغیر مستقل بیش از یکی باشد، معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی[۲] می گویند.

تعریف ۱-۱-۲. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در هندسه و فیزیک هنگامی پدید می آیند که تعداد متغیرهای مستقل مسئله مورد بحث ۲ یا بیش تر از ۲ باشد. در چنین حالتی، هر متغیر وابسته، احتمالاً تابع بیش از یک متغیر است، لذا نسبت به یک متغیر تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد. مثلا در بررسی تأثیرات حرارتی در یک جسم صلب، ممکن است دمای u از نقطه ای به نقطه ای دیگر و همچنین از لحظه ای به لحظه دیگر تغییر کند، در نتیجه مشتقات

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (۱-۱)$$

در حالت کلی صفر نباشد بعلاوه ممکن است در مسئله به خصوصی چنین پیش آید که مشتقات جزئی مراتب بالاتر مثل

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}, \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^۳ u}{\partial^۲ x \partial t}, \dots \qquad (۱-۲)$$

دارای معنی فیزیکی باشد.

هنگامی که قوانین فیزیک را برای مسائلی از این نوع به کار می بریم، بعضی اوقات رابطه ای مانند

$$F(x_۱, x_۲, \dots, u, u_{x_۱}, u_{x_۲}, \dots, u_{x_n}, u_{x_۱x_۱}, \dots, u_{x_nx_n}, \dots) = ۰, \qquad (۱-۳)$$

بین مشتقات به دست می آوریم. چنین رابطه ای که مشتقات جزئی را به هم ربط می دهد، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرسوم است.

مثال ۱-۱-۳. معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + x + y, \qquad (۱-۴)$$

$$x^۲u_{xx} - y^۲u_{yy} + xu_x - yu_y = x, \qquad (۱-۵)$$

معادله (۱-۴) معادله دیفرانسیل معمولی و معادله (۱-۵) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است.

[۱] Ordinary differential equation
[۲] Partial differential equation

تعریف ۱-۱-۴. بزرگ ترین مرتبه مشتق متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل را مرتبه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامیم.

- اگر F برحسب u و مشتقات آن به صورت خطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را خطی گویند.
- اگر F برحسب u و مشتقات آن به صورت غیرخطی در معادله ظاهر شود، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را غیرخطی گویند.
- اگرمعادله دیفرانسیل بامشتقات جزئی نسبت به بالاترین مرتبه مشتقش خطی باشد، آن گاه معادله ی دیفرانسیل راشبه خطی می گویند.
- اگردرمعادله دیفرانسیل شبه خطی، ضرایب متغیر وابسته ومشتقات آن فقط توابعی از متغیرهای مستقل باشند، آن گاه معادله دیفرانسیل راتقریباً خطی می گویند.

مثال ۱-۱-۵. معادلات زیر را در نظر می‌گیریم

$$x^۲u_x + (x+y)u_y = x^۲ + ۱, \qquad (۱-۶)$$

$$xu_{xx} + yu_{yy} + u_t^۲ = (t+۱)^۲, \qquad (۱-۷)$$

$$uu_yu_{xxx} + u_{yy}^۲ = \sin u, \qquad (۱-۸)$$

رابطه (۱-۶) معادله خطی مرتبه اول و رابطه (۱-۷) معادله غیر خطی مرتبه دوم است ولی چون نسبت به بالاترین مرتبه مشتقش یعنی u_{xx} و u_{yy} خطی است پس شبه خطی می شود، همچنین تقریباً خطی است.
معادله (۱-۸) درضمن شبه خطی بودن چون u و u_y درضریب u_{xxx} ظاهرشده است بنابراین تقریباً خطی نیست.

تعریف ۱-۱-۶. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را همگن گوییم، اگر هر جمله ی معادله دیفرانسیل جزئی شامل متغیر وابسته و یا یکی از مشتقات آن باشد در غیر این صورت معادله دیفراسیل با مشتقات جزئی غیر همگن نامیده می شود.

مثال ۱-۱-۷.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = ۰, \qquad (۱-۹)$$

$$uu_{xx} + u_y^۲ = u^۲ + y, \qquad (۱-۱۰)$$

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱-۹) همگن و معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱-۱۰) غیر همگن است.

تعریف ۱-۱-۸. عدد تعادل که آن را با m نشان می دهیم توسط موازنه بین بالاترین مرتبه مشتق متغیر وابسته در قسمت خطی معادله دیفرانسیل با بالاترین توان متغیر وابسته دربخش غیرخطی ظاهر شده در معادله دیفرانسیل معمولی به دست می آید. طریقه به دست آوردن عدد تعادل را در فصل دوم به تفضیل توضیح خواهیم داد.

تعریف ۱-۱-۹. هر سیگنال قابل تشخیصی که از مکانی به مکان دیگر با سرعت تکثیر قابل شناختی حرکت می کند و در فضا و زمان معینی منتشر می شود و اغلب حامل انرژی است موج می گویند. اگر این آشفتگی در میدان های الکترومغناطیسی باشد، آن را الکترومغناطیسی می نامند. در امواج الکترومغناطیسی میدان های الکتریکی و مغناطیسی به طور عمود بر یکدیگر نوسان می کنند و با سرعت نور انتشار پیدا می کنند. نور و امواج رادیویی از این نوع هستند. موج ها به دو دسته امواج طولی و عرضی تقسیم می شوند. در امواج طولی، سرعت انتشار موج موازی با حرکت نوسانی آن است، در حالی که، در امواج عرضی این سرعت عمود بر آن است. امواج الکترو مغناطیسی از نوع امواج عرضی است.

تعریف ۱-۱-۱۰. امواجی که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نمایش داده می شوند، امواج سیار نامیده می شوند. چنین تابعی آشفتگی را نشان می دهد که با سرعت v حرکت می کند.

تعریف ۱-۱-۱۱. جواب موج سیار یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، جوابی است که به صورت $u(x,t) = f(x - vt)$ نوشته می شود. تئوری جواب های موج سیار[۱] یکی از زمینه های رو به گسترش در ریاضیات مدرن است که نوع خاصی از جواب ها هستند و از دید فیزیکی فرآیند انتقال را توصیف می کنند.

۱-۲ تاریخچه برخی از معادلات

۱-۲-۱ معادله غیرخطی شرودینگر

معادله شرودینگر[۲۳] ، معادله ای است که چگونگی تغییر حالت کوانتومی یک سامانه فیزیکی با زمان را توصیف می‌کند. این معادله در اواخر سال ۱۹۲۵ فرمول بندی شد و در سال ۱۹۲۶ توسط فیزیکدان اتریشی اروین شرودینگر منتشر گردید.

در مکانیک کلاسیک، معادله حرکت، قانون دوم نیوتن است و فرمولبندی های معادل آن، معادله اویلر- لاگرانژ[۲] و معادله هامیلتون[۳] هستند. در همه این فرمول بندی ها، برای حل حرکت یک سیستم مکانیکی و پیشگویی ریاضی اینکه سامانه در هر زمان پس از شرایط و پیکربندی های اولیه چه حالتی خواهد داشت، استفاده می شوند. در مکانیک کوانتومی مشابه قانون دوم نیوتن، معادله شرودینگر برای یک سامانه کوانتومی (معمولاً اتم ها، مولکولها، ذرات ریز اتمی (آزاد، بسته، موضعی)) است. این معادله یک معادله جبری ساده نیست ولی (عموماً)

[۱] The theory of travelling wave solution
[۲] Euler- Lagrange
[۳] Hamilton

یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی است. معادله دیفرانسیل شامل تابع موج برای سیستم است که حالت کوانتومی یا بردار حالت نیز نامیده می شود.

در تفسیر استاندارد از مکانیک کوانتومی، تابع موج کاملترین توضیحی است که می توان در مورد یک سامانه فیزیکی داد. راه حل های معادله شرودینگر نه تنها سامانه های مولکولی، اتمی و ریز اتمی را توصیف می کند بلکه سیستم های ماکروسکوپی، حتی کل جهان را نیز توصیف می کند. همانند قانون دوم نیوتن، معادله شرودینگر از لحاظ ریاضی می تواند به فرمولبندی های دیگر از جمله مکانیک ماتریسی ورنر هایزنبرگ و فرمولبندی انتگرال سطحی ریمان تبدیل شود. همچنین همانند قانون دوم نیوتون، معادله شرودینگر زمان را به طریقی توصیف می کند که برای نظریه های نسبیتی مناسب نیست. مشکلی که در مکانیک ماتریسی به اندازه کافی شدید نیست و در فرمولبندی انتگرال سطحی به طور کامل حضور ندارد.

۱-۲-۲ معادله برگر

معادله برگر را می‌توان ساده‌ترین مدل ریاضی برای ترکیب دو عامل پراهمیت و اساسی رفتارهای غیرخطی و نیز پخش و اتلاف انرژی در حوزه گسترده و پر از تنوع فیزیک و مکانیک امواج به‌حساب آورد.

به ازاء هر مقدار داده شده و مفروض ضریب لزجت ν، فرم عمومی معادله برگر عبارت است از:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

در اینجا جمله غیر خطی $u\frac{\partial u}{\partial x}$ مسئول پشته کردن و قدبلند نمودن موج، ایجاد شیبی تند و سرانجام بروز شوک می‌باشد. این در حالی است که جمله خطی $\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ درست در جهت مخالف اولی، روی در پخش کردن و مستهلک نمودن ساختارهای ایجاد شده در منحنی پروفیل موج را دارد.

هنگامی که داشته باشیم $\nu=0$، معادلهٔ غیر لزج برگر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

۱-۲-۳ معادله کادمتسو - پتویاشویلی

در ریاضیات و فیزیک، معادله کادمتسو- پتویاشویلی پس از بوریسوویچ [1] اولین بار در سال ۱۹۷۰ توسط فیزیکدانان شوروی به نام کادمتسو (۱۹۲۸-۱۹۹۸) و پتویاشویلی (۱۹۳۶-۱۹۹۳) نوشته شده، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که حرکت امواج غیرخطی را توصیف می‌کند. معادله کادمتسو- پتویاشویلی به عنوان تعمیم یافته بدیهی از معادله کورت وگ- د- ورایز مشتق شده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\partial_x(\partial_t u+u\partial_x u+\epsilon^2\partial_{xxx}u)+\lambda\partial_{yy}u=0$$

که در آن $\lambda=\pm 1$.

[1] Borisovich

صورت بالا نشان می‌دهد که در معادله فوق اگر کشش سطحی در مقایسه با نیروهای جاذبه ضعیف باشد $\lambda = +1$ است و اگر کشش سطحی قوی باشد $\lambda = -1$. پتویاشویلی یک تعمیم در ابعاد فضایی x و y است (از معادله کورت وگ- د- ورایز یک بعدی). از نظر فیزیکی، جهت انتشار موج خیلی از جهت x دور نیست به عنوان مثال تنها با تغییرات آهسته جواب‌ها، در جهت y همراه است.

همانند معادله کورت وگ-د- ورایز، معادله کادمتسو- پتویاشویلی کاملاً انتگرال پذیر است. هم‌چنین می‌تواند با تبدیل پراکندگی وارون مثل معادله غیرخطی شوردینگر حل شود. امواج معادله کورت وگ-د- ورایز به شدت یک بعدی هستند ولی در معادله کادمتسو- پتویاشویلی این محدودیت کم رنگ‌تر است، اگر چه در هر دوی این معادلات امواج مجبور به حرکت در جهت مثبت x هستند.

معادله کادمتسو- پتویاشویلی هم‌چنین می‌تواند امواج را در رسانه فرو مغناطیس به خوبی پالس ماده موج دو بعدی در چگال بوز- اینستین[1] مدل دهد.

[1] Bose-Einstein

فصل ۲

روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی

۲-۱ روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی

۲-۲ مقدمه

در این فصل، ابتدا به بیان روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی می‌پردازیم. سپس برای درک بهتر این روش، معادلات دو خطی کورت وگ یک بعدی و دو بعدی را حل می‌کنیم.

۲-۳ شرح روش زیر معادله دیفرانسیل معمولی برنولی

ما در این روش، جواب‌های معادله دیفرانسیل معمولی زیر را بیان می‌کنیم

$$G' + \lambda G = \mu G^{۲}, \tag{۲-۱}$$

که در آن $\lambda \neq ۰$ و $G = G(\xi)$ می‌باشد.

اگر $\mu \neq ۰$، معادله (۲-۱) نوعی معادله برنولی هست و جواب به صورت

$$G = \frac{۱}{\frac{\mu}{\lambda} + de^{\lambda\xi}}, \tag{۲-۲}$$

اگر $\mu = ۰$، جواب معادله (۲-۱) به صورت

$$G = de^{-\lambda\xi}, \tag{۲-۳}$$

که در آن d ثابت اختیاری می‌باشد.

مرحله اول: ابتدا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی به صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$P(u, u_t, u_x, u_y, u_{tt}, u_{xt}, u_{yt}, u_{xx}, u_{yy}, ...) = ۰. \tag{۲-۴}$$

برای بدست آوردن جواب‌های موج سیار از معادله (۲-۴) تبدیل موج

$$u(x, y, t) = u(\xi), \qquad \xi = \xi(x, y, t), \tag{۲-۵}$$

را معرفی می‌کنیم. تغییرات زیر را داریم

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ &= u' \frac{\partial \xi}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ &= u' \frac{\partial \xi}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_y &= \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{du}{d\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} \\
&= u'\frac{\partial \xi}{\partial y},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(u'\frac{\partial \xi}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial t} + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{du}{d\xi})\frac{\partial \xi}{\partial t} + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\
&= \frac{d}{d\xi}(\frac{du}{d\xi})\frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \\
&= u''(\frac{\partial \xi}{\partial t})^2 + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{xt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(u'\frac{\partial \xi}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} + u'\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} \\
&= \frac{d}{d\xi}(\frac{du}{d\xi})\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial t} \\
&= \frac{d^2 u}{d\xi^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial t} + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial t} \\
&= u''\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial t} + u'\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial t},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{yt} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(u' \frac{\partial \xi}{\partial t}) \\
&= \frac{\partial u'}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial t} \\
&= \frac{d}{d\xi}(\frac{du}{d\xi}) \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} \\
&= \frac{d^2 u}{d\xi^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} \\
&= u'' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(u' \frac{\partial \xi}{\partial x}) \\
&= \frac{\partial u'}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{du}{d\xi}) \frac{\partial \xi}{\partial x} + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\
&= \frac{d}{d\xi}(\frac{du}{d\xi}) \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \\
&= u''(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + u' \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},
\end{aligned}
$$