دانشگاه تهران

پردیس علوم

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پوشش گروه توسط زیرگروههایش

نگارش

پانیذ نوری اسکویی

استاد راهنما: دکتر محمدرضا درفشه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

دانشگاه تهران
پردیس علوم
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پوشش گروه توسط زیرگروههایش

نگارش: پانیذ نوری اسکویی

دکتر محمدرضا درفشه

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

ریاضی محض

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به پدر و مادرم

دو محراب دلم، دو عبادتگاه جانم

و تقدیم به شریک زندگی‌ام

محمد

چکیده

یک پوشش برای یک گروه مانند G یک خانواده از زیرگروه‌های محض اش است که اجتماعشان گروه G است. پوشش محض نامیده می‌شود اگر هیچ زیرخانواده‌ای از آن یک پوشش برای گروه نباشد. گروه‌هایی که با پوششی با n عضو پوشانده می‌شوند، گروه‌های n-پوششی نامیده می‌شوند. بحث اصلی ما گروه‌های ۵-پوششی، ۶-پوششی و ۷-پوششی است. اندیس یک گروه که n پوششی است، با تابعی از n کران دار شده است که ما می‌خواهیم در این بحث مقدار دقیق این کران را در حالت های $n = ۵, ۶, ۷$ بدست آوریم.

پیشگفتار

ما در این پایان‌نامه می‌خواهیم درباره پوشش گروه‌ها توسط زیرگروه‌های محض‌اش صحبت کنیم. یک پوشش برای یک گروه G، خانواده‌ای از زیرگروه‌های محض G است که G اجتماع آنهاست، ما از لفظ n-پوشش برای یک پوشش با n عضو استفاده می‌کنیم.

اسکورزا[۱] در سال ۱۹۲۶، [۱۶] ساختار همه گروه‌های ۳-پوششی را مشخص کرد و گرکو[۲] در مقاله‌ای که در سال ۱۹۵۶، [۱۰] به چاپ رسید، ساختار همه گروه‌های ۴-پوششی را بررسی کرد، همچنین بریس[۳]، فدری[۴] و سرنا[۵] در یک مقاله مشترک در سال ۱۹۹۷، [۵]، ساختار همه گروه‌های ۵-پوششی را مشخص کردند و عبدالهی، عطائی، جعفریان امیری و محمدی حسن‌آبادی در سال ۲۰۰۵، [۱]، گروه‌های ۶-پوششی را مورد بررسی قرار داده و در نهایت در سال ۲۰۰۷، گروه‌های ۷-پوششی در یک مقاله مشترک از عبدالهی و جعفریان امیری [۲]، بررسی شد.

این پایان‌نامه در پنج فصل تنظیم شده است.

در فصل اول، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی از نظریه گروه‌ها پرداخته و سپس بحث درباره پوشش گروه‌ها را با بیان تعریف پوشش و قضایای مربوط به آن آغاز می‌کنیم.

در فصل دوم، ساختارگروه‌های ۳-پوششی را مشخص کرده و به‌طور کلی برای عدد اول دلخواه p، درباره ساختار همه گروه‌هایی که عدد پوششی آنها $(p+۱)$ است، بحث خواهیم کرد.

در فصل سوم، ساختار گروه‌های ۵-پوششی را بررسی می‌کنیم، همچنین این موضوع را بررسی می‌کنیم که اندیس $[G:D]$، برای همه گروه‌های G که یک n-پوشش محض ماکسیمال بااشتراک D دارند، با تابعی از n کران دار شده‌است، بزرگترین اندیس $[G:D]$ را با نماد $f(n)$ مشخص می‌کنیم. در سال ۱۹۵۴، نیومن[۶] [۱۴]، ساختاری برای این کران بدست آورد و تامکینسون[۷] در سال ۱۹۸۷، مقدار دقیق $f(n)$ را برای $n=۵$ محاسبه کرد که ما اثبات آن‌را در فصل سوم می‌آوریم.

۱) Scorza
۲) Greco
۳) Bryce
۴) Fedri
۵) Serna
۶) Neumann
۷) Tomkinson

در فصل چهارم، ساختار گروه‌های ۶-پوششی را مشخص کرده و مقدار دقیق $f(۶)$ را که عبدالهی، عطائی، جعفریان امیری و محمدی حسن‌آبادی در سال ۲۰۰۵ در [۱] بدست آوردند مطرح کرده و اثبات آن‌را بیان خواهیم کرد.

در نهایت در فصل پنجم، گروه‌های ۷-پوششی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و مقدار دقیق $f(۷)$را که عبدالهی و جعفریان امیری در سال ۲۰۰۷، [۱] محاسبه کردند بیان و اثبات آن را می‌آوریم.

سپاسگذاری

از همه افرادی که در دوران تحصیلی‌ام به هر نحوی در رسیدن من تا این پایه نقش داشته‌اند، بویژه از آقای دکتر محمدرضا درفشه که راهنمایی پایان نامه‌ام را بر عهده داشته‌اند و همچنین از اساتید گرامی، آقای دکتر زارع نهندی و آقای دکتر دوستی که داوری این پایان نامه را به‌انجام رسانده‌اند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

فهرست مطالب

نمادها

$\mid A \mid$	عدد کاردینال مجموعه A
$\mid G \mid$	مرتبه گروه G
$\mid x \mid = O(x)$	مرتبه عضو x
$[n]$	مجموعه $\{۱, ۲, \dots, n\}$
$[n]^t$	زیرمجموعه t عضوی از $[n]$
$H \leq G$	H زیرگروه G
$H \lneqq G$	H زیرگروه سره(محض) G
$H \trianglelefteq G$	H زیرگروه نرمال G
$[G : H]$	شاخص H در G
C_n	گروه دوری از مرتبه n
$\mathbb{S}_n$	گروه متقارن روی n حرف
$\mathbb{A}_n$	گروه متناوب روی n حرف
$O_p(G)$	بزرگترین p-زیرگروه نرمال یکتای گروه G
$(G)^n = G \times \dots \times G$	حاصل‌ضرب مستقیم n کپی از گروه G
G'	زیرگروه جابه‌جاگر(مشتق)
$G^{(n)}$	مشتق nام
$H \rtimes G$	حاصل‌ضرب نیم مستقیم G و H
$Core_G(H) = H_G = \cap_{g \in G} H^g$	هسته زیرگروه H در G
$Z(G)$	مرکز گروه G
$C_G(H)$	مرکزساز H در G
$N_G(H)$	نرمال‌ساز H در G
$Aut(G)$	گروه خودریختی‌ها
$\frac{G}{N}$	گروه خارج‌قسمتی

∞	علامت بینهایت
$< \qquad >$	علامت زیرگروه تولید شده
$\mathrm{Syl_p(G)}$	سیلو p-زیرگروه G
G_ω	پایدارساز ω تحت G
$\mathrm{G \cong H}$	گروه G با گروه H یکریخت است
$\mathrm{H \hookrightarrow G}$	H در G می‌نشیند
$\Phi(G)$	زیرگروه فراتینی G

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل، ابتدا در بخش اول به مفاهیمی که در این پایان نامه به عنوان اطلاعات عمومی درباره نظریه گروه‌ها مورد نیاز هستند و مکرراً مطرح می‌شوند، می‌پردازیم. سپس در بخش دوم، گروه‌های n-پوششی و n-پوششی اولیه را تعریف کرده و چند نتیجه مقدماتی را که در فصلهای آتی در اثبات قضایا و لم‌ها کاربردهای بسیار دارند، به اثبات خواهیم رساند. ضمناً متذکر می‌شویم که تمامی گروه‌های مورد نظر در این پایان‌نامه گروه‌های متناهی بوده، مگر آنکه صراحتاً خلاف آن گفته شده‌باشد.

۱-۱. یادآوری برخی از مفاهیم نظریه گروه‌ها

تعریف گروه G را گروهی ساده گویند هرگاه تنها زیرگروه‌های نرمال آن، زیرگروه‌های بدیهی باشند.

تعریف گروه متناهی G را نیم‌ساده گویند اگر آن هیچ زیرگروه نرمال آبلی غیر بدیهی نداشته‌باشد.

تعریف فرض کنید G یک گروه نابدیهی است. زیرگروه N از G یک زیرگروه نرمال مینیمال نامیده می‌شود، هرگاه N زیرگروه نرمال نابدیهی از G باشد و اگر $H \trianglelefteq G$ و $H \leq N$، آنگاه N یا $H = ۱$.

تعریف گروه G را یک گروه مونولیت گویند، هرگاه تنها دارای یک زیرگروه مینیمال نرمال باشد.

تعریف اگر π یک مجموعه ناتهی از اعداد اول باشد، یک π-عدد، عدد صحیح مثبتی است که مقسوم علیه‌های اولش به π متعلق است. یک عضو از گروه G، π-عضو نامیده می‌شود اگر مرتبه‌اش یک π-عدد باشد. اگر هر عضو گروه G یک π-عضو باشد، گروه را π-گروه می‌نامند و اگر $\pi = \{p\}$ باشد، از لفظ p-عضو و p-گروه استفاده می‌شود. واضح است که هر عضو یک گروه متناهی یک p-عضو است اگر و تنها اگر مرتبه‌اش توانی

از p باشد.

تعریف فرض کنید p یک عدد اول است، در این صورت هر گروه به‌شکل $E = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ گروه آبلی مقدماتی نامیده می‌شود.

گزاره ۱-۱-۱. فرض کنید G یک p-گروه است و M یک زیرگروه ماکسیمال از G است، در این صورت M یک زیرگروه نرمال است و $[G : M] = p$.

برهان: چون G یک p-گروه و M یک زیرگروه ماکسیمال از G است، پس M یک زیرگروه سره از G می‌باشد. حال ازگزاره ۵.۲ از مرجع [۲۰] نتیجه می‌شود $\mathrm{M} < \mathrm{N_G(M)}$ و چون M زیرگروه ماکسیمال G فرض شده‌بود پس $\mathrm{N_G(M)} = \mathrm{G}$. درنتیجه M زیرگروه نرمال G است و در نهایت $\dfrac{G}{M}$ ساده است. از آنجاییکه G یک p-گروه بود، $\dfrac{G}{M}$ یک p-گروه ساده است و در نتیجه $\dfrac{G}{M} \cong \mathbb{Z}_p$ ، بدین ترتیب $[G : M] = p$ و گزاره ثابت می‌شود. ■

گزاره ۱-۱-۲. فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی و C یک زیرگروه دوری با مرتبه ماکسیمال در G است، در این صورت زیرگروه B از G وجود دارد به گونه‌ای که G=CB حاصل ضرب مستقیم داخلی زیرگروه‌های C و B است.

برهان: برای مشاهده اثبات می‌توانید به[۲۰] صفحه ۲۳۰ مراجعه کنید. ■

گزاره ۱-۱-۳. فرض کنید G یک p-گروه متناهی است در این صورت $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است.

برهان: بنابه گزاره ۷.۱، فصل سیزدهم از [۲۰] زیرگروه فراتینی زیرگروهی نرمال است. همچنین بنابه گزاره (۱-۱-۱) هر زیرگروه ماکسیمال M از p-گروهG، نرمال بوده و داریم $[G : M] = p$، پس $\dfrac{G}{M} \cong \mathbb{Z}_p$ و برای هر $x \in G$ داریم$x^p \in G$. چون این تعلق برای هر زیرگروه ماکسیمال برقرار است، پس برای هر $x \in G$، داریم $x^p \in \Phi(G)$ و این ثابت می‌کند که برای هر عنصر $x\Phi(G)$ از $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ داریم: $(x\Phi(G))^p = \Phi(G)$، یعنی عناصر نابدیهی گروه $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ از مرتبه p هستند. بنا به لم (۸.۱) از [۲۰] داریم: $G' \leq \Phi(G)$ که شرط لازم و کافی برای آبلی بودن گروه $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ است. بدین ترتیب ثابت می‌شود که $\dfrac{G}{\Phi(G)}$ آبلی مقدماتی است و حکم ثابت می‌شود. ■

تعریف گروه G را دو دوری گویند، هرگاه G یک زیرگروه نرمال دوری مانند A داشته باشد که $\frac{G}{A}$ نیز دوری باشد.

تعریف فرض کنید G گروه و $G_0, G_1, \ldots G_n$ زیرگروه‌هایی از آن باشند، یک سری از زیرگروه‌های G عبارت است از سری زیر:

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G \tag{1-1}$$

ضمناً در سری (۱-۱)، n را طول سری می‌نامیم.

الف) اگر در سری (۱-۱) برای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم $G_i \lhd G_{i+1}$، آنگاه سری (۱-۱) را یک سری زیر نرمال برای گروه G می‌نامند.

ب) اگر در سری (۱-۱) برای هر $0 \leq i \leq n$ داشته باشیم $G_i \lhd G$، آنگاه سری (۱-۱) را یک سری نرمال برای گروه G می‌نامیم.

ج) اگر سری $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ سری زیر نرمالی برای گروه G باشد آنگاه برای هر $0 \leq i \leq n-1$ $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ ها را عوامل سری فوق می‌نامیم.

د) اگر سری $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$ سری نرمالی برای گروه G باشد به طوریکه برای هر $0 \leq i \leq n-1$، $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ در مرکز $\frac{G}{G_i}$ قرار گیرد: $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z(\frac{G}{G_i})$، آنگاه سری فوق را یک سری مرکزی برای گروه G می‌نامیم.

ه) در سری (۱-۱) اگر هر G_i زیرگروه ماکسیمالی در G_{i+1} باشد، سری را سری ترکیبی و اگر هر G_i در مجموعه زیرگروه‌های نرمال G که در G_{i+1} قرار دارند ماکسیمال باشد، سری را اصلی می‌نامیم.

تعریف گروه G یک گروه پوچتوان نامیده می‌شود اگر دارای یک سری مرکزی باشد.

تعریف فرض می‌کنیم که G یک گروه است و فرض می‌کنیم K کوچکترین زیرگروه نرمال از G است که $\frac{G}{K}$ پوچتوان باشد، دراینصورت $\frac{G}{K}$ را مانده پوچتوان می‌نامیم.

در ادامه بحث در باره گروه‌های پوچتوان به چند قضیه و لم اشاره می‌کنیم که می‌توانید برای مشاهده برهان آن ها به [۲۰] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۱-۴. اگر p عددی اول باشد، آنگاه هر p-زیرگروه متناهی پوچتوان است.

قضیه ۱-۱-۵. حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی گروه پوچتوان، پوچتوان است.

لم ۱-۱-۶. اگر G گروهی پوچتوان و H زیرگروه سره‌ای از آن باشد، آنگاه H زیرگروه سره‌ای از $\mathrm{N_G(H)}$ است.

قضیه ۱-۱-۷. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد، عبارات زیر برای گروه G معادلند:

الف) G گروهی پوچتوان است.

ب) هر زیرگروه ماکسیمال از G در G نرمال است.

ج) برای هر عدد اول p، هر p-سیلو زیرگروه از G، نرمال است.

د) G حاصلضرب مستقیم زیرگروهای سیلوی خود است.

تعریف فرض کنید G یک گروه باشد، سری زیرنرمال

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G \qquad (۱-۲)$$

را یک سری آبلی نامیم اگر تمامی عوامل آن گروه‌های آبلی باشند.

تعریف گروه G را گروهی حلپذیر نامیم اگر آن دارای سری آبلی باشد.

قضیه ۱-۱-۸.

الف) زیرگروه‌ها و تصاویر همریختی ها از یک گروه حلپذیر، حلپذیر هستند.

ب) اگر $N \lhd G$ باشد و N و $\frac{G}{N}$ هر دو حلپذیر باشند، G نیز حلپذیر است.

ج) حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی گروه حلپذیر، گروهی حلپذیر است.

برهان: به [۲۰] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱-۱-۹. فرض کنید G یک گروه متناهی است، شرایط زیر هم ارزند:

الف) G حلپذیر است.

ب) هر عامل ترکیبی G از مرتبه عدد اول است.

ج) هر عامل اصلی در یک سری اصلی G، آبلی مقدماتی است.

برهان: به [۲۰] مراجعه کنید. ■

قضیه ۱-۱-۱۰. فرض کنید L و M زیرگروه‌های ماکسیمال مجزا از گروه متناهی حلپذیر G باشد، پس شرایط زیر برای گروه G، هم ارزند:

الف) L مزدوج M در G است.

ب) $LM \neq G$

ج) LM یک زیرگروه G نیست.

برهان: برای مشاهده برهان این قضیه به [۷] صفحه ۵۷، مراجعه کنید. ■

در ذیل به یکی از قضایای تاریخی و مهم در نظریه گروه‌های متناهی اشاره می‌کنیم و از آنجا که اثبات آن نیازمند دانستن مقدمات زیادی از نظریه نمایش گروه‌های متناهی می‌باشد، از ذکر اثبات آن خودداری کرده و خواننده را به [۷] صفحه ۲۱۰، ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۱۱. ((p و q) برنساید[۸]) فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه $p^a q^b$ باشد به گونه ای که p و q اعداد اول هستند، آنگاه G حلپذیر است.

در ادامه قضیه پ.هال[۹] را که یکی از نتایج بسیار مهم در نظریه گروه‌ها می‌باشد مطرح می‌کنیم ولی به دلیل طولانی بودن اثبات تنها به صورت آن اکتفا کرده و خواننده را به [۱۳] ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۱۲. فرض کنیم G گروهی حلپذیر و از مرتبه mn (که ۱=(n و m)) باشد، در این صورت:

الف) G شامل زیرگروهی از مرتبه m است.

ب) هر دو زیرگروه از مرتبه m در G مزدوج است.

ج) هر زیرگروه از مرتبه k (که $k \mid m$) در G در یک زیرگروه از مرتبه m در G قرار می‌گیرد.

تعریف گروه G، ابرحلپذیر نامیده می‌شود هرگاه دارای سری نرمال مانند (۱-۲) بوده به‌طوریکه هرکدام ازگروه‌های عامل $\frac{G_i}{G_{i-1}}$ ، $1 \leq i \leq n$ دوری باشند.

---

۸) Burnside's$p^a q^b$-Theorem

۹) P.Hall

تعریف فرض کنید U و V زیرگروه‌های G هستند، V را مکمل U در G گویند هرگاه UV=G و $U \cap V = 1$.

تعریف یک گروه متناهی G اولیه نامیده می‌شود اگر آن یک زیرگروه ماکسیمال M داشته باشد به طوریکه $\mathrm{Core_G(M)} = 1$. در این حالت M را پایدارساز از G می‌نامیم.

در واقع ما می‌توانیم گروه اولیه را با استفاده از عمل گروه بر مجموعه Ω تعریف کنیم.

تعریف گوئیم گروه G بر مجموعه Ω عمل می‌کند، هرگاه برای هر $g \in G$ وهر $\omega \in \Omega$ نگاشت زیر وجودداشته باشد:

$$\Omega \times G \longrightarrow \Omega$$

$$(\omega, g) \rightarrowtail \omega^g$$

الف) $\omega^1 = \omega$ ، برای هر $\omega \in \Omega$

ب) $(\omega^g)^h = \omega^{gh}$ ، برای هر $\omega \in \Omega$ و $g, h \in G$.

تعریف فرض کنید G روی Ω عمل می‌کند و $\omega \in \Omega$، در این صورت $\mathrm{G}_\omega = \{\mathrm{g} \in \mathrm{G} \mid \omega^{\mathrm{g}} = \omega\}$ پایدارساز ω تحت G می‌نامند.

تعریف فرض کنید $\Delta \subseteq \Omega$، $\Delta^g = \{\delta^g \mid \delta \in \Delta\}$ ، برای هر$g \in G$ ، Δ را یک بلوک می‌نامیم هرگاه:

الف) $\Delta^g = \Delta$، برای هر $g \in G$

ب) $\Delta^g \cap \Delta = \emptyset$

$\Delta = \Omega$ و $\Delta = \{\omega\}$ بلوک های بدیهی هستند.

حال با توجه به تعاریف بالا، گروه G اولیه نامیده می‌شود، اگر تنها بلوک G ، بلوک های بدیهی باشند.

لم ۱-۱-۱۴. فرض کنید G یک گروه متناهی غیر بدیهی باشد:

الف) اگر M زیرگروه ماکسیمال G باشد، پس $\dfrac{\mathrm{G}}{\mathrm{Core_G(M)}}$ اولیه است. ب) اگر $K \lhd G$ و $\dfrac{G}{K}$ اولیه باشد

پس G یک زیرگروه ماکسیمال مانند M دارد به طوریکه $\mathrm{K} = \mathrm{Core_G}(\mathrm{M})$.

برهان: به [۷] صفحه ۵۷ مراجعه کنید. ■

قضیه ۱-۱-۱۵. فرض کنید G یک گروه اولیه حلپذیر با پایدارساز M باشد.

الف) G یک زیرگروه مینیمال نرمال مانند N دارد، پایدارساز M مکمل های N و G است و $\mathrm{N} = \mathrm{C_G}(\mathrm{N})$.

ب) اگر p عدد اول باشد که $| N || p$ پس $\mathrm{O_p}(\mathrm{M}) = ۱$.

ج) همه مکمل های N در G با M مزدوج هستند.

برهان: به [۷] صفحه ۵۵ مراجعه کنید. ■

در ادامه، بحث در باره گروه‌های اولیه را با یک تذکر به پایان می‌رسانیم.

تذکر ۱-۱-۱۶. الف) تنها گروه‌های اولیه از درجه ۵، $C_۵, C_۵ \rtimes C_۲, C_۵ \rtimes C_۴, \mathbb{A}_۵, \mathbb{S}_۵$ هستند.

ب) تنها گروه‌های اولیه از درجه ۶، $\mathbb{A}_۵, \mathbb{A}_۶, \mathbb{S}_۵, \mathbb{S}_۶$ هستند.

در ادامه، این قسمت ما می‌خواهیم به طور خلاصه در باره حاصلضرب مستقیم و نیم مستقیم گروه‌ها صحبت کنیم، بدین منظور به مطرح کردن گزاره‌ها و نتایج زیر بدون اثبات اکتفا می‌کنیم.علاقه مندان می‌توانند برای مطالعه بیشتر به [۲۰] مراجعه کنند.

گزاره ۱-۱-۱۷. فرض کنید G حاصلضرب مستقیم داخلی زیرگروه‌های $G_۱, \ldots, G_n$ است، در اینصورت داریم: $G \cong G_۱ \times \ldots \times G_n$.

گزاره ۱-۱-۱۸. فرض کنید H و K گروه‌های متناهی اند و $(| H |, | K |) = ۱$، در اینصورت هر زیرگروه $H \times K$ به صورت $A \times B$ است که $A \leq H, B \leq K$.

گزاره ۱-۱-۱۹. فرض کنید H و K گروه‌های نرمال گروه G هستند در اینصورت $\frac{G}{H \cap K}$ با زیرگروهی از $\frac{G}{H} \times \frac{G}{K}$ یکریخت است.

تعریف فرض کنید G و Hدو گروه‌اند. گوئیم G روی H عمل می‌کند هرگاه G روی H به عنوان مجموعه عمل کند و به علاوه داشته باشیم:

برای هر $g \in G$ و برای هر $x, y \in H$: $(xy)^g = x^g y^g$

اگر گروه G روی گروه H عمل کند، آنگاه با استفاده از شرایط بالا می‌توان همریختی زیر را تعریف کرد:

$$\varphi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Aut(H)}$$

$$g \rightarrowtail \varphi_g$$

که φ_g یک خودریختی H با ضابطه زیر است:

$$\varphi_g(x) = x^{g^{-1}} = gxg^{-1}$$

تعریف فرض کنید گروه G بر گروه H عمل می‌کند، در اینصورت حاصلضرب دکارتی $H \times G$ با قانون ترکیب زیر برای هر $g, h \in G$ و هر $x, y \in H$ یک گروه است:

$$(x, g)(y, h) = (x^h y, gh)$$

گروه بالا را حاصلضرب نیم مستقیم H و G نسبت به عمل داده شده G بر H می‌نامند و با $H \rtimes G$ نمایش می‌دهند.

تعریف گوئیم G حاصلضرب نیم مستقیم از خانواده گروه‌های $\{G_i \mid i \in I\}$ است اگر یک خانواده از زیرگروه‌های نرمال $\{N_i \mid i \in I\}$ از G وجود داشته باشد به طوریکه $\cap_{i\in S} N_i = 1$ و برای هر $i \in I$، $\frac{G}{N_i} \cong G_i$.

در پایان این بخش به چند مطلب بسیار مهم که در طول این پایان نامه مکرراً استفاده شده اشاره می‌کنیم که خواننده می‌تواند برای مشاهده برهان آنها به منابع گفته شده مراجعه کند.

قضیه ۱-۱-۲۰. فرض کنید که G گروه باشد و $H \leq G$. به علاوه فرض کنید X مجموعه همدسته های راست (چپ) H در G باشد، در اینصورت یک همریختی مانند $\varphi : G \longrightarrow S_X$ وجود دارد به طوریکه $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Core_G(H)}$ و بنابراین $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{Core_G(H)}} \hookrightarrow \mathrm{S_X}$.

برهان: به [۲۰] مراجعه کنید.

قضیه ۱-۱-۲۱. (قضیه NC) اگر G گروه و $H \leq G$ باشد در آن صورت

$$\frac{\mathrm{N_G(H)}}{\mathrm{C_G(H)}} \cong\leq \mathrm{Aut(H)}$$

برهان: به [۲۰] مراجعه کنید.

گزاره ۱-۱-۲۲. فرض کنید M یک مکمل برای یک زیرگروه مینیمال آبلی N از گروه متناهی G باشد، پس $\mathrm{Core}_G(M)$ یک مکمل N در $C_G(N)$ است.

برهان: به [۱۷]، صفحه ۵۹ مراجعه کنید.