فصل اول

مقدمه

۱-۱- پیشگفتار

پوسته‌ها کاربرد وسیعی در بسیاری از شاخه‌های مهندسی دارند. به‌عنوان مثال در هواپیماها، فضاپیماها، برج‌های خنک کننده، رآکتورهای هسته‌ای، سیلوها و مخازن نگه‌داری مواد جامد و مایع، لوله‌های تحت فشار و . . . به‌کار می‌روند. یکی از مهم‌ترین مسائل در طراحی پوسته‌ها مقاومت کمانشی پوسته تحت بارهای وارد بر آن است و علی‌رغم تحقیقات فراوان در دهه‌های اخیر، دانش ما در بعضی از مسائل کمانش پوسته‌ها محدود می‌باشد.

این محدودیت دانش به‌علت دو موضوع اساسی می‌باشد: نخست این‌که مسئله‌ی کمانش پوسته‌ها به طور نسبی پیچیده است، به‌گونه‌ای که تنها به‌وسیله‌ی معادلات دیفرانسیل جزئی غیر خطی قابل توصیف بوده و حل چنین معادلاتی به‌جز در موارد خاص و ساده بسیار دشوار می‌باشد. علت دیگر این‌که بر خلاف صفحات، پوسته‌ها عموماً به ناکاملی‌های هندسی که در فرآیند ساخت روی می‌دهد بسیار حساس هستند. تاکنون تحقیقات آزمایشگاهی بسیاری در زمینه‌ی کمانش پوسته‌ها انجام گرفته و از روش‌های آماری برای تبدیل نتایج آزمایشگاهی به معیارهای عملی استفاده شده‌است.

در سال‌های اخیر دسترسی به یارانه‌های قوی، گسترش روش‌های پیشرفته‌ی اجزای محدود و سایر روش‌های عددی و همچنین برنامه‌های تجاری مختلف، نخستین مشکل مسئله‌ی کمانش پوسته‌ها را تا حدودی حل کرده است، ولی مشکل دوم که همان حساس بودن به ناکاملی‌ها، شرایط مرزی و... می‌باشد، همچنان به قوت خود باقی است. به‌گونه‌ای که ارائه‌ی یک روش قابل اطمینان که بتواند بار کمانشی به‌دست آمده از روش‌های عددی را به مقاومت کمانشی پوسته مربوط کند، بزرگترین چالشی است که محققان با آن روبرو هستند و در برخی موارد، نتایج تجربی تا ٪۵۰ کم‌تر از مقادیر عددی به‌دست آمده می‌باشند.

باتوجه به این‌که نا کاملی‌های هندسی مهم‌ترین عامل در عدم تطابق بین نتایج عددی و تجربی می‌باشد، استفاده‌ی مناسب از سخت کننده‌های طولی و عرضی می‌تواند ظرفیت پوسته را تا حد کمانش کلی بالا ببرد و ضریب اطمینان پوسته‌ها را افزایش دهد. نکته‌ی قابل توجه در این حالت این است که، هم کمانش موضعی پوسته‌ی بین سخت کننده‌ها و هم کمانش خود سخت کننده ممکن است باعث ناپایداری پوسته شود [۱].

در بسیاری از کاربردهای صنعتی، نیاز به استفاده از پوسته‌هایی که در بدنه‌ی خود دارای بازشو هستند، وجود دارد. در این حالت تمرکز تنش و کمانش موضعی در اطراف بازشو باعث پیچیده‌تر شدن مسئله می‌گردد. بدیهی

است که در این حالت عوامل مختلفی از جمله شکل، ابعاد و موقعیت بازشو بر ظرفیت پوسته تأثیر می‌گذارد. پرداختن به این مباحث موضوع اصلی این پایان‌نامه می‌باشد.

۱-۲- مفهوم پایداری

۱-۲-۱- تعادل سیستم مکانیکی

سیستم سازه‌ای به سازه و بارهای اعمالی به آن اطلاق می‌شود. در واقع دو خاصیت اساسی در یک سازه، آن را در تعامل با بارها مقاوم می‌سازد. این دو خاصیت اساسی عبارتند از:

۱- مواد تشکیل‌دهنده اجزای سازه.

۲- شکل هندسی سازه.

هر سازه به شکل خاصی طراحی می‌شود و انتظار می‌رود که تا پایان عمر بهره‌برداری از سازه، شکل و فرم اصلی خود را حفظ کند. تغییر شکل‌های زیاد در نظر استفاده کننده نامطلوب است. کمانش حالتی از باربری یک سازه است که سازه توانایی تحمل بارها را با شکل اولیه و اصلی خود ندارد. لذا تغییر شکل در سازه به منظور یافتن حالتی برای تعادل می باشد. پیامدهای کمانش، تغییرشکل زیاد و کاهش ظرفیت باربری است.

از نظر تحلیلی، برای هر سیستم با رفتار فیزیکی وابسته به زمان، یک سازوکار مطابق با رابطه‌های (۱-۱) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \phi(\lambda, u) & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

در این رابطه‌ها، u تابع تغییرشکل و پارامتر λ، بار وارد بر سازه، یک عدد حقیقی می‌باشد و زمانی که $\phi(\lambda, u) = 0$ باشد، حالت سکون رخ می‌دهد. رابطه (۱-۲) انرژی پتانسیل کل را با استفاده از قانون دالامبر بیان می کند.

$$\phi = U_e + W_{ext} \qquad (۲-۱)$$

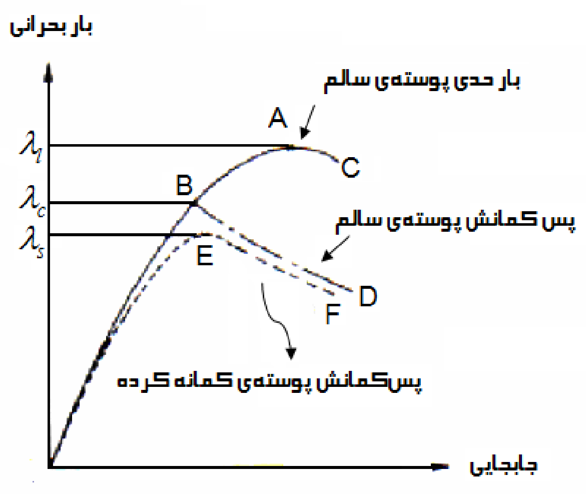
U_e انرژی کرنشی سازه و W_{ext} کار انجام شده به وسیله نیروهای خارجی اعمالی بر سازه می‌باشد. اگر دستگاه معادلات رابطه‌های (۱-۱) و رابطه (۱-۲) به ازای مقادیر مختلف λ تغییرات کیفی زیادی نداشته باشد، نقطه

تعادل عادی و اگر تغییرات مقادیر معادلات به ازای تغییرات ناچیز λ بسیار زیاد باشد، نقطه تعادل نقطه بحرانی خوانده می‌شود و پارامتر λ را λ_c می‌نامند.

در نقـطه بحرانی با افزایش بار، سازه می‌تواند مسـیر تعادل اولیه را طی کند و یا این‌که در مسـیر تعادل ثانویه جـابه جا شود. حرکت در این مسیرها بسته به رابطه (۱-۲) می‌باشد، یعنی همواره سازه مسیری را برای تعادل طی می‌کند که انرژی پتانسیل کمینه شود.

۱-۲-۲- مسیرهای تعادل و حالت‌های بحرانی

منظور از مسیرهای تعادل، منحنی بارگذاری - تغییرمکان می باشد (شکل۱-۱). مسیرتعادلی که حاصل از شکل اصلی سازه در برابر بارها می‌باشد، مسیر تعادل پایه یا مسیر تعادل اولیه خوانده می‌شود و این حالت نشان‌گر حالت پیش از کمانش است. این مسیر ممکن است خطی و یا غیرخطی باشد. باری که باعث تغییر شکل در این مسیر می‌شود بار کمانشی و شکل حاصل مد کمانشی خوانده می‌شود.



شکل (۱-۱)- مسیرهای تعادل در پایداری پوسته [۲]

بار کمانشی موجب دو حالت تغییر شکل در مسیر تعادل می‌شود:

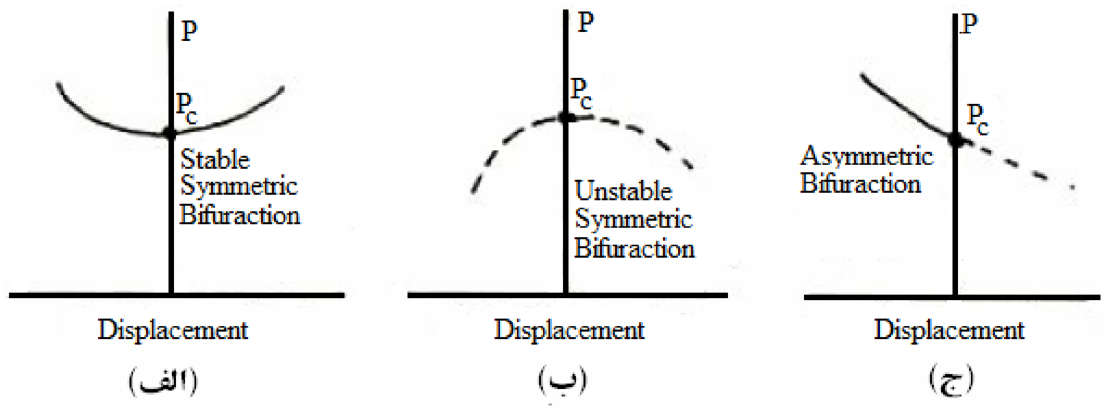
حالت اول[1]: زمانی که مسیر خطی یا غیر خطی پایه به مد نهایی بار می‌رسد، که در این نقطه شیب منحنی صفر می‌شود. این حالت نقطه حدی[2] گفته می‌شود (نقاط A و E).

1 Snap Buckling
2 Limit Point

حالت دوم[1]: خط پایه پس از رسیدن به نقطه خاص در مسیر دیگری حرکت می‌کند (شکل(۱-۱)) که به این نقطه، نقطه شکست[2] گفته می‌شود (نقطه B).

به نقاط حدی و شکست، نقاط بحرانی گفته می‌شود. کمانش وقتی رخ می‌دهد که سیستم سازه‌ای پس از اعمال بار و تغییرشکل دیگر قادر به برگشتن به حالت اولیه نباشد. پس از عبور از نقطه بحرانی سازه هم می‌تواند پایدار باشد و هم ناپایدار شود، رفتار پس از کمانش سازه به نام پس کمانش خوانده می‌شود. برخی از سازه‌ها بلافاصله پس‌از حالت بحرانی دچار ناپایداری می‌شوند. اما سازه‌هایی همچون پوسته‌ها پس‌از کمانش بازهم توانایی تحمل بار را دارند. این سازه‌ها، سازه‌هایی هستند که پس از کمانش، پایدار باقی می‌مانند. در سال ۱۹٤٥، کویتر[3] رفتار پس‌کمانشی را مورد بررسی قرار داد و پس کمانش را به سه دسته تقسیم‌بندی کرد [۲].

۱) پایداری متقارن در نقطه شکست: زمانی‌که مماس برمسیر تعادل در نقطه‌ی شکست افقی باشد، حالت پس از نقطه بحرانی حالتی پایدار است و سازه می‌تواند باری بیش از P_c را تحمل کند. این رفتاردر صفحات و پوسته ها دیده می‌شود (شکل(۱-۲ -الف)).



شکل (۱-۲)- رفتارهای مختلف کمانشی در سازه [۳]

۲) ناپایداری نامتقارن نقطه شکست: مماس برمسیر تعادل در نقطه شکست به صورت افقی است، ولی سیر تعادل به صورت ناپایدار است و سازه نمی‌تواند باری علاوه بر P_c تحمل کند. این رفتار عمدتاً در ستون‌ها مشاهده می‌گردد (شکل(۱-۲- ب)).

3 Bifurcation Buckling
2 Bifurcation Point
3 Koiter

۳) نقطه شکست غیرمتقارن: مماس بر نقطه شکست به صورت افقی نیست و مسیر تعادل پایدار به حالت ناپایدار تبدیل می‌شود و سازه توانایی تحمل بار بیشتر از بار P_c را ندارد. رفتار مذکور معمولاً در قاب‌ها مشاهده می‌شود (شکل(۳-۲ - ج)).

۱-۳- تاریخچه

موضوع کمانش پوسته‌های استوانه‌ای از دیرباز مورد توجه محققان قرار داشته‌است. نخستین مسئله‌ی حل شده‌ی کمانش این نوع پوسته‌ها، کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری بود که توسط لورنز[1] در سال ۱۹۰۸ انجام گرفت [٤]. براساس نتایج آزمایشگاهی انجام شده توسط رابرتسون[2] [٥] در سال ۱۹۲۹، مشخص شد که ظرفیت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای کمتر از مقادیر تئوری است. همین عدم تطابق منجر به تحقیقات فراوانی در دهه‌های بعد گردید. تحقیقات ویلسون و نیومارک[3] [٦] در سال۱۹۳۳ و محققان دیگر نشان داد که این اختلاف ناشی از عوامل مختلفی از جمله شرایط مرزی، خروج از محوری نا خواسته‌ی بار و مهم‌تر از همه ناکاملی هندسی پوسته می‌باشد. بر اساس تحقیقات سینگر[4] و همکاران [۷] درسال ۱۹٦۷،مشخص گردید که با تقویت مناسب پوسته‌های استوانه‌ای به‌وسیله‌ی سخت‌کننده، می‌توان از حداکثر ظرفیت پوسته در تحمل بار استفاده کرد.

پوسته‌های استوانه‌ای دارای بازشو یکی از مهم‌ترین مسائلی است که در دهه‌های اخیر توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده است. ون دیک[5] [۸] در سال ۱۹٦٥ توزیع تنش در اطراف بازشو در پوسته‌ی استوانه‌ای تحت بار محوری، پیچشی و فشار داخلی را بررسی کرد. بروگان و آلمورت[6] [۹] در سال ۱۹۷۰ بر روی تأثیر بازشوهای مستطیلی تقویت شده بر روی بار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای مطالعاتی انجام دادند و نتایج را با برنامه‌ی اجزای محدود STAGS مقایسه کردند. جنکینز[7] [۱۰] در همان سال، یک مطالعه‌ی آزمایشگاهی بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با دو بازشو تحت بار محوری انجام داد.

تودا[8] [۱۱] در سال۱۹۸۳ یک مطالعه‌ی آزمایشگاهی بر روی پوسته‌های استوانه‌ای با بازشوهای دایره‌ای، مربعی و مستطیلی انجام داد و نتیجه گرفت که اگر بازشوها به‌اندازه‌ی کافی کوچک باشند، تأثیری در مقاومت پوسته‌ی استوانه‌ای ندارند، در حالی‌که بازشوهای بزرگتر کاهش قابل ملاحظه‌ای در بار بحرانی دارند. او همچنین یک سخت کننده‌ی حلقه‌ای شکل در اطراف بازشو قرار داد و تأثیر آن را بر ظرفیت کمانشی پوسته

1 Lorenz
2 Robertson
3 Wilson, Newmark
4 Singer
5 Van Dyke
6 Brogan, Almorth
7 Jenkins
8 Toda

بررسی کرد. جولین و لیمام[1] [۱۲] در سال ۱۹۹۸ بر روی تأثیرات بازشوهای مربعی، مستطیلی و دایره‌ای شکل بر روی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار محوری مطالعاتی انجام داده و نتایج را به‌صورت رابطه‌های پارامتری برای شکل‌های مختلف بازشو ارائه کردند. آنها در مطالعات خود از برنامه‌ی اجزای محدود CASTEM 2000 استفاده کردند. هایبرگر[2] با همکاران [۱۳] در سال ۲۰۰۱ تحلیل کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای چندلایه با بازشوی دایره‌ای شکل در وسط طول استوانه را انجام داد و در آن تأثیرات ابعاد بازشو، انحنای پوسته و . . . را به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار داد و نتایج را با تحلیل‌های عددی انجام گرفته با برنامه‌ی اجزای محدود STAGS مقایسه کرد و دریافت که نتایج تحلیل غیر خطی دقیق‌تر از نتایج تحلیل خطی مرسوم می‌باشد. تفرشی[3] [١٤] در سال ۲۰۰۲ با استفاده از نرم افزار ABAQUS رفتار کمانشی و پس کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای چند لایه تحت بار محوری و فشار داخلی را مورد بررسی قرار داد و دریافت که افزایش فشار داخلی باعث بالا رفتن ظرفیت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای می‌شود.

هان[4] و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۰٦ رفتار کمانشی و پس‌کمانشی پوسته‌های آلومینیومی با بازشوهای مربعی شکل را با استفاده از نرم افزار ANSYS مورد بررسی قرار دادند و نتایج حاصل را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند. آنها با بررسی نمودار تنش فون - مایزز در مراحل مختلف بارگذاری به بررسی مکانیسم کمانش پوسته‌های استوانه‌ای با ضخامت متوسط و نازک پرداختند.

شریعتی و مهدی‌زاده[5] [١٦] در سال ۲۰۰۸ کمانش و پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ای فولادی را با بازشوهای بیضی شکل در موقعیت‌های مختلف مورد برسی قرار داده و نتایج را با نتایج حاصل از نرم‌افزار ABAQUS مقایسه کردند. آنها در ادامه‌ی کارشان با استفاده از روش لاگرانژ[6] رابطه‌های تجربی را برای پوسته‌های استوانه‌ای مختلف با استفاده از پارامترهای بی‌بعد ارائه کردند.

۱-٤- ساماندهی پایان نامه

در فصل اول، اهمیت و کاربرد پوسته‌های استوانه‌ای، ضرورت بررسی رفتار کمانشی پوسته‌ها، مفاهیم پایداری و تاریخچه‌ی مهمترین تحقیقات انجام گرفته در زمینه‌ی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای بیان شده است.

در فصل دوم، تئوری تحلیل کمانشی پوسته‌ها بیان می‌گردد. در این فصل، ابتدا مبانی نظریه‌ی صفحات و پوسته‌ها بیان می‌شود. سپس چگونگی به‌کارگیری این مبانی در تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد.

---

1 Jullien, Limam
2 Hilburger
3 Tafreshi
4 Haipeng Han
5 Shariati, Mahdizadeh
6 Lagrangian Polynomial Method

در فصل سوم، ابتدا به روش اجزای محدود در تحلیل کمانشی پوسته‌ها پرداخته می‌شود. در ادامه، با توجه به کاربردهای صنعتی مورد نیاز، اثر بازشو بر مقاومت کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد و در پایان مبانی تقویت پوسته‌های استوانه‌ای بررسی می‌شود.

فصل چهارم، به مراحل مختلف تحلیل کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای با استفاده از نرم افزار ANSYS اختصاص می‌یابد. در این فصل پوسته‌های استونه‌ای با تعداد جزءهای مختلف تحلیل کمانشی شده و تعداد جزء مورد نیاز برای همگرا شدن جواب‌ها تعیین می‌گردد. در پایان فصل رفتار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای با ابعاد مختلف بررسی می‌شود.

درفصل پنجم، تحلیل کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای دارای بازشو مورد توجه قرار می‌گیرد. در این فصل بار کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای با ابعاد مختلف و دارای بازشوهایی در موقعیت‌های مختلف تعیین و تأثیر این پارامترها بر ظرفیت کمانشی پوسته‌ها با ارائه‌ی نمودارهایی بررسی می‌شود.

در فصل ششم، تأثیر تقویت پوسته‌های استوانه‌ای دارای بازشو با استفاده از دو نوع سخت‌کننده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در پایان ، ضمن نتیجه‌گیری از کارهای انجام شده در این پایان‌نامه، پیشنهادهای جدید برای ادامه‌ی کار ارائه ارائه می‌گردد.

فصل دوم

تحلیل کمانشی پوسته‌ها

۲-۱- پیشگفتار

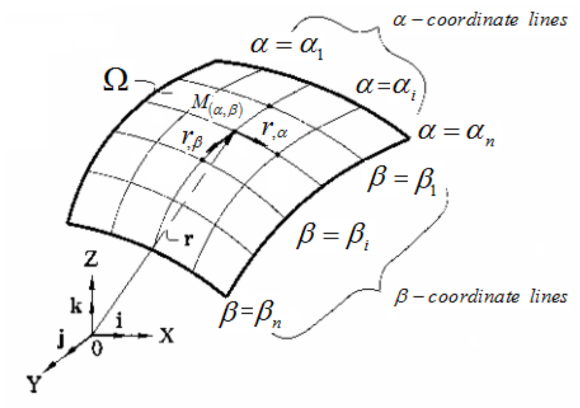
پوسته‌های استوانه‌ای یکی از فراوان‌ترین و متنوع‌ترین فرم‌های سازه‌ای هستند که کاربرد زیادی در صنعت دارند. به‌علت کم بودن ضخامت پوسته در مقایسه با سایر ابعاد آن، اغلب کمانش به عنوان یک حالت حدی برای تحلیل پوسته محسوب می‌گردد. ازاین‌رو، درک رفتار کمانشی آن برای مقاصد طراحی ضروری است. تحلیل کمانشی پوسته‌ها اساساً به دو روش انرژی و معادلات تعادل صورت می‌گیرد. در این فصل به معرفی این روش‌ها پرداخته می‌شود. برای نوشتن معادلات تعادل و انرژی کرنشی پوسته‌ها نیاز به مقدماتی از نگره‌ی صفحات و پوسته‌ها می‌باشد که بخش آغازین فصل به این مبانی اختصاص یافته‌است.

در این فصل ابتدا، به روش تعادل در حل مسائل کمانش پوسته‌ها و چگونگی به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل تعادل حاکم بر پوسته‌های نازک پرداخته می‌شود. در ادامه روش انرژی، شرایط کاربرد آن، نحوه‌ی محاسبه‌ی انرژی کرنشی قبل و بعد از کمانش و در نهایت معادله‌ی انرژی معرفی می‌گردد.

در پایان، دو مسئله‌ی پر کاربرد کمانش پوسته‌ها، استوانه‌ی تحت بار محوری و فشار جانبی یکنواخت با تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌ها، به ترتیب با روش انرژی و معادلات تعادل تحلیل گردیده و بار بحرانی آن‌ها ارائه می‌شود.

۲-۲- هندسه‌ی سطح میانی پوسته

سطح میانی یک پوسته، سطحی است که در هر نقطه از پوسته، ضخامت آن را نصف می‌کند. یک سطح میانی دلخواه Ω (شکل (۲-۱)) ، توسط نقاطی که موقعیت آنها به وسیله بردار $\vec{r}$ نسبت به مبدأ مختصات کلی بیان می‌شود، مشخص می‌گردد. بردار $\vec{r}$ خود می‌تواند توسط دو پارامتر مستقل α و β که خطوطی بر هم عمودند و سطح مورد نظر را شبکه‌بندی می‌کنند، تعریف شود [۱۷].



شکل (۲-۱)- نمایش مختصات خطی و کارتزین [۱۷]

با توجه به شکل (۲-۱)، بردار $\vec{r}$ به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\vec{r}=r(\alpha,\beta)=x(\alpha,\beta)\hat{\mathrm{i}}+y(\alpha,\beta)\hat{\mathrm{j}}+z(\alpha,\beta)\hat{\mathrm{k}} \tag{۲-۱}$$

روشن است که در هر نقطه روی سطح، $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}$ و $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}$ که به ترتیب با $\vec{r}_{,\alpha}$ و $\vec{r}_{,\beta}$ نشان داده می‌شوند، بردارهای مماس بر سطح در آن نقطه در راستای α و β می‌باشند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$d\vec{r}=\vec{r}_{,\alpha}d\alpha+\vec{r}_{,\beta}d\beta \tag{۲-۲}$$

$$ds^2=\left|d\vec{r}\right|^2=d\vec{r}.d\vec{r}=\left(\vec{r}_{,\alpha}\cdot\vec{r}_{,\alpha}\right)\left(d\alpha\right)^2+2\left(\vec{r}_{,\alpha}\cdot\vec{r}_{,\beta}\right)\left(d\alpha d\beta\right)+\left(\vec{r}_{,\beta}\cdot\vec{r}_{,\beta}\right)\left(d\beta\right)^2 \tag{۲-۳}$$

از آنجا که بردارهای α و β بر هم عمودند، حاصل‌ضرب داخلی بردارهای مماس در دو راستای α و β برابر صفر است. یعنی:

$$\vec{r}_{,\alpha}\cdot\vec{r}_{,\beta}=0 \tag{۲-۴}$$

با تعریف دو پارامتر A و B، رابطه‌ی (۲-۳) به صورت زیر در می‌آید:

$$ds^2=A^2\left(d\alpha\right)^2+B^2\left(d\beta\right)^2 \tag{۲-۵}$$

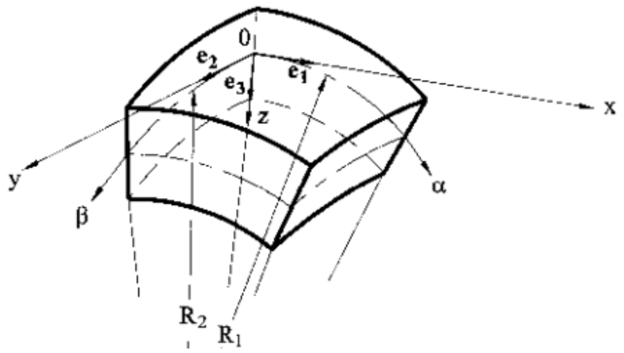
که در آن:

$$A^2 = \vec{r}_{,\alpha} \cdot \vec{r}_{,\alpha} = \left|\vec{r}_{,\alpha}\right|^2 \Rightarrow A = \left|\vec{r}_{,\alpha}\right| \tag{۲-۶-۱}$$

$$B^2 = \vec{r}_{,\beta} \cdot \vec{r}_{,\beta} = \left|\vec{r}_{,\beta}\right|^2 \Rightarrow B = \left|\vec{r}_{,\beta}\right| \tag{۲-۶-۲}$$

۲-۳- بردارهای یکه

اگر مطابق شکل (۲-۲) در نقطه‌ی o که روی سطح میانی قرار دارد، محورهای x و y در جهت α و β و محور z در جهت عمود بر سطح مطابق در نظر گرفته شود، بردارهای یکه متعامد $\hat{e}_1$ و $\hat{e}_2$ در راستای α و β و همچنین بردار یکه‌ی عمود برسطح $\hat{e}_3$ به صورت زیر خواهند بود:



شکل (۲-۲)- نمایش بردارهای یکه در دستگاه مختصات خطی [۱۷]

$$\hat{e}_1 = \frac{\vec{r}_{,\alpha}}{\left|\vec{r}_{,\alpha}\right|} = \frac{\vec{r}_{,\alpha}}{A} \tag{۲-۷-۱}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\vec{r}_{,\beta}}{\left|\vec{r}_{,\beta}\right|} = \frac{\vec{r}_{,\beta}}{B} \tag{۲-۷-۲}$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \frac{1}{AB}\left(\vec{r}_{,\alpha} \times \vec{r}_{,\beta}\right) \tag{۲-۷-۳}$$

هربردار دلخواه $\vec{T}$ بوسیله‌ی بردارهای یکه قابل تعریف است:

$$\vec{T} = T_1\hat{e}_1 + T_2\hat{e}_2 + T_3\hat{e}_3 \tag{۲-۸}$$

با استفاده از قانون مشتق گیری زنجیره‌ای مشتق جزئی بردار $\vec{T}$ نسبت به α و β برابر است با:

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial \alpha} = \frac{\partial T_1}{\partial \alpha}\hat{e}_1 + \frac{\partial T_2}{\partial \alpha}\hat{e}_2 + \frac{\partial T_3}{\partial \alpha}\hat{e}_3 + T_1\frac{\partial e_1}{\partial \alpha} + T_2\frac{\partial e_2}{\partial \alpha} + T_3\frac{\partial e_3}{\partial \alpha} \tag{۲-۹-۱}$$

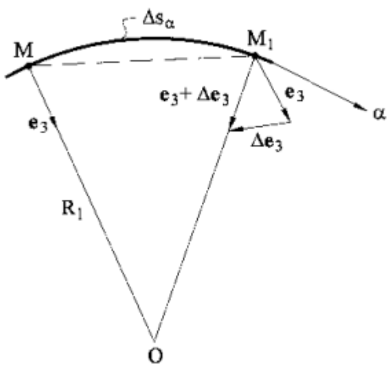
$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial \beta}=\frac{\partial T_1}{\partial \beta}\hat{e}_1+\frac{\partial T_2}{\partial \beta}\hat{e}_2+\frac{\partial T_3}{\partial \beta}\hat{e}_3+T_1\frac{\partial e_1}{\partial \beta}+T_2\frac{\partial e_2}{\partial \beta}+T_3\frac{\partial e_3}{\partial \beta} \qquad (۲-۹-۲)$$

با توجه به روابط (۲-۹) لازم است مشتق‌های جزئی بردارهای یکه نسبت به α و β بدست آید.

۲-۳-۱- مشتق بردارهای یکه

در شکل (۲-۳)، دو نقطه‌ی M و M_1 روی محور α (βثابت) در نظر گرفته می شود. این دو نقطه، روی محور α به اندازه‌ی Δs_α با هم فاصله دارند. بردارهای $\hat{e}_3$ و $(\hat{e}_3+\Delta\hat{e}_3)$ بردارهای یکه‌ی عمود بر سطح میانی در دو نقطه‌ی M و M_1 هستند. شعاع انحنای سطح میانی روی این منحنی با توجه به مختصات انتخابی، (شکل (۲-۲)) شعاع انحنای اصلی R_1 خواهد بود. همانطور که در شکل (۲-۳) ملاحظه می‌شود، زمانی که ($\Delta s_\alpha \to 0$)، بردار $\Delta\hat{e}_3$ در راستای $\hat{e}_1$ ودر خلاف جهت آن می‌باشد. پس:

$$\Delta\hat{e}_3=-\left|\Delta\hat{e}_3\right|\hat{e}_1 \qquad (۱۰-۲)$$



شکل (۲-۳)- منحنی سطح میانی روی محور α [۱۷]

با توجه به شکل (۲-۳) می توان نوشت:

$$\frac{\left|\Delta\hat{e}_3\right|}{\left|\hat{e}_3\right|}=\frac{\left|MM_1\right|}{R_1}\Rightarrow\left|\Delta\hat{e}_3\right|=\frac{\left|MM_1\right|}{R_1} \qquad (۱۱-۲)$$

$$\Delta s_\alpha=\frac{\partial r}{\partial\alpha}\Delta\alpha=A\Delta\alpha\Rightarrow\left|\Delta\hat{e}_3\right|=\frac{A\Delta\alpha}{R_1} \qquad (۱۲-۲)$$

$$\frac{\Delta\hat{e}_3}{\Delta\alpha}=-\frac{A}{R_1}\hat{e}_1\xrightarrow{\Delta\alpha\to 0}\frac{d\hat{e}_3}{d\alpha}=-\frac{A}{R_1}\hat{e}_1 \qquad (۱۳-۲)$$

به طریق مشابه روی محور β:

$$\frac{d\hat{e}_3}{d\beta} = -\frac{B}{R_2}\hat{e}_2 \qquad (۲-۱٤)$$

از آنجا که بردار $\vec{r}$ پیوسته و مشتق پذیر است ، در نتیجه:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(A\hat{e}_1\right) = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(B\hat{e}_2\right) \qquad (۲-۱۵)$$

بر اساس قانون مشتق گیری برداری، مشتق هر بردار یکه بر خود بردار عمود است، بنابراین مشتق بردار یکه ، مولفه‌ای در راستای خود بردار ندارد. پس:

$$\frac{\partial e_1}{\partial\alpha} = q_\alpha\hat{e}_2 + t_\alpha\hat{e}_3 \qquad (۲-۱٦)$$

که در رابطه‌ی (۲-۱٦)، q_α مولفه‌ی بردار $\frac{\partial e_1}{\partial\alpha}$ در جهت $\hat{e}_2$ و t_α مولفه‌ی بردار $\frac{\partial e_1}{\partial\alpha}$ در جهت $\hat{e}_3$ است و مقدار آنها برابر است با حاصل‌ضرب داخلی بردار $\frac{\partial e_1}{\partial\alpha}$ به ترتیب در $\hat{e}_2$ و $\hat{e}_3$:

$$q_\alpha = e_2\cdot\frac{\partial e_1}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2\right) - \hat{e}_1\cdot\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial\alpha} \qquad (۲-۱۷)$$

بردارهای $\hat{e}_3$ و $\hat{e}_3$ بر هم عمودند. درنتیجه حاصل‌ضرب داخلی آنها برابر صفر است. بنابراین:

$$q_\alpha = -\hat{e}_1\cdot\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial\alpha} \qquad (۲-۱۸)$$

با استفاده از مشتق‌گیری زنجیره‌ای و رابطه‌ی (۲-۱۵) داریم:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(B\hat{e}_2\right) = B\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial\alpha} + \hat{e}_2\frac{\partial B}{\partial\alpha} = \frac{\partial}{\partial\beta}(A\hat{e}_1) \qquad (۲-۱۹)$$

$$\frac{\partial\hat{e}_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(A\hat{e}_1) - \left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\hat{e}_2\right] \qquad (۲-۲۰)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۲۰) در رابطه‌ی (۲-۱۸):

$$q_\alpha = -\frac{A}{B}(\hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial \beta}) - \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1) \Rightarrow q_\alpha = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta} \tag{۲-۲۱}$$

به روشی مشابه t_α به دست می‌آید.

$$t_\alpha = \hat{e}_3 \cdot \frac{\partial \hat{e}_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}(\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1) - \hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial \alpha} = -\hat{e}_1 \cdot \frac{\partial \hat{e}_3}{\partial \alpha} \tag{۲-۲۲}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۱۳) در رابطه‌ی (۲-۲۲):

$$t_\alpha = -\hat{e}_1 \cdot \left(-\frac{A}{R_1}\hat{e}_1\right) = \frac{A}{R_1} \tag{۲-۲۳}$$

بنابراین مشتق بردار یکه‌ی $\hat{e}_1$ نسبت به α بدست می آید. مشتق سایر بردارهای یکه نیز به روشی مشابه قابل دستیابی است که نتایج آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\hat{e}_2 + \frac{A}{R_1}\hat{e}_3 \tag{۲-۲۴-۱}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\hat{e}_1 \tag{۲-۲۴-۲}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_3}{\partial \alpha} = -\frac{A}{R_1}\hat{e}_1 \tag{۲-۲۴-۳}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_1}{\partial \beta} = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\hat{e}_2 \tag{۲-۲۴-۴}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_2}{\partial \beta} = -\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\hat{e}_1 + \frac{B}{R_2}\hat{e}_3 \tag{۲-۲۴-۵}$$

$$\frac{\partial \hat{e}_3}{\partial \beta} = -\frac{B}{R_2}\hat{e}_2 \tag{۲-۲۴-۶}$$

۲-٤- تغییرشکل در ضخامت پوسته

اگر بردار تغییر شکل پوسته با $\vec{D} = (u, v, w)$ نمایش داده شود، می‌توان مشتق این بردار را نسبت به α طبق رابطه‌ی (۲-۲۵) به‌دست آورد:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial \alpha}=\frac{\partial u}{\partial \alpha}\hat{e}_1+\frac{\partial v}{\partial \alpha}\hat{e}_2+\frac{\partial w}{\partial \alpha}\hat{e}_3+u\frac{\partial e_1}{\partial \alpha}+v\frac{\partial e_2}{\partial \alpha}+w\frac{\partial e_3}{\partial \alpha} \tag{۲-۲۵}$$

با قراردادن مشتق جزئی بردارهای یکه از رابطه‌های (۲-۲٤) در رابطه‌ی (۲-۲۵) و پس از مرتب کردن و تکرار مراحل بالا برای β رابطه‌های (۱-۲۵) بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial \alpha}=\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{v}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}-A\frac{w}{R_1}\right)\hat{e}_1+\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\frac{u}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)\hat{e}_2+\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}+A\frac{u}{R_1}\right)\hat{e}_3 \tag{۲-۲٦-۱}$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial \beta}=\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{v}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)\hat{e}_1+\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{u}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}-B\frac{w}{R_2}\right)\hat{e}_2+\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}+B\frac{v}{R_2}\right)\hat{e}_3 \tag{۲-۲٦-۲}$$

برای یافتن تغییرشکل در ضخامت پوسته تنها به بررسی جزء در راستای α پرداخته شده و در راستای β به دلیل تشابه روش تنها رابطه‌ی نهایی ذکر می‌شود. با توجه به شکل (۲-۲) نقاط غیر واقع بر سطح میانی تغییر مکانی در راستای α نسبت به سطح میانی دارند (Δu^z). همانطور که در شکل (۲-۲) ملاحظه می‌شود، شیب سطح میانی (m) در این راستا برابر است با نسبت جابجایی سطح میانی در راستای عمود بر سطح ($\hat{e}_3$) به طول جابجایی (Δs_α).

$$m=\left(\frac{\Delta \vec{D}}{\Delta s_\alpha}\right)_3=\frac{1}{A}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial \alpha}\right)_3=\frac{u}{R_1}+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha} \tag{۲-۲۷}$$

با فرض اینکه سطح مقطع بعد از تغییر شکل مسطح و عمود بر سطح میانی باقی بماند، شیب سطح مقطع نیز برابر با m خواهد بود. بنابر این:

$$\Delta u^z=-z\left(\frac{u}{R_1}+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) \tag{۲-۲۸}$$

اگر تغییر مکان در راستای α و β به فاصله‌ی z از سطح میانی به ترتیب با u^z و v^z و تغییر مکان سطح میانی در آن راستاها با u و v نمایش داده شود، می‌توان تغییر مکان‌ها را از روابط (۲-۲۹) بدست آورد:

$$u^z=u-z\left(\frac{u}{R_1}+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right) \tag{۲-۲۹-۱}$$

$$v^z=v-z\left(\frac{v}{R_2}+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right) \tag{۲-۲۹-۲}$$

$$w^z = w \tag{٢-٢٩-٣}$$

٢-٥- رابطه‌ی کرنش- تغییرمکان

٢-٥-١- رابطه‌ی کرنش- تغییرمکان روی سطح میانی

اگر ε_1 و ε_2 به ترتیب کرنش در راستای α و β و همچنین γ_{12} کرنش پیچشی در نقطه‌ای از سطح میانی پوسته باشند، بر اساس رابطه‌های (٢-٢٦) می‌توان نوشت:

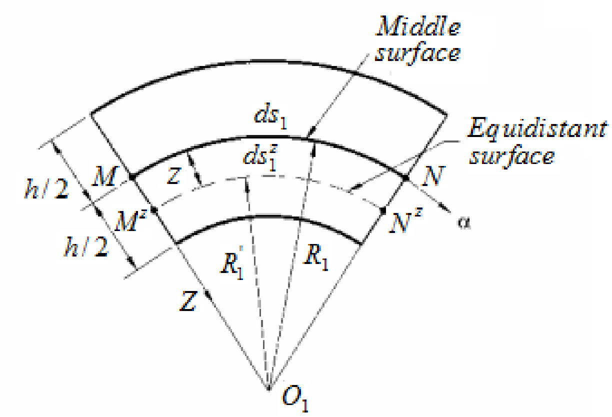
$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\Delta\vec{D}}{\Delta s_\alpha}\right)_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial\alpha}\right)_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v - \frac{w}{R_1} \tag{٢-٣٠-١}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\Delta\vec{D}}{\Delta s_\beta}\right)_2 = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial\beta}\right)_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u - \frac{w}{R_2} \tag{٢-٣٠-٢}$$

$$\gamma_{12} = \left(\frac{\Delta\vec{D}}{\Delta s_\alpha}\right)_2 + \left(\frac{\Delta\vec{D}}{\Delta s_\beta}\right)_1 = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial\alpha}\right)_2 + \frac{1}{B}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial\beta}\right)_1 = \frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right) + \frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right) \tag{٢-٣٠-٣}$$

٢-٥-٢- رابطه‌ی کرنش- تغییرمکان به فاصله‌ی z از سطح میانی

برای محاسبه‌ی کرنش به فاصله‌ی z از سطح میانی، کافی است رابطه‌های بین R_1^z، R_2^z، A^z، B^z، u^z، v^z و w^z را با R_1، R_2، A، B، u، v و w برای نقطه‌ای به فاصله‌ی z ازسطح میانی بدست آورده و در رابطه‌های (٢-٢٦) جایگذاری نماییم. رابطه‌ی بین پارامترهای u^z، v^z و w^z با u، v و w مطابق رابطه‌ی (٢-٢٩) می‌باشد، اما سایر پارامترها را با توجه به شکل (٢-٤) می‌توان بدست آورد:



شکل (٢-٤)- تغییرات پارامترها در ضخامت پوسته [١٧]

$$ds_1^z = A^z d\alpha = A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)d\alpha \Rightarrow A^z = A\left(1-\frac{z}{R_1}\right) \qquad (۱-۳۱-۲)$$

$$B^z = B\left(1-\frac{z}{R_2}\right) \qquad (۲-۳۱-۲)$$

$$R_1^z = R_1 - z \qquad (۳-۳۱-۲)$$

$$R_2^z = R_2 - z \qquad (٤-۳۱-۲)$$

با جایگذاری این پارامترها در رابطه‌های (۲-۲٦) و صرف‌نظر کردن از مقدار $\frac{1}{R_i}$ در مقایسه با 1 و پس از ساده سازی روابط، کرنش‌ها بدست می‌آیند:

$$\varepsilon_1^z = \varepsilon_1 + z\chi_1 \qquad (۱-۳۲-۲)$$

$$\varepsilon_2^z = \varepsilon_2 + z\chi_2 \qquad (۲-۳۲-۲)$$

$$\gamma_{12}^z = \gamma_{12} + 2z\chi_{12} \qquad (۳-۳۲-۲)$$

که در آن:

$$\chi_1 = -\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{v}{R_2}+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)\right] \qquad (۱-۳۳-۲)$$

$$\chi_2 = -\left[\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v}{R_2}+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{u}{R_1}+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right)\right] \qquad (۲-۳۳-۲)$$

$$\chi_{12} = -\left[\frac{1}{AB}\left(-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta}\right)+\frac{1}{R_1}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{1}{R_2}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)\right] \qquad (۳-۳۳-۲)$$

۲-٦- روش تعادل در محاسبه‌ی بار بحرانی

۲-٦-۱- نظریه‌ی غیر خطی پوسته‌های نازک

در نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌ها فرض می‌شود که خطوط α و β بر منحنی‌های اصلی پوسته منطبق باشند. بنابراین می‌توان بر اساس رابطه‌های (۲-۲٦)، تغییر در انحنا و پیچش سطح میانی در پوسته‌های نازک را با فرض تغییر شکل‌های کوچک به‌دست آورد (کافی است در رابطه‌های (۱-۲۵) قراردهیم: $\alpha = x$ ، $\beta = y$ و $A = B = 1$).

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۱-۳٤-۲)$$

$$\chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (۲-۳٤-۲)$$

$$\chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (۳-۳٤-۲)$$

و رابطه‌ی کرنش- تغییرشکل بر اساس رابطه‌ی (۲-۲٦) و افزودن ترم غیر خطی تئوری صفحه‌های ارتجاعی به آن روابط به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (۱-۳٥-۲)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad (۲-۳٥-۲)$$

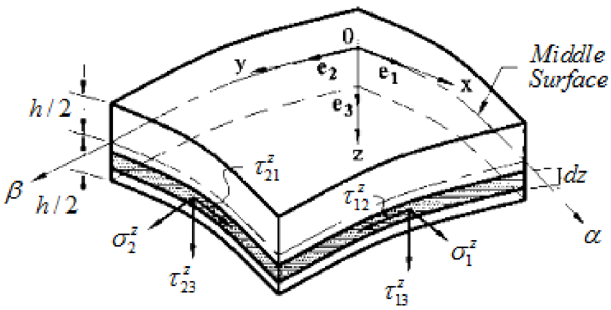
$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (۳-۳٥-۲)$$

بنابراین می‌توان ε_1^z ، ε_2^z و γ_{12}^z را طبق روابط (۲-۳۲)، به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_1^z = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۱-۳٦-۲)$$

$$\varepsilon_2^z = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (۲-۳٦-۲)$$

$$\gamma_{12}^z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \qquad (۳-۳٦-۲)$$



شکل (۲-۵)- نیروها و لنگرهای غشایی پوسته‌ی نازک [۱۸]

اکنون بر اساس شکل (۲-۵) رابطه‌ی نیروهای غشایی به صورت زیر خواهد بود $\left(-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right)$:

$$N_1 = \int \sigma_1^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \qquad (۱-۳۷-۲)$$

$$N_2 = \int \sigma_2^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \qquad (۲-۳۷-۲)$$

$$S = N_{12} = N_{21} = \int \tau_{12}^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz = \int \tau_{21}^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \qquad (۳-۳۷-۲)$$

$$Q_1 = \int \tau_{13}^z \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz \qquad (۴-۳۷-۲)$$

$$Q_2 = \int \tau_{23}^z \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) dz \qquad (۵-۳۷-۲)$$

با استفاده از روابط (۲-۳۶) ، (۲-۳۷) و روابط تنش - کرنش می‌توان نوشت:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{w}{R_1} - \nu \frac{w}{R_2}\right] \qquad (۱-۳۸-۲)$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{w}{R_2} - \nu \frac{w}{R_1}\right] \qquad (۲-۳۸-۲)$$

$$S = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (۳-۳۸-۲)$$

$$Q_1 = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 w\right) \qquad (۴-۳۸-۲)$$

$$Q_2 = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla^2 w\right) \qquad (۵-۳۸-۲)$$

که در روابط (۲-۳۸):

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad (۲-۳۹)$$

با توجه به رابطه‌های (۲-۳۸) رابطه‌ی زیر قابل دستیابی است:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(N_1 - \nu N_2) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(N_2 - \nu N_1) - 2(1+\nu)\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] \tag{۴۰-۲}$$

تابع تنش Φ به گونه‌ای فرض می‌شود که در روابط زیر صدق کند:

$$N_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{۴۱-۲}$$

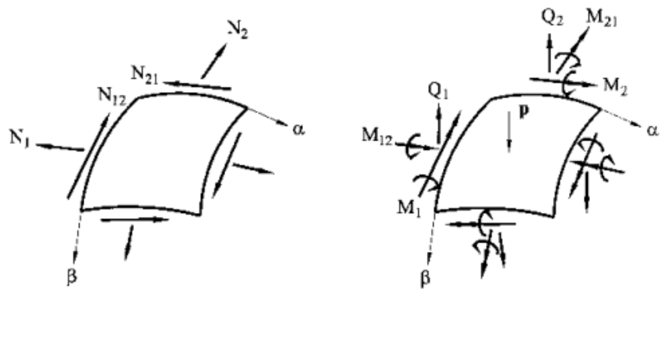
باجای‌گذاری رابطه‌ی (۲-۴۱) در رابطه‌ی (۲-۴۰):

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = Eh\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nabla_k^2 w\right] \tag{۴۲-۲}$$

که در آن:

$$\nabla_\kappa^2 f = \kappa_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \kappa_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{۴۳-۲}$$

اکنون به نوشتن معادلات تعادل پوسته‌ی نازک، که تحت بارگذاری عمود بر سطح (P_3) قرار دارد، پرداخته می‌شود. جهت مثبت لنگرها و نیروهای داخلی پوسته مطابق شکل (۲-۶) می‌باشد:



شکل (۲-۶)- جهت مثبت لنگر و نیروهای داخلی [۱۷]

برای به‌دست آوردن معادلات تعادل، مجموع نیروها در جهت x و y وهمچنین مجموع لنگرها مطابق تئوری خطی پوسته‌ها محاسبه می‌شود. بنابراین از تغییر لنگر ونیروهای داخلی، ناشی از گذر از حالت قبل از کمانش به حالت کمانش یافته صرف‌نظر می‌شود. در صورتی‌که در محاسبه‌ی مجموع نیروها در راستای z، انحناهای به‌وجودآمده در جزء و در نتیجه‌ی آن اعوجاج بوجود آمده در اثر کمانش پوسته تحت بارگذاری در نظر گرفته می‌شود. نتایج نهایی معادلات تعادل پوسته‌های نازک تحت بارگذاری عمود بر سطح (P_3)، به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}=0 \tag{۲-۴۴-۱}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial x}=0 \tag{۲-۴۴-۲}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_2}{\partial y}=-P_3-\frac{N_1}{R_1}-\frac{N_2}{R_2}-N_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2s\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \tag{۲-۴۴-۳}$$

با جای‌گذاری Q_1 و Q_2 از معادله‌ی (۲-۳۸) در معادله‌ی (۲-۴۴) و نوشتن رابطه‌ها برحسب Φ معادله‌ی (۲-۴۴-۳) به صورت زیر خواهد شد:

$$D\nabla^2\nabla^2 w-\left[\nabla_k^2\Phi+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right]=P_3 \tag{۲-۴۵}$$

معادلات (۲-۴۲) و (۲-۴۵) دستگاه معادلات دیفرانسیل پوسته‌های نازک می‌باشد.

۲-۶-۲- روش تعادل

روش تعادل بر این اصل استوار است که در یک بار بحرانی، حالت تغییر شکل یافته‌ای از پوسته وجود دارد که بی نهایت به حالت پیش از کمانش پوسته نزدیک می‌باشد. بنابراین یکی از راه‌های یافتن بار بحرانی، پیدا کردن باری است که در آن پاسخ‌ها دو شاخه می‌شوند. این اصل می‌تواند برای به‌دست آوردن بار بحرانی مورد استفاده قرار گیرد. گرچه یافتن معادلات دیفرانسیل پوسته در حالت عمومی و حتی خطی بسیار پیچیده است، با این‌وجود خوشبختانه کمانش بسیاری از پوسته‌ها که اهمیت زیادی دارند با تغییر شکل‌های کوچکی نسبت به ابعاد پوسته همراهند و می‌توان رفتار آن‌ها را نزدیک به پوسته‌ی نازک در نظر گرفت.

اگر w_0 و Φ_0 تابع‌های تغییر شکل و تنش پیش از کمانش، w و Φ مقادیر این تابع‌ها در آغاز کمانش و w_1 و Φ_1 مقدار افزایش آنها در گذر از حالت تعادل به حالت آغاز کمانش باشند، می‌توان نوشت [۱۸]: