بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی
گرایش کاربردی

روش مونت کارلو در تعیین مقادیر ویژه ماتریس

از

زهرا فلاح قاسمی گیلده

استاد راهنما

دکتر بهروز فتحی

شهریور ۸۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که راستی قامتم در شکستگی قامتشان تجلی یافت

و نگاه پرفروغشان روشنی بخش کوچه های تاریک وجودم گشت

به همسر مهربانم

به پاس صبوری و کمک های بی دریغش

و تمام عزیزانی که دعای خیرشان، بدرقه راهم بود و عاشقانه سوختند تا روشنگر راهم گردند .

تقدیر و تشکر

" من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق "

سپاس بی پایان ایزد منان را که الطاف بیکران او بر همگان جاری است و رحمت پروردگار بر تمام آنان که رهرو طریق علم و معرفتند.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای ***دکتر بهروز فتحی*** که با حمایت ها و راهنمایی های خویش، مسبب و مشوق من در اجرای این تحقیق گردیده و با صرف اوقات گرانبهایشان ، مشکلات راه را برایم هموار ساختند، بسیار سپاسگزارم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده و جناب آقای دکتر سعید کتابچی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند و هنچنین جناب آقای دکتر احمدی صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

از جناب آقای فرشید مهردوست به خاطر راهنمایی های همیشگی شان صمیمانه قدردانی می نمایم.

از خانواده ی عزیزم که در تمام مراحل تحصیلی حامی من بوده اند و دوستان عزیزی که یاری بخش من بودند، سپاسگزارم.

فهرست مطالب

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فهرست شکلها

عنوان صفحه

چکیده

روش مونت کارلو در تعیین مقادیر ویژه ماتریس

زهرا فلاح قاسمی گیلده

در این پایان نامه، ما به بررسی و تعیین بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس به روش حلال مونت کارلو می‌پردازیم. سپس دقت جواب‌های حاصله را با به‌کاربردن مولد تصادفی بر $[0,1]$ ی افراز شده ترقی می دهیم . سرانجام، جواب‌های به دست آمده را برای مسیرهای تصادفی بیشتر و ابعاد ماتریسی بالاتری می آزمائیم.

کلید واژه : مونت کارلو ، مقدار ویژه ، قدم زدن تصادفی ، حلال مونت کارلو ، برآوردیاب.

Abstract

Monte Carlo Method for finding eigen values of a Matrix

Zahra Fallah-Ghasemi-Gildeh

In this thesis, we study and obtain the maximum eigen value of a given matrix by resolvent Monte Carlo method. Then we improve the accuracy of results by partitioning [0,1] *and applying desired random number generator. Finally, using more number of random trajectories and different matrix dimensions, we test the algorithm.*

Key words: *Monte Carlo, Eigen value, Random Walk, Resolvent Monte Carlo, Estimator*

مقدمه

روش مونت کارلو، روشی تصادفی است که با آن می توان با استفاده از تولید تصادفی اعداد و متغیرهای تصادفی پارامترهای مجهول را برآورد نمود. یکی از این پارامترها مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌ها و مقادیر ویژه معادلات انتگرالی می باشد. روش‌های محاسبه‌ی مقادیر ویژه‌ی معادلات انتگرالی با استفاده از روش مونت کارلو توسط دانشجویان قبلی انجام گردید[۷]. آن‌چه که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرد، یافتن بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس‌ها با استفاده از روش مونت کارلو است.

در فصل اول این پایان نامه، به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه ی آمار و فرآیندهای تصادفی می پردازیم.در فصل دوم، در مورد برآوردیاب ها، اعداد تصادفی و روش های تولید اعداد تصادفی و متغیرهای تصادفی بحث خواهد شد.فصل سوم، مربوط به روش‌های کلاسیک و عددی محاسبه‌ی مقادیر ویژه است ودر فصل چهارم به بسط و بررسی روش مونت کارلو در محاسبه‌ی بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس پرداختیم و با استفاده از دو الگوریتم توانی و حلال مونت کارلو، این مقدار ویژه را محاسبه نمودیم.

فصل اول

مقدمه ای بر آمار

و

فرآیندهای تصادفی

۱-۱ مقدمه

انسان ها در آغاز تمدن به بازی‌های تصادفی و قمار علاقه‌مند بودند. اما ظهور احتمال به صورت یک نظریه ریاضی، نسبتاً جدید است. تا قرن پانزدهم میلادی هیچ‌گونه بررسی علمی در مورد پیشامدهای تصادفی انجام نشد اگرچه قماربازها درباره فراوانی وقوع پیشامد های معین و احتمال آنها ایده های شهودی به دست می آوردند. دانش پژوهان ایتالیایی، مانند لوکاپاچولی [۱] نیکولا تارتاگیلا[۲] و به خصوص گالیلوگالیله[۳] ازجمله پیشکسوتان دانش احتمال اند. پیشرفت واقعی از سال ۱۶۵۴ آغاز شد که بلز پاسکال[۴] ریاضیدان فرانسوی و پیردوفرما[۵] تئوری احتمالات را پایه ریزی کردند. از جمله دانشمندانی که در بسط و توسعه تئوری احتمالات نقش به‌سزایی داشتند، می توان به کریستین هویگنس[۶]، جیمز برنولی[۷]، آبرهام دموآور[۸]، پیرسیمون لاپلاس[۹]، سیمون دنیس پواسون[۱۰] و کارل فردریچ گاوس [۱۱] اشاره کرد. در سال ۱۹۰۰ در کنگره ی بین المللی ریاضیدان ها در پاریس، دیوید هیلبرت[۱۲]، بحث اصول موضوعی نظریه ی احتمال را مطرح کرد. در سال ۱۹۳۳ اندری کولموگروف[۱۳] ریاضیدان مشهور روسی به صورتی موفقیت آمیز نظریه احتمال را اصل موضوعی کرد.

۱-۲ مفاهیم پایه ای احتمال

تعریف (۱-۱): آزمایش تصادفی، آزمایشی است که برآمد آن از قبل به‌طورقطع برما معلوم نیست. مجموعه تمام رویدادهای ممکن آزمایش را فضای نمونه‌ای آن آزمایش می گوییم و با Ω نشان می دهیم. هرپیشامد A از Ω زیر مجموعه‌ایی از فضای نمونه‌ای می باشد. در حالت کلی هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ایی لزوماً یک پیشامد نیست. اگر $w \in A$ گوییم پیشامد A رخ داده است.

---

[1] Luca Paccioli
[2] Nicola Tartaglia
[3] Galileo Galilei
[4] Blasé Pascal
[5] Pier de Ferma
[6] Christian Huygens
[7] James Bernoulli
[8] Abraham de Moivre
[9] Pierre-Simon Laplace
[10] Simeon Denis Poisson
[11] Karl Friedrich Gauss
[12] David Hilbert
[13] Andrei Kolmogorov

۱-۲-۱ اصول موضوع احتمال

فرض کنید برای هر پیشامد A از فضای نمونه‌ای Ω ، عددی وجود دارد که آن را با $P(A)$ نشان داده و احتمال پیشامد A می نامیم که در سه اصل زیر صدق می کند

اصل ۱) $\forall A \,;\, P(A) \geq 0$

اصل ۲) $P(\Omega) = 1$

اصل ۳) اگر $A_1, A_2, \ldots$ دنباله‌ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، (یعنی $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \phi$) آنگاه

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

۱-۳ متغیر تصادفی

تعریف (۱-۲): هر متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه ای Ω به مجموعه اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) است. این تعریف مزایای فراوانی را با توجه به خواص مفیدی که در $\mathbb{R}$ با توجه به دو عمل جمع و ضرب وجود دارد، برقرار می کند و طیف وسیعی از پیشامدها را مطرح می سازد. متغیرهای تصادفی را معمولاً با یکی از حروف بزرگ $X, Y, Z, \ldots$ و مقادیر آن را با حروف کوچک $x, y, z, \ldots$ نشان می دهند. بنابراین؛ اگر X یک متغیر تصادفی بر فضای Ω باشد، می توان برای $w \in \Omega$ نوشت

$$X \,:\, \Omega \to R$$
$$X(w) = x \in R.$$

متغیرهای تصادفی به دو نوع گسسته و پیوسته تقسیم می شوند.

متغیر تصادفی X گسسته است، اگر برد آن مجموعه‌ای شمارا باشد؛ در غیر این صورت، متغیر تصادفی را پیوسته می نامیم.

یک متغیر تصادفی گسسته، هریک از مقادیر خود را با احتمالی معین اختیار می کند. مثلاً اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده عددی باشد که از پرتاب یک تاس همگن نتیجه می شود؛ در اینصورت $\Omega = \{1,2,...,6\}$ و X هریک از مقادیر Ω را با احتمال $\frac{1}{6}$ اختیار می کند که می توان آن را به صورت جدول زیر نشان داد

x	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

جدول (۱-۱) : احتمال پرتاب یک تاس همگن

و یا آن را به صورت فرمول زیر بیان نمود

$$f(x)=\frac{1}{6} \qquad x=1,2,...,6.$$

۱-۳-۱ تابع جرم (چگالی) احتمال

تعریف(۱-۳): به جدول یا فرمولی که تمام مقادیر متغیر تصادفی را همراه با احتمال‌های مربوطه نشان می دهد، تابع احتمال گوییم. در حالتی که متغیر تصادفی گسسته باشد تابع احتمال را تابع جرم احتمال و اگر متغیر تصادفی پیوسته باشد، آن را تابع چگالی احتمال می نامیم. تابع جرم احتمال (تابع چگالی احتمال) $f(x)$ دارای دو خاصیت زیر است

۱) برای هر $x \in \Omega$ ، $f(x) \geq 0$

۲) اگر X پیوسته باشد، $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ و اگر X گسسته باشد، $\sum_x f(x) = 1$

۱-۳-۲ تابع توزیع

خاصیت ۲ را به صورت $\int dF(x) = 1$ نشان می دهیم که در آن F تابع توزیع X می باشد و به صورت $F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$ تعریف می شود و دارای خواص زیر است

۱) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

۲) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

۳) F از راست پیوسته است.

۴) F تابعی غیر نزولی بر حسب x است.

۱-۳-۳ امید ریاضی

تعریف(۱-٤) : امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $\mathrm{E}(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_{x} xf(x) & X \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx & Y \text{ پیوسته} \end{cases}$$

می گوییم امیدریاضی X موجود است اگر و فقط اگر در حالت پیوسته $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx$ و در حالت گسسته $\sum_{x} |x| f(x)$ همگرا باشد. امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی مانند $g(x)$ نیز به طور مشابه، به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathrm{E}[g(x)] = \begin{cases} \sum_{x} g(x)f(x) & X \text{ گسسته} \\ \int g(x)f(x)dx & X \text{ پیوسته} \end{cases}$$

اگر $g(x,y)$ تابعی دلخواه از (X,Y) باشد، امید ریاضی آن به طور مشابه تعریف می شود

$$\mathrm{E}[g(x,y)] = \begin{cases} \sum_{x}\sum_{y} g(x,y)f(x,y) & X,Y \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dydx & X,Y \text{ پیوسته} \end{cases}$$

۱-۳-٤ واریانس متغیر تصادفی

تعریف(۱-۵): اگر $E(X)=\mu$، واریانس X را با $\mathrm{var}(X)$ یا σ^2 نشان می دهیم که به صورت $E(X-\mu)^2$ تعریف می شود. واریانس متغیر تصادفی X را می توان از طریق رابطه $\sigma^2=E(X^2)-E^2(X)$ نیز محاسبه کرد. اگر a و b اعدادی ثابت باشند، آنگاه $\mathrm{var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{var}(X)=a^2\sigma^2$. به جذر واریانس یعنی σ انحراف معیار می گوییم.

درمطالعات شبیه سازی اغلب تولید یک متغیر تصادفی X مورد نظر است. برای تولید مقادیر یک متغیر تصادفی X که دارای تابع توزیع پیوسته F است، کافی است مقداری از یک متغیر تصادفی U، که به طور یکنواخت بر بازه $(0,1)$ توزیع شده است تولید کنیم. این مطلب از قضیه زیر نتیجه می شود

قضیه (۱-۱)

اگر X متغیری تصادفی با تابع توزیع پیوسته F باشد آنگاه $U=F(X)$ به طور یکنواخت بر بازه $(0,1)$ توزیع می شود. بالعکس اگر U بر بازه $(0,1)$ به طور یکنواخت توزیع شده باشد، $X=F^{-1}(U)$ دارای تابع توزیع F است.

برهان

$$P(U\le u)=P[F(X)\le u]=P[X\le F^{-1}(u)]=F\left(F^{-1}(u)\right)=u \qquad 0<u<1$$

و برعکس برای هر $x\in\mathbb{R}$؛

$$P(X\le x)=P[F^{-1}(U)\le x]=P[U\le F(x)]=F(x)\cdot$$

از قضیه فوق نتیجه می گیریم که اگر U متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت بر بازه $(0,1)$ باشد آنگاه $X=F^{-1}(U)$ متغیر تصادفی با توزیع F است. بنابراین برای به دست آوردن مقداری از متغیر تصادفی X مانند x، مقداری از متغیر تصادفی U مانند u را بدست می آوریم و مقدار $F^{-1}(u)$ را محاسبه می کنیم؛ عدد حاصل همان x است.

مثال(۱-۱)

برای متغیر تصادفی X با توزیع یکنواخت پیوسته بر بازه $[a,b]$ ، معادله $U=F(X)$ را تشکیل می دهیم

$$F(x)=\int_a^x \frac{dx}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}$$

لذا

$$F(X)=U \Rightarrow \frac{X-a}{b-a}=U \Rightarrow X=a+(b-a)U$$

و مقدار x از متغیر تصادفی X از رابطه $X=a+(b-a)U$ به دست می آید که U دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0,1)$ می باشد.

تذکر: این روش کاملاً به وجود تابع توزیع متغیر تصادفی X یعنی F متکی می باشد. لذا از معایب آن می تواند عدم وجود تابع توزیع برخی توزیع ها نظیر توزیع t، نرمال و توزیع کشی و .... می باشد. در این گونه موارد باید به روش های دیگر تولید متغیرهای تصادفی متوسل شد.

۱-٤ قضایای حدی

برای محاسبه احتمال‌ها لازم است که توابع توزیع احتمال، تابع احتمال و یا توابع چگالی احتمال معلوم باشند. اما در مطالعه پدیده‌های تصادفی اغلب اتفاق می افتد که برای برخی از متغیرهای تصادفی نمی توان هیچ یک از این توابع را تعیین کرد ولی می توان میانگین و یا واریانس آن‌ها را محاسبه کرد. در چنین مواردی هرچند نمی توان احتمال‌های دقیق را محاسبه کرد اما می توان با استفاده از نامساوی‌های مارکف و چبیشف کران‌هایی برای احتمال‌ها به دست آورد.

۱-٤-۱ نامساوی مارکف

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد آنگاه به ازای هر $t>0$

$$P(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{t}$$

به عنوان یک نتیجه از نامساوی مارکف، نامساوی چبیشف را داریم

۱-٤-۲ نامساوی چبیشف

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه برای هر $k>0$

$$P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq \frac{1}{k^2}\cdot$$

۱-٤-۳ قانون ضغیف اعداد بزرگ

فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل با میانگین μ باشد در این صورت برای هر $\varepsilon>0$؛ داریم

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)=0\cdot$$

قانون ضعیف اعداد بزرگ بیان می کند که احتمال اینکه متوسط n جمله اول یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع و مستقل، با میانگین متغیر بیشتر یا مساوی ε اختلاف داشته باشد، وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند، به صفر می گراید.

۱-٤-٤ قانون قوی اعداد بزرگ

تعمیم قانون ضعیف ، قانون قوی اعداد بزرگ است که بیان می کند با احتمال 1 داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=\mu$$

به طور معادل،

$$P(\lim_{x\to\infty}\overline{X}_n=\mu)=1$$

یعنی با اطمینان سرانجام میانگین دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع به میانگین متغیر میل خواهد کرد.

۱-۵ فرآیندهای تصادفی

تعریف(۱-٦): هر فرآیند تصادفی، خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است و معمولاً آن را با $\{X_t\}_{t\in T}$ یا $\{X(t)\}_{t\in T}$ نشان می دهیم که در آن برای هر $t_0\in T$ ، X_{t_0} یک متغیر تصادفی است.

T را مجموعه اندیس گذار گویند که ممکن است شمارا یا ناشمارا باشد. مجموعه‌ی تمام مقادیر ممکن X_t را با S نشان می دهیم و به آن فضای وضعیت گوییم.