

Handwritten signature or mark at the top left.

Large, stylized Arabic calligraphy in the center, likely a religious or historical inscription.

Small decorative dots or a short line of text below the main calligraphy.

Handwritten signature or date at the bottom center.

✓
حاجه

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی
گرایش کاربردی

روش مونت کارلو در تعیین مقادیر ویژه ماتریس

از

زهرا فلاح قاسمی گیلده

استاد راهنما

۱۳۸۹ / ۷ / ۳

دکتر بهروز فتحی

کمیته استناد دانشگاه آزاد
تهران



شهریور ۸۸

۱۴۱۵۳۷

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

آنان که راستی قامت در شکستگی قامتشان تجلی یافت

و نگاه پرفروغشان روشنی بخش کوچه های تاریک وجودم گشت

به همسر مهربانم

به پاس صبوری و کمک های بی دریغش

و تمام عزیزانی که دعای خیرشان، بدرقه راهم بود و عاشقانه سوختند تا روشنگر راهم گردند.

تقدیر و تشکر

"من لم يشكر المخلوق، لم يشكر الخالق"

سپاس بی پایان ایزد منان را که الطاف بیکران او بر همگان جاری است و رحمت پروردگار بر تمام آنان که رهرو طریق علم و معرفتند.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر بهروز فتحی که با حمایت ها و راهنمایی های خویش، مسبب و مشوق من در اجرای این تحقیق گردیده و با صرف اوقات گرانبهایشان، مشکلات راه را برایم هموار ساختند، بسیار سپاسگزارم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده و جناب آقای دکتر سعید کتابچی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند و همچنین جناب آقای دکتر احمدی صمیمانه تشکر و قدردانی می نمایم.

از جناب آقای فرشید مهردوست به خاطر راهنمایی های همیشگی شان صمیمانه قدردانی می نمایم.

از خانواده ی عزیزم که در تمام مراحل تحصیلی حامی من بوده اند و دوستان عزیزم که یاری بخش من بودند، بسیار سپاسگزارم.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فهرست جدول ها	ج
فهرست شکل ها	ح
چکیده فارسی	خ
چکیده انگلیسی	د
مقدمه	ا

فصل اول: مقدمه ای بر آمار و فرآیندهای تصادفی

۱-۱ مقدمه	۳
۲-۱ مفاهیم پایه ای احتمال	۳
۱-۲-۱ اصول موضوع احتمال	۴
۳-۱ متغیر تصادفی	۴
۱-۳-۱ تابع جرم (چگالی) احتمال	۵
۲-۳-۱ تابع توزیع	۵
۳-۳-۱ امید ریاضی	۶
۹-۳-۱ واریانس متغیر تصادفی	۷
۴-۱ قضایای حدی	۸
۱-۴-۱ نامساوی مارکف	۸
۲-۴-۱ نامساوی چیشف	۹
۳-۴-۱ قانون ضعیف اعداد بزرگ	۹
۴-۴-۱ قانون قوی اعداد بزرگ	۹
۵-۱ فرآیندهای تصادفی	۹
۱-۵-۱ فرآیند قدم زدن تصادفی	۱۰
۲-۵-۱ فرآیند پواسون	۱۰
۶-۱ فرآیندهای مارکفی	۱۱
۱-۶-۱ ماتریس احتمال انتقال یک قدمی	۱۲
۲-۶-۱ ماتریس احتمال انتقال n قدمی	۱۲

فصل دوم: برآورد و شبیه سازی

۱-۲ مقدمه	۱۴
۲-۲ برآورد	۱۴
۱-۲-۲ آماره	۱۴
۲-۲-۲ برآوردیاب ناریب	۱۴

۱۵ ۳-۲-۲ برآوردیاب اریب
۱۵ ۱-۳-۲-۲ اریبی برآوردیاب T
۱۵ ۴-۳-۲ برآوردیاب مجاناً نا اریب
۱۶ ۳-۲ برآوردیاب مونت کارلو
۱۶ ۴-۲ خواص برآوردگر مونت کارلو
۱۷ ۵-۲ تولید اعداد شبه تصادفی
۱۸ ۱-۵-۲ روش هم‌نهشتی ضربی
۱۸ ۲-۵-۲ روش هم‌نهشتی مرکب
۱۹ ۳-۵-۲ روش مولد هالتون
۲۰ ۴-۵-۲ روش مولد زارمبا
۲۱ ۶-۲ شبیه سازی شیوه ی مونت کارلو
۲۳ ۷-۲ انتگرالگیری مونت کارلو
۲۴ ۸-۲ روشهای تولید متغیرهای تصادفی
۲۴ ۱-۸-۲ متغیرهای تصادفی گسسته
۲۴ ۱-۱-۸-۲ روش تبدیل وارون
۲۶ ۲-۱-۸-۲ تولید متغیر تصادفی پواسون
۲۶ ۳-۱-۸-۲ تولید متغیر تصادفی دوجمله ای
۲۷ ۴-۱-۸-۲ روش تکنیک پذیرش و عدم پذیرش
۲۸ ۵-۱-۸-۲ روش ترکیب
۲۸ ۲-۸-۲ متغیرهای تصادفی پیوسته
۲۸ ۱-۲-۸-۲ روش تبدیل وارون
۲۹ ۲-۲-۸-۲ روش عدم پذیرش
۲۹ ۳-۲-۸-۲ روشهای تولید متغیر تصادفی نرمال

فصل سوم: محاسبات ماتریسی، مقادیر ویژه و روش های کلاسیک

۳۴ ۱-۳ مقدمه
۳۴ ۲-۳ محاسبات ماتریسی و خواص ماتریسها
۳۴ ۱-۲-۳ نرم های برداری
۳۵ ۲-۲-۳ نامساوی کشی
۳۵ ۳-۲-۳ نرم های ماتریسی
۳۶ ۴-۲-۳ مقادیر ویژه ماتریس
۳۷ ۵-۲-۳ نکاتی راجع به مقادیر ویژه
۳۸ ۶-۲-۳ نتایجی از جبر خطی

۴۰ ۳-۳ قضیه ی دایره ی گرشگورین
۴۱ ۳-۴ الگوریتم های مختلف محاسبه مقدار ویژه
۴۲ ۳-۴-۱ روش توانی
۴۵ ۳-۴-۲ تقلیل ویلاند
۴۷ ۳-۴-۳ الگوریتم QR
۴۷ ۳-۴-۳-۱ قضیه ی شور
۴۸ ۳-۴-۳-۲ روش هاوس هولدر
فصل چهارم : روش مونت کارلو و مقدار ویژه غالب	
۵۹ ۴-۱ مقدمه
۵۹ ۴-۲ معرفی روش مونت کارلو
۶۰ ۴-۳ روش عددی
۶۱ ۴-۴ روش مونت کارلو و محاسبه ماتریس احتمال انتقال
۶۱ ۴-۴-۱ ماتریس احتمال انتقال MAO
۶۲ ۴-۴-۲ توزیع های چگالی MAO
۶۳ ۴-۴-۳ توزیع های چگالی یکنواخت UM
۶۳ ۴-۵ محاسبه مقدار ویژه غالب با روش مونت کارلو
۶۳ ۴-۵-۱ روش توانی
۶۵ ۴-۵-۲ الگوریتم حلال
۶۸ ۴-۶ الگوریتم های مونت کارلوی قوی
۶۹ ۴-۷ محاسبه ی پیچیدگی
۷۰ ۴-۷-۱ روش انتخاب تعداد تکرارها
۷۱ ۴-۷-۲ روش انتخاب تعداد زنجیرها
۷۱ ۴-۸ روش یافتن دومین مقدار ویژه ی غالب
۷۱ ۴-۹ نتایج عددی
۷۲ ۴-۹-۱ بررسی عددی الگوریتم توانی
۷۵ ۴-۹-۲ بررسی عددی الگوریتم حلال
۸۰ نتیجه گیری
۸۰ پیشنهاد برای ادامه کار
۸۱ منابع و ماخذ
۸۲ واژه نامه
۹۰ برنامه های کامپیوتری

فهرست جدول ها

صفحه	عنوان
۵	جدول (۱-۱) احتمال پرتاب یک تاس همگن.....
۲۰	جدول (۱-۲) اعداد تصادفی تولید شده توسط دنباله هالتون.....
۲۱	جدول (۲-۲) تولید اعداد تصادفی توسط دنباله زارمبا.....
۴۵	جدول (۱-۳) دوازده تکرار الگوریتم روش توانی برای مثال ۲-۳.....
۷۲	جدول (۱-۴) الگوریتم توانی مونت کارلو.....
۷۳	جدول (۲-۴) الگوریتم توانی مونت کارلو $N_{\max} = 1000, \lambda_{\max} = 4.1184$
۷۵	جدول (۳-۴) الگوریتم حلال مونت کارلو $len=10, m=40, \lambda_{\max}=1.6447$
۷۶	جدول (۴-۴) الگوریتم حلال مونت کارلو $len=10, N_{\max}=1000, \lambda_{\max}=1.6372$
۷۷	جدول (۵-۴) اجرای الگوریتم حلال مونت کارلو برای ماتریس 256×256
۷۸	جدول (۶-۴) اجرای الگوریتم حلال مونت کارلو برای ماتریس 1000×1000
۷۹	جدول (۷-۴) اجرای الگوریتم حلال مونت کارلو برای ماتریس 128×128

فهرست شکلها

صفحه	عنوان
۲۲.....	شکل (۱-۲) نمودار تابع $y = f(x)$
۲۷.....	شکل (۲-۲) تکنیک پذیرش - عدم پذیرش
۳۱.....	شکل (۳-۲) نمایش مختصات قطبی بردار (X, Y)
۴۱.....	شکل (۱-۳) دواير قضيه ی گرشگورین مثال ۱-۳
۷۲.....	شکل (۱-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب نسبت به تعداد زنجیرها با استفاده از الگوریتم MC
۷۳.....	شکل (۲-۴) نمودار تغییرات خطای حاصل نسبت به تعداد زنجیرها با استفاده از الگوریتم MC
۷۴.....	شکل (۳-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب نسبت به طول زنجیرها با استفاده از الگوریتم MC
۷۴.....	شکل (۴-۴) نمودار تغییرات خطا نسبت به طول زنجیرها با استفاده از الگوریتم MC
۷۵.....	شکل (۵-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب نسبت به تعداد زنجیرها با استفاده از الگوریتم RMC
۷۶.....	شکل (۶-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب نسبت به m با استفاده از الگوریتم RMC
۷۷.....	شکل (۷-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب بر حسب m برای ماتریس ۲۵۶×۲۵۶
۷۸.....	شکل (۸-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب بر حسب m برای ماتریس ۱۰۰۰×۱۰۰۰
۷۹.....	شکل (۹-۴) نمودار تغییرات مقدار ویژه غالب بر حسب m برای ماتریس ۱۲۸×۱۲۸

روش مونت کارلو در تعیین مقادیر ویژه ماتریس

زهرا فلاح قاسمی گیلده

در این پایان نامه، ما به بررسی و تعیین بزرگ‌ترین مقدار ویژه ی ماتریس به روش حلال مونت کارلو می‌پردازیم. سپس دقت جواب‌های حاصله را با به کار بردن مولد تصادفی بر $[0,1]$ ی افزاز شده ترقی می‌دهیم. سرانجام، جواب‌های به دست آمده را برای مسیرهای تصادفی بیشتر و ابعاد ماتریسی بالاتری می‌آزمائیم.

کلید واژه: مونت کارلو، مقدار ویژه، قدم زدن تصادفی، حلال مونت کارلو، برآوردیاب.

Abstract

Monte Carlo Method for finding eigen values of a Matrix

Zahra Fallah-Ghasemi-Gildeh

In this thesis, we study and obtain the maximum eigen value of a given matrix by resolvent Monte Carlo method. Then we improve the accuracy of results by partitioning $[0,1]$ and applying desired random number generator. Finally, using more number of random trajectories and different matrix dimensions, we test the algorithm.

Key words: Monte Carlo, Eigen value, Random Walk, Resolvent Monte Carlo, Estimator

مقدمه

روش مونت کارلو، روشی تصادفی است که با آن می توان با استفاده از تولید تصادفی اعداد و متغیرهای تصادفی پارامترهای مجهول را برآورد نمود. یکی از این پارامترها مقادیر ویژه ماتریس ها و مقادیر ویژه معادلات انتگرالی می باشد. روش های محاسبه ی مقادیر ویژه معادلات انتگرالی با استفاده از روش مونت کارلو توسط دانشجویان قبلی انجام گردید [۷]. آنچه که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می گیرد، یافتن بزرگترین مقدار ویژه ی ماتریس ها با استفاده از روش مونت کارلو است.

در فصل اول این پایان نامه، به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه ی آمار و فرآیندهای تصادفی می پردازیم. در فصل دوم، در مورد برآوردیاب ها، اعداد تصادفی و روش های تولید اعداد تصادفی و متغیرهای تصادفی بحث خواهد شد. فصل سوم، مربوط به روش های کلاسیک و عددی محاسبه ی مقادیر ویژه است و در فصل چهارم به بسط و بررسی روش مونت کارلو در محاسبه ی بزرگترین مقدار ویژه ی ماتریس پرداختیم و با استفاده از دو الگوریتم توانی و حلال مونت کارلو، این مقدار ویژه را محاسبه نمودیم.

فصل اول

مقدمه ای بر آمار

و

فرآیندهای تصادفی

۱-۱ مقدمه

انسان ها در آغاز تمدن به بازی های تصادفی و قمار علاقه مند بودند. اما ظهور احتمال به صورت یک نظریه ریاضی، نسبتاً جدید است. تا قرن پانزدهم میلادی هیچ گونه بررسی علمی در مورد پیشامدهای تصادفی انجام نشد اگرچه قماربازها درباره فراوانی وقوع پیشامدهای معین و احتمال آنها ایده های شهودی به دست می آوردند. دانش پژوهان ایتالیایی، مانند لوکا پاچولی^۱ نیکولا تارتاگلیا^۲ و به خصوص گالیلئو گالیله^۳ از جمله پیشکسوتان دانش احتمال اند. پیشرفت واقعی از سال ۱۶۵۴ آغاز شد که بلز پاسکال^۴ ریاضیدان فرانسوی و پیردوفرما^۵ تئوری احتمالات را پایه ریزی کردند. از جمله دانشمندانسی که در بسط و توسعه تئوری احتمالات نقش به سزایی داشتند، می توان به کریستین هوینگنس^۶، جیمز برنولی^۷، آبراهام دمواور^۸، پیرسیمون لاپلاس^۹، سیمون دنیس پواسون^{۱۰} و کارل فردریچ گاوس^{۱۱} اشاره کرد. در سال ۱۹۰۰ در کنگره ی بین المللی ریاضیدان ها در پاریس، دیوید هیلبرت^{۱۲}، بحث اصول موضوعی نظریه ی احتمال را مطرح کرد. در سال ۱۹۳۳ اندری کولموگروف^{۱۳} ریاضیدان مشهور روسی به صورتی موفقیت آمیز نظریه احتمال را اصل موضوعی کرد.

۱-۲ مفاهیم پایه ای احتمال

تعریف (۱-۱): آزمایش تصادفی، آزمایشی است که برآمد آن از قبل به طور قطع بر ما معلوم نیست. مجموعه تمام رویدادهای ممکن آزمایش را فضای نمونه ای آن آزمایش می گوئیم و با Ω نشان می دهیم. هر پیشامد A از Ω زیر مجموعه ایی از فضای نمونه ای می باشد. در حالت کلی هر زیر مجموعه از فضای نمونه ایی لزوماً یک پیشامد نیست. اگر $w \in A$ گوئیم پیشامد A رخ داده است.

¹ Luca Paccioli
² Nicola Tartaglia
³ Galileo Galilei
⁴ Blásé Pascal
⁵ Pier de Ferma
⁶ Christian Huygens
⁷ James Bernoulli
⁸ Abraham de Moivre
⁹ Pierre-Simon Laplace
¹⁰ Simeon Denis Poisson
¹¹ Karl Friedrich Gauss
¹² David Hilbert
¹³ Andrei Kolmogorov

۱-۲-۱ اصول موضوع احتمال

فرض کنید برای هر پیشامد A از فضای نمونه ای Ω ، عددی وجود دارد که آن را با $P(A)$ نشان داده و احتمال

پیشامد A می نامیم که در سه اصل زیر صدق می کند

$$\forall A; P(A) \geq 0 \quad (\text{اصل ۱})$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (\text{اصل ۲})$$

اصل ۳) اگر A_1, A_2, \dots دنباله ای از پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند، (یعنی $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$)

آنگاه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

۱-۳ متغیر تصادفی

تعریف (۱-۳): هر متغیر تصادفی تابعی از فضای نمونه ای Ω به مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است. این تعریف

مزایای فراوانی را با توجه به خواص مفیدی که در \mathbb{R} با توجه به دو عمل جمع و ضرب وجود دارد، برقرار می

کند و طیف وسیعی از پیشامدها را مطرح می سازد. متغیرهای تصادفی را معمولاً با یکی از حروف بزرگ

X, Y, Z, \dots و مقادیر آن را با حروف کوچک x, y, z, \dots نشان می دهند. بنابراین؛ اگر X یک متغیر

تصادفی بر فضای Ω باشد، می توان برای $w \in \Omega$ نوشت

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(w) = x \in \mathbb{R}.$$

متغیرهای تصادفی به دو نوع گسسته و پیوسته تقسیم می شوند.

متغیر تصادفی X گسسته است، اگر برد آن مجموعه ای شمارا باشد؛ در غیر این صورت، متغیر تصادفی را

پیوسته می نامیم.

یک متغیر تصادفی گسسته، هر یک از مقادیر خود را با احتمالی معین اختیار می کند. مثلاً اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده عددی باشد که از پرتاب یک تاس همگن نتیجه می شود؛ در اینصورت $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ و X هر یک از مقادیر Ω را با احتمال $\frac{1}{6}$ اختیار می کند که می توان آن را به صورت جدول زیر نشان داد

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

جدول (1-1): احتمال پرتاب یک تاس همگن

و یا آن را به صورت فرمول زیر بیان نمود

$$f(x) = \frac{1}{6} \quad x = 1, 2, \dots, 6.$$

۱-۳-۱ تابع جرم (چگالی) احتمال

تعریف (۱-۳): به جدول یا فرمولی که تمام مقادیر متغیر تصادفی را همراه با احتمالهای مربوطه نشان می دهد، تابع احتمال گوئیم. در حالتی که متغیر تصادفی گسسته باشد تابع احتمال را تابع جرم احتمال و اگر متغیر تصادفی پیوسته باشد، آن را تابع چگالی احتمال می نامیم. تابع جرم احتمال (تابع چگالی احتمال) $f(x)$ دارای دو خاصیت زیر است

$$(1) \quad f(x) \geq 0, \quad x \in \Omega$$

$$(2) \quad \text{اگر } X \text{ پیوسته باشد، } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ و اگر } X \text{ گسسته باشد، } \sum_x f(x) = 1$$

۱-۳-۲ تابع توزیع

خاصیت ۲ را به صورت $\int dF(x) = 1$ نشان می دهیم که در آن F تابع توزیع X می باشد و به صورت

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$$

تعریف می شود و دارای خواص زیر است

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad (2)$$

(3) F از راست پیوسته است.

(4) F تابعی غیر نزولی بر حسب x است.

۳-۳-۱ امید ریاضی

تعریف (۱-۱): امید ریاضی متغیر تصادفی X را با $E(X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x x f(x) & X \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & Y \text{ پیوسته} \end{cases}$$

می گوییم امید ریاضی X موجود است اگر و فقط اگر در حالت پیوسته $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ و در حالت گسسته

$\sum_x |x| f(x)$ همگرا باشد. امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی مانند $g(x)$ نیز به طور مشابه، به صورت زیر

تعریف می شود

$$E[g(x)] = \begin{cases} \sum_x g(x) f(x) & X \text{ گسسته} \\ \int g(x) f(x) dx & X \text{ پیوسته} \end{cases}$$

اگر $g(x, y)$ تابعی دلخواه از (X, Y) باشد، امید ریاضی آن به طور مشابه تعریف می شود

$$E[g(x, y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) f(x, y) & X, Y \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dy dx & X, Y \text{ پیوسته} \end{cases}$$

۱-۳-۴ واریانس متغیر تصادفی

تعریف (۱-۵): اگر $E(X) = \mu$ ، واریانس X را با $\text{var}(X)$ یا σ^2 نشان می دهیم که به صورت $E(X - \mu)^2$ تعریف می شود. واریانس متغیر تصادفی X را می توان از طریق رابطه $\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X)$ نیز محاسبه کرد. اگر a و b اعدادی ثابت باشند، آنگاه $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X) = a^2 \sigma^2$. به جذر واریانس یعنی σ انحراف معیار می گوئیم.

در مطالعات شبیه سازی اغلب تولید یک متغیر تصادفی X مورد نظر است. برای تولید مقادیر یک متغیر تصادفی X که دارای تابع توزیع پیوسته F است، کافی است مقداری از یک متغیر تصادفی U ، که به طور یکنواخت بر بازه $(0,1)$ توزیع شده است تولید کنیم. این مطلب از قضیه زیر نتیجه می شود

قضیه (۱-۱)

اگر X متغیری تصادفی با تابع توزیع پیوسته F باشد آنگاه $U = F(X)$ به طور یکنواخت بر بازه $(0,1)$ توزیع می شود. بالعکس اگر U بر بازه $(0,1)$ به طور یکنواخت توزیع شده باشد، $X = F^{-1}(U)$ دارای تابع توزیع F است.

برهان

$$P(U \leq u) = P[F(X) \leq u] = P[X \leq F^{-1}(u)] = F(F^{-1}(u)) = u \quad 0 < u < 1$$

و برعکس برای هر $x \in \mathbb{R}$ ؛

$$P(X \leq x) = P[F^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F(x)] = F(x).$$

از قضیه فوق نتیجه می گیریم که اگر U متغیری تصادفی با توزیع یکنواخت بر بازه $(0,1)$ باشد آنگاه $X = F^{-1}(U)$ متغیر تصادفی با توزیع F است. بنابراین برای به دست آوردن مقداری از متغیر تصادفی X مانند x ، مقداری از متغیر تصادفی U مانند u را بدست می آوریم و مقدار $F^{-1}(u)$ را محاسبه می کنیم؛ عدد حاصل همان x است.

مثال (1-1)

برای متغیر تصادفی X با توزیع یکنواخت پیوسته بر بازه $[a, b]$ ، معادله $U = F(X)$ را تشکیل می دهیم

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

لذا

$$F(X) = U \Rightarrow \frac{X-a}{b-a} = U \Rightarrow X = a + (b-a)U$$

و مقدار x از متغیر تصادفی X از رابطه $X = a + (b-a)U$ به دست می آید که U دارای توزیع یکنواخت بر بازه $(0, 1)$ می باشد.

تذکر: این روش کاملاً به وجود تابع توزیع متغیر تصادفی X یعنی F^i متکی می باشد. لذا از معایب آن می تواند عدم وجود تابع توزیع برخی توزیع ها نظیر توزیع t ، نرمال و توزیع کشی و ... می باشد. در این گونه موارد باید به روش های دیگر تولید متغیرهای تصادفی متوسل شد.

1-4 قضایای حدی

برای محاسبه احتمالها لازم است که توابع توزیع احتمال، تابع احتمال و یا توابع چگالی احتمال معلوم باشند. اما در مطالعه پدیده های تصادفی اغلب اتفاق می افتد که برای برخی از متغیرهای تصادفی نمی توان هیچ یک از این توابع را تعیین کرد ولی می توان میانگین و یا واریانس آنها را محاسبه کرد. در چنین مواردی هر چند نمی توان احتمال های دقیق را محاسبه کرد اما می توان با استفاده از نامساوی های مارکف و چیشف کران هایی برای احتمالها به دست آورد.

1-4-1 نامساوی مارکف

اگر X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد آنگاه به ازای هر $t > 0$

$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

به عنوان یک نتیجه از نامساوی مارکف، نامساوی چیشف را داریم

۱-۴-۲ ناساوی چبیشف

اگر X یک متغیر تصادفی با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد آن گاه برای هر $k > 0$

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

۱-۴-۳ قانون ضعیف اعداد بزرگ

فرض کنید X_1, X_2, \dots دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل با میانگین μ باشد در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

قانون ضعیف اعداد بزرگ بیان می کند که احتمال اینکه متوسط n جمله اول یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع و مستقل، با میانگین متغیر بیشتر یا مساوی ε اختلاف داشته باشد، وقتی n به سمت بی نهایت میل می کند، به صفر می گراید.

۱-۴-۴ قانون قوی اعداد بزرگ

تعمیم قانون ضعیف، قانون قوی اعداد بزرگ است که بیان می کند با احتمال 1 داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mu$$

به طور معادل،

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$$

یعنی با اطمینان سرانجام میانگین دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع به میانگین متغیر میل خواهد کرد.

۱-۵ فرآیندهای تصادفی

تعریف (۱-۶): هر فرآیند تصادفی، خانواده ای از متغیرهای تصادفی است و معمولاً آن را با $\{X_t\}_{t \in T}$ یا

$\{X(t)\}_{t \in T}$ نشان می دهیم که در آن برای هر $t_0 \in T$ ، X_{t_0} یک متغیر تصادفی است.

T را مجموعه اندیس گذار گویند که ممکن است شمارا یا ناشمارا باشد. مجموعه ای تمام مقادیر ممکن X_t را با

S نشان می دهیم و به آن فضای وضعیت گوئیم.