دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض (منطق)

موضوع:

مدلهای کامل کراندار از فضاهای توپولوژیک

تهیه کننده:
رضا میر باقری جم

استاد راهنما:
دکتر مسعود پورمهدیان

استاد مشاور:
دکتر بیژن هنری

مرداد ۱۳۸۶

بسمه تعالي

شماره :

تاريخ :

فرم اطلاعات پايان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا

معاونت پژوهشي
فرم پروژه تحصيلات تکميلي

مشخصات دانشجو

نام و نام خانوادگی : رضا میر باقری جم   دانشجوی آزاد ■   بورسيه ☐   معادل ☐

شماره دانشجويي : ۸۴۱۱۳۰۲۹   دانشكده : رياضي و علوم كامپيوتر   رشته تحصيلي : رياضي محض

نام و نام خانوادگي استاد راهنما : دکتر مسعود پورمهديان

عنوان به فارسی : مدلهای کامل کراندار از فضاهای توپولوژیک

عنوان به انگلیسی : Bounded complete models of topological spaces

نوع پروژه : بنیادی ■   کاربردی ☐   توسعه ای ☐   نظری ☐

تاریخ شروع : ۱۳۸۵/۵/۱   **تاریخ خاتمه :** ۱۳۸۶/۵/۱۴   **تعداد واحد :** ۶

سازمان تامین کننده اعتبار :

واژه هاي کلیدی به فارسي : کامل کراندار، dcpo، شبه یکنواختی، شبه تقریب، فضای دو توپولوژیک، کاملا منظم دوتایی، توسیع، دوگان- فشرده

واژه هاي کلیدی به انگلیسی : bounded complete, dcpo, quasiproximity, quasiuniformity, bitopological space, pairwise completely regular, swelling, cocompact

نظرها و پيشنهادها به منظور بهبود فعاليت هاي پژوهشي دانشگاه :

استاد راهنما :

دانشجو :

امضاء استاد راهنما :

تاریخ :

تقدیم به:

برادر زاده عزیزم « محمد صادق » که لبخندش جلوه ای از آن زیبائی ناب است

و

معلم عزیزم « رضا مبینی مقدس » مشعل همیشه روشن هستی ام

و

تقدیم به استاد و راهنمای لحظات سخت زندگی ام

قدردانی

بر خود لازم می دانم که زحمات و تلاشهای بی وقفه پدر و مادر مهربانم را ارج نهم؛ همچنین از استاد عزیزم جناب آقای دکتر مسعود پور مهدیان که همواره راهنمائیهای بجای ایشان گره گشای کارهایم بوده است کمال تشکر و قدرانی را دارم و نیز از داوران محترم، جناب آقای دکتر جواد لالی و جناب آقای دکتر عبد الحمید ریاضی و استاد مشاورم، جناب آقای دکتر بیژن هنری قدردانی می نمایم.

چکیده

در این رساله مفهوم مدل برای یک فضای توپولوژیک و برخی ساختارهای توپولوژیک مانند شبه تقریب و شبه یکنواختی و فضای پیوستگی معرفی می شوند. در ادامه شرایط لازم و کافی برای وجود مدل و چگونگی ارتباط آن با ساختارهای توپولوژیک فوق ارائه می شود و در انتها ثابت می شود که فضاهای متریک پذیر کامل دارای مدل می باشند.

مراجع اصلی در این رساله مقالات زیر می باشند:

R.D. Kopperman, H.-p.A. Kunzi, P. Waszkiewicz, Bounded complete models of topological spaces, Topology Appl.139 (2004) 285-297.

H.-P.A. Kunzi, Cocompactness and quasi-uniformizablility of completely metrizable spaces, Topology Appl. 133 (2003) 89-95.

واژه‌های کلیدی: کامل کراندار، dcpo، شبه یکنواختی، شبه تقریب، فضای دو توپولوژیک، کاملا منظم دوتایی، توسیع، دوگان ـ فشرده

فهرست مندرجات

مقدمه

وجود مدل برای فضاهای توپولوژیک، مساله فضای نقاط ماکزیمال می باشد ([۱۵], ۱۹۸۴).
در سال ۱۹۹۹، سی زیچ کی[۱] و فِلاگ[۲] و رالف کُپرمن[۳]، فضای نقاط ماکزیمال از یک $dcpo$، ω ـ پیوسته و کامل کراندار را بعنوان یک فضای شمارای نوع دوم و T_1، (X,τ) مشخص کردند بطوریکه توپولوژی فشرده $\tau \subseteq \tau^*$، روی X موجود است که (X,τ,τ^*) منظم دوتایی است [۱۱]. همچنین آنها نشان دادند که فضاهای متریک پذیر کامل و تفکیک پذیر(Polish) در چنین شرایطی صدق می کنند [۱۲]. از طرفی جیمی لاوسن [۴] در سال ۱۹۹۷ نشان داد که فضای نقاط ماکزیمال از یک $dcpo$، ω ـ پیوسته بطوریکه توپولوژی اسکات و توپولوژی لاوسن در نقاط ماکزیمال یکسانند، متریک پذیر کامل و تفکیک پذیر می باشد [۱٦].

در سال ۱۹۷۰ نشان داده شد که فضای متریک پذیر (X,τ)، متریک پذیر کامل است اگر و فقط اگر توپولوژی فشرده و T_1 و شمارای نوع دوم $\tau \subseteq \tau^*$ روی X موجود باشد بطوریکه (X,τ,τ^*) منظم باشد [۵]. در اینجا سوالی که مطرح می باشد این است که اگر یک فضای متریک پذیر، متریک پذیر کامل باشد آیا باید توپولوژی فشرده و T_1 و شمارای نوع دوم τ^* روی X موجود باشد بطوریکه (X,τ,τ^*) منظم دوتایی باشد؟ هانس پیتر کِنزی [۵] سریعا نشان داد که این با اصلاح منظم بودن به کاملا منظم بودن درست است. لاوسن با شنیدن این مطلب می پرسد که: آیا هر فضای متریک پذیر کامل فضای نقاط ماکزیمال از یک $dcpo$ پیوسته و کامل کراندار می باشد؟

در سال ۲۰۰۴، پاوِل واژیویچ[٦] نشان می دهد که پاسخ این سوال مثبت می باشد. همچنین در سال ۲۰۰۳، کِی مارتین[۷] ثابت کرد که فضای نقاط ماکزیمال از هر دامنه‌ای چوکت [۸] کامل است [۱۷]. تحت متریک پذیری چوکت کامل بودن و سِچ[۹] کامل بودن یکسان هستند و به معنی متریک پذیر کامل می باشند.

---

[۱] Ciesieski
[۲] Flagg
[۳] Ralph Kopperman
[۴] Jimmie Lawson
[۵] Hans - Peter A.Kunzi
[٦] Pawel Waszkiewicz
[۷] Key Martin
[۸] Choquet
[۹] Cech

فصل ۱

مباحثی از تئوری دامنه ها و برخی مفاهیم توپولوژیکی

در این فصل با مجموعه های جزئاً مرتب و مجموعه های جهتدار و $dcpo$ ها آشنا می شویم؛ در ادامه توپولوژیهای خاصی که روی این $dcpo$ ها تعریف می شوند و برخی از ویژگیهای آنها را بیان می کنیم؛ سپس تعریف مدل برای یک فضای توپولوژیک را عنوان می کنیم و در فصل بعدی به شرایط لازم و کافی برای وجود مدل برای یک فضای توپولوژیک می پردازیم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی از دامنه ها

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه P به همراه رابطه دوتائی $\sqsubseteq$، یک مجموعه جزئاً مرتب (poset) نامیده می شود هرگاه هر x و y و z از P در شرایط زیر صدق کند:

۱) $x \sqsubseteq x$ (بازتابی [1])

۲) اگر $x \sqsubseteq y, y \sqsubseteq z$، آنگاه $x \sqsubseteq z$ (ترایایی [2])

۳) اگر $x \sqsubseteq y, y \sqsubseteq x$، آنگاه $x = y$ (پادتقارنی [3])

[1] Reflexivity
[2] Transivity
[3] Antisymmetry

اگر خاصیت پادتقارنی حذف شود در آنصورت $(P, \sqsubseteq)$ را پیش ترتیب[۴] می‌نامند.

فرض کنید$(P, \sqsubseteq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد:

تعریف ۲.۱.۱ زیر مجموعه A از P را مجموعه بالا [۵] می نامند در صورتیکه برای هر $x \sqsubseteq y$، $x \in A$، $y \in A$ را نتیجه دهد. مجموعه پائین[۶] نیز بصورت مشابه تعریف می شود.

نمادگذاری ۳.۱.۱ مجموعه همه اعضائی از P که از بعضی از اعضای A بالاتر است را به $\uparrow A$ نمایش می دهند. برای سادگی، $\uparrow \{x\}$ را با $\uparrow x$ نمایش می دهند. $\downarrow A$ و $\downarrow x$ بصورت مشابه تعریف می شوند.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید که $A \subseteq P$، در آنصورت $x \in P$ یک کران بالا برای A نامیده می شود هر گاه x بالاتر از هر عضو A باشد. و از نماد گذاری $A \sqsubseteq x$ استفاده می کنیم. کران پائین برای A نیز بصورت مشابه تعریف می شود.

تعریف ۵.۱.۱ $x \in P$ را یک عنصر ماکزیمال P می نامند هرگاه هیچ عضو دیگری از P بالا تر از آن نباشد. بعبارت دیگر $\uparrow x \cap P = \{x\}$. عنصر مینیمال نیز بصورت مشابه تعریف می شود.

---

[۴] Preorder

[۵] Upper set

[۶] Lower set

تعریف ٦.۱.۱ x را بزرگترین عضو P می نامند در صورتیکه همه اعضای P زیر تنهاعضو، $x \in P$ باشند. کوچکترین عضو P نیز بصورت مشابه تعریف می شود و آنرا به $\perp$ نمایش می دهند.

مجموعه های جزئاً مرتبی که دارای کوچکترین عضو باشد را مجموعه های جزئاً مرتب نوک دار[۷] می نامند.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $A \subseteq P$، در آنصورت x را سوپرمم A می نامند هر گاه x کوچکترین عضو مجموعه کرانهای بالای A باشد، که آنرا به $x = \bigsqcup A$ نمایش می دهند. اینفیمم نیز بصورت مشابه تعریف می شود.

تعریف ۸.۱.۱ مجموعه جزئاً مرتب P را $\sqcup$ ـ نیم شبکه[۸] ($\sqcap$ ـ نیم شبکه) می نامند هرگاه سوپرمم (اینفیمم) هر دو عضو از P موجود باشد. هر گاه P هم $\sqcup$ ـ نیم شبکه و هم $\sqcap$ ـ نیم شبکه باشد، در آنصورت P را یک شبکه می نامند.

در صورتیکه سوپرمم و اینفیمم هر زیر مجموعه از P موجود باشد در آنصورت P را یک شبکه کامل می نامند.

۱.۱.۱ توابع یکنوا و مجموعه‌های جهتدار

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید که P, Q دو مجموعه جزئاً مرتب باشند، و $f : P \to Q$ یک تابع باشد؛ هر گاه برای هر $x, y \in P$ که $x \sqsubseteq y$ در Q داشته باشیم $f(x) \sqsubseteq f(y)$، در آنصورت f را یکنوا می نامند.

[۷] Pointed poset

[۸] Semilattice

مثال ۱۰.۱.۱ مجموعه همه توابع یکنوای بین دو مجموعه جزئاً مرتب را به $[P \overset{m}{\longrightarrow} Q]$ نمایش می دهند که اگر بصورت نقطه‌ای مرتب شود (یعنی $f \sqsubseteq g$، هر گاه برای هر $x \in P$، $f(x) \sqsubseteq g(x)$) در آنصورت، $[P \overset{m}{\longrightarrow} Q]$ یک مجموعه جزئاً مرتب می باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب باشد و $A \subseteq P$، هر گاه A ناتهی باشد و هر جفت از اعضای آن دارای کران بالا در A باشد در آنصورت A را یک مجموعه جهتدار می نامند.

در صورتیکه مجموعه جهتدار A دارای سوپرمم باشد، آنرا به $\bigsqcup^{\uparrow} A$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۲.۱.۱ مجموعه های جهتدار پائین را ایدال[۹] می نامند. ایدالهای به شکل $\downarrow x$، ایدالهای اصلی نامیده می شوند.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنید که P یک مجموعه جزئاً مرتب باشد و $A \subseteq P$، در آنصورت A را یک فیلتر می نامند در صورتیکه یک مجموعه بالا باشد و همچنین اینفیمم هر دو عضو از A موجود باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنید P یک مجموعه جزئاً مرتب باشد و $A \subseteq P$، در آنصورت A را یک زنجیر[۱۰] در P می نامند هر گاه برای هر $x, y \in A$ ، $x \sqsubseteq y$ یا $y \sqsubseteq x$.

---
[۹] Ideal
[۱۰] Chain

زنجیرهائی که با مجموعه اعداد طبیعی (باترتیب معمولی) ایزومورف باشد را ω ـ زنجیر می نامند.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید که D یک مجموعه جزئاً مرتب باشد که هر زیر مجموعه جهتدارش دارای سوپرمم می باشد در آنصورت D را یک مجموعه جزئاً مرتب جهتدار کامل [۱۱] یا $dcpo$ می نامند؛ واضح است که هر $dcpo$ دارای کوچکترین عضو می باشد در واقع، $\vee\emptyset =\perp$.

قضیه ۱۶.۱.۱ مجموعه جزئاً مرتب D، $dcpo$ می باشد اگر و فقط اگر هر زنجیر در D دارای سوپرمم در D باشد.

برهان: مرجع [[۳]، صفحه ۱۵، گزاره ۲.۱.۱۵]. □

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید D و E دو $dcpo$ باشند و $f : D \to E$ یک تابع باشد، در آنصورت f را اسکات ـ پیوسته می نامند هرگاه f یکنوا باشد و برای هر زیر مجموعه جهتدار A از D، $f(\bigsqcup^{\uparrow} A) = \bigsqcup^{\uparrow} f(A)$. بعبارت دیگر f حافظ سوپرمم مجموعه های جهتدار باشد.

هر تابع بین دو $dcpo$ نوک دار که عضو پائینی را حفظ می کند ($f(\perp_D) =\perp_E$) اکید می نامند.

مثال ۱۸.۱.۱ فرض کنید که D, E دو $dcpo$ باشد در آنصورت مجموعه همه توابع پیوسته از D به E را که بصورت نقطه ای مرتب شود را به $[D \longrightarrow E]$ نمایش می دهند. نشان می

---

[۱۱] Directed-complete partial order set

دهیم که $[D \longrightarrow E]$ یک $dcpo$ می باشد، که سوپرمم جهتدار در $[D \longrightarrow E]$ بصورت نقطه ای محاسبه می شود.

فرض کنید که $\mathcal{F}$ یک گردایه جهتدار از توابع از D به E باشد و $g : D \longrightarrow E$ تابعی باشد که بصورت، $g(x) = \bigsqcup^{\uparrow}_{f\in\mathcal{F}} f(x)$ تعریف می شود؛ نشان می دهیم که $g \in [D \longrightarrow E]$. فرض کنید که $A \subseteq D$ جهتدار باشد در آنصورت:

$$g(\bigsqcup^{\uparrow} A) = \bigsqcup^{\uparrow}_{f\in\mathcal{F}} f(\bigsqcup^{\uparrow} A)$$

با توجه به پیوستگی f نتیجه می شود که:

$$= \bigsqcup^{\uparrow}_{f\in\mathcal{F}} \bigsqcup^{\uparrow}_{a\in A} f(a)$$

$$= \bigsqcup^{\uparrow}_{a\in A} \bigsqcup^{\uparrow}_{f\in\mathcal{F}} f(a)$$

که با توجه به تعریف g:

$$= \bigsqcup^{\uparrow}_{a\in A} g(a) = \bigsqcup^{\uparrow} g(A)$$

بنابراین $g \in [D \longrightarrow E]$، لذا $[D \longrightarrow E]$ یک $dcpo$ می باشد.

۲.۱.۱   تقریب

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید که x, y دو عضو از $dcpo$، D باشند در اینصورت می گوئیم که x، y را تقریب می زند هرگاه برای هر زیر مجموعه جهتدار A از D که $y \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow} A$، آنگاه $a \in A$ موجود باشد که $x \sqsubseteq a$.

هرگاه x خودش را تقریب بزند x را فشرده[1] می نامند.

فرض کنید که D یک $dcpo$ باشد و $x, y \in D$ و $A \subseteq D$، درآنصورت نمادگذاریهای زیر را داریم:

[1] Compact

نمادگذاری ۲۰.۱.۱

x ، y را تقریب می زند اگر و فقط اگر $x \ll y$

$\Downarrow x = \{y \in D|$ y، x را تقریب می زند $\}$

$\Uparrow x = \{y \in D|$ x، y را تقریب می زند $\}$

$$\Downarrow A = \{b \in D| \quad \exists a \in A \quad s.t \quad b \ll a\}$$

$K(D) = \{x \in D|$ x فشرده $\}$

قضیه ۲۱.۱.۱ فرض کنید که D یک $dcpo$ باشد و $x, x', y, y' \in D$، در آنصورت:

۱) هرگاه $x \ll y$ آنگاه $x \sqsubseteq y$، $\quad (\omega b_1)$

۲) هرگاه $x' \sqsubseteq x \ll y \sqsubseteq y'$ آنگاه $x' \ll y'$. $\quad (\omega b_2)$

برهان: مرجع [[۳]، صفحه ۱۸، گزاره ۲.۲.۲]. □

تعریف ۲۲.۱.۱ زیر مجموعه B از D ،$dcpo$ را یک پایه[۲] برای D می نامند هرگاه برای هر $x \in D$ مجموعه $B_x = \Downarrow x \cap B$ شامل یک زیر مجموعه جهتدار با سوپرمم x باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱ فرض کنید D یک $dcpo$ با پایه B باشد در آنصورت:

۱) برای هر $x \in D$، B_x جهتدار با سوپرمم x می باشد،

---

[۲] Base

۲) $K(D) \subseteq B$،

۳) هرگاه $B \subseteq B'$، آنگاه B' نیز یک پایه برای D می باشد.

برهان: مرجع [[۳]، صفحه ۱۸، گزاره ۲.۲.۴]. □

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض کنید که D یک $dcpo$ باشد که دارای یک پایه می باشد؛ در آنصورت D را پیوسته یا یک دامنه پیوسته[۳] می نامند.

اگر D دارای یک پایه از اعضای فشرده باشد در آنصورت D را یک جبر یا یک دامنه جبری [۴] می نامند؛ و اگر D دارای پایه شمارا باشد آنرا ω ـ پیوسته و اگر دارای یک پایه شمارا از اعضای فشرده باشد آنرا یک ω ـ جبر می نامند.

قضیه ۲۵.۱.۱ فرض کنید که D یک $dcpo$ باشد در آنصورت:

۱) D پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $x \in D$، $x = \bigsqcup^{\uparrow} \Downarrow x$،

۲) D یک جبر است اگر و فقط اگر برای هر $x \in D$، $x = \bigsqcup^{\uparrow} K(D)_x$.

برهان: مرجع [[۳]، صفحه ۱۹، گزاره ۲.۲.۷]. □

قضیه ۲۶.۱.۱ فرض کنید D یک دامنه پیوسته با پایه B باشد و فرض کنید $x, y \in D$. در آنصورت $B_x \subseteq \downarrow y, B_x \subseteq B_y, x \sqsubseteq y$، معادلند.

برهان: مرجع [[۳]، صفحه ۲۱، گزاره ۲.۲.۱۰]. □

[۳] Continuous domain

[۴] Algebraic domain

نتیجه ۲۷.۱.۱ اگر $x \not\sqsubseteq y$ آنگاه $b \in B_x$ موجود است بطوریکه $b \not\sqsubseteq y$.

قضیه ۲۸.۱.۱ فرض کنید D یک $dcpo$ پیوسته باشد در آنصورت:

اگر $p, r \ll q$ آنگاه $s \in D$ هست بطوریکه $p, r \ll s \ll q$. (ωb_3)

برهان: می دانیم اگر A جهتدار باشد آنگاه $\Downarrow A$ نیز جهتدار است. زیرا اگر $a, b \in \Downarrow A$ در آنصورت $c, d \in A$ موجودند بطوریکه $a \ll c, b \ll d$. لذا بنابر $\omega b_1, \omega b_2$، $e \in A$ موجود است بطوریکه $a, b \ll e$؛ از طرفی $\Downarrow e$ جهتدار است، لذا $f \in \Downarrow e$ موجود است بطوریکه $a, b \sqsubseteq f \ll e$؛ چون $e \in A$ پس $f \in \Downarrow A$، بنابراین $\Downarrow A$ جهتدار است. لذا چون D پیوسته است پس برای هر $q \in D$، $\Downarrow q$ جهتدار و در نتیجه، $\Downarrow (\Downarrow q)$ جهتدار است. حال فرض کنید که $p, r \in \Downarrow q$. چون $\Downarrow q$ جهتدار است پس $t \in \Downarrow q$ موجود است بطوریکه $p, r \sqsubseteq t \ll q$، در نتیجه $\Downarrow t \subseteq \Downarrow (\Downarrow q)$. لذا چون D پیوسته است، بنابر قضیه ۲۵.۱.۱، $t = \bigsqcup^{\uparrow} \Downarrow t \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow} \Downarrow (\Downarrow q)$. بنابراین $u \in \Downarrow (\Downarrow q)$ موجود است بطوریکه $t \sqsubseteq u$. و چون $u \in \Downarrow (\Downarrow q)$، پس $v \in \Downarrow q$ موجود است بطوریکه $p, r \sqsubseteq t \sqsubseteq u \ll v \ll q$. لذا بنابر ωb_2، $p, r \sqsubseteq t \ll v \ll q$؛ و مجددا بنابر ωb_2، $p, r \ll v \ll q$. $\square$

مثال ۲۹.۱.۱ فرض کنید $\mathcal{K}$ گردایه همه بازه های فشرده $\mathbb{R}$ باشد که با عکس شمول مرتب می شود درآنصورت واضح است که $\mathcal{K}$ یک $dcpo$ می باشد. و اگر $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$ جهتدار باشد آنگاه $\bigsqcup \mathcal{D} = \bigcap \mathcal{D}$. نشان می دهیم که برای هر $p, q \in \mathcal{K}$:

$$p \ll q \Longleftrightarrow q \subseteq int(p)$$

که در آن $int(p)$ همان درون p با توپولوژی معمولی $\mathbb{R}$ می باشد.

ابتدا فرض کنید که $p \ll q$، نشان می دهیم که $q \subseteq int(p)$. فرض کنید که $q \nsubseteq int(p)$، نشان می دهیم که $p \not\ll q$. فرض کنید که

$$q = \bigcap\{\ [a - \frac{۱}{۲^k}, b + \frac{۱}{۲^k}] : k \in \mathbb{N}\}$$

چون $\{\ [a - \frac{۱}{۲^k}, b + \frac{۱}{۲^k}] : k \in \mathbb{N}\}$ جهتداراست پس

$$q = \bigsqcup\{\ [a - \frac{۱}{۲^k}, b + \frac{۱}{۲^k}] : k \in \mathbb{N}\}$$

از طرفی برای هیچ $k \in \mathbb{N}$ی،

$$.[a - \frac{۱}{۲^k}, b + \frac{۱}{۲^k}] \nsubseteq p$$

زیرا در غیراینصورت فرض کنید به ازای kی،

$$q \subseteq (a - \frac{۱}{۲^{k+۱}}, b + \frac{۱}{۲^{k+۱}}) \subseteq [a - \frac{۱}{۲^k}, b + \frac{۱}{۲^k}] \subseteq p$$

در آنصورت $q \subseteq int(p)$، که یک تناقض است؛ لذا هیچ kی یافت نمی شود که $[a - \frac{۱}{۲^k}, b + \frac{۱}{۲^k}] \subseteq p$، بنابراین $p \not\ll q$.

بالعکس فرض کنید که $q \subseteq int(p)$ و فرض کنید که $q \sqsubseteq \bigcap \mathcal{D}$، که $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}$ جهتدار است. نشان می دهیم که $r \in \mathcal{D}$ موجود است بطوریکه $p \sqsubseteq r$؛ یا بعبارت دیگر $r \subseteq p$. چون $q \sqsubseteq \bigcap \mathcal{D}$، پس

$$.(\mathbb{R} - int(p)) \cap \bigcap \mathcal{D} = \emptyset$$

چون اعضای $\mathcal{D}$ فشرده اند لذا $F \subseteq \mathcal{D}$ متناهی موجود است بطوریکه

$$(\mathbb{R} - int(p)) \cap \bigcap F = \emptyset$$

و چون $\mathcal{D}$ جهتدار است پس $r \in \mathcal{D}$ موجود هست که $r \subseteq \bigcap F$. لذا

$$.(\mathbb{R} - int(p)) \cap r = \emptyset$$

بنابراین $r \subseteq int(p) \subseteq p$، لذا $p \sqsubseteq r$؛ پس $p \ll q$. $\square$

اگر $p, r \ll q$ آنگاه $q \subseteq int(p) \cap int(r) = int(p \cap r)$؛ و چون $p \cap r \in \mathcal{K}$، لذا $\Downarrow q$ جهتدار است و بنابر آنچه ثابت شد، $\bigsqcup(\Downarrow q) = q$. بنابراین با توجه به قضیه ۲۵.۱.۱، $\mathcal{K}$ یک $dcpo$ پیوسته می باشد.

۲.۱ توپولوژی روی یک $dcpo$

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید که D یک $dcpo$ باشد و $A \subseteq D$، در آنصورت A را اسکات ـ بسته می نامند در صورتیکه یک مجموعه پائین باشد و همچنین تحت سوپرمم زیر مجموعه های جهتدار بسته باشد.

متمم[1] مجموعه های بسته، باز نامیده می شود که تشکیل یک توپولوژی بنام σ_D روی D می دهد. با توجه به تعریف لازم است که مجموعه باز A یک مجموعه بالا باشد و همچنین هر مجموعه جهتدار با سوپرمم در A اشتراک ناتهی با A داشته باشد.

توپولوژی دیگری مانند ω روی D می توان تعریف کرد که مجموعه های ω ـ بسته توسط $\{\uparrow p : p \in D\}$ تولید می شود. بعبارت دیگر $\{\uparrow p : p \in D\}$ یک زیر پایه ω ـ بسته است؛ که آنرا توپولوژی پایین [2] می نامند.

نمادگذاری ۲.۲.۱ کوچکترین مجموعه بسته شامل A را به $cl(A)$ و بزرگترین مجموعه باز مشمول در A را به $int(A)$ نمایش می دهند.

---

[1] Complement

[2] Lower topology

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید که E, D دو $dcpo$ باشند در آنصورت تابع f از D به E، اسکات ـ پیوسته است اگر و فقط اگر با در نظر گرفتن توپولوژی اسکات روی E, D پیوسته باشد.
برهان: مرجع [[۳]، صفحه ۳۰، گزاره ۲.۳.۴]. $\square$

تعریف ۴.۲.۱ فرض کنید $(P, \sqsubseteq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد، در آنصورت $(P, \sqsubseteq)$ را کامل کراندار [۳] می گویند هر گاه هر زیر مجموعه متناهی از بالا کراندار دارای سوپرمم باشد. یا بطور معادل هر زیر مجموعه دو عضوی از بالا کراندار دارای سوپرمم باشد.

فرض کنید $(P, \sqsubseteq)$ یک $dcpo$ کامل کراندار باشد و $A \subseteq P$ از بالا کراندار باشد در آنصورت A دارای سوپرمم در P می باشد؛ زیرا اگر $B \subseteq A$ متناهی باشد در آنصورت B نیز دارای کران بالا می باشد؛ لذا چون P کامل کراندار می باشد پس B دارای سوپرمم است، حال فرض کنید که $\{B \subseteq A$ و B متناهی است $: \bigsqcup B\} = C$، واضح است که C جهتدار می باشد، لذا دارای سوپرمم است. از طرفی $\bigsqcup C = \bigsqcup A$؛ زیرا $\{a = \bigsqcup\{a\} : a \in A\} = A$. بنابراین A در P دارای سوپرمم می باشد.

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید $(P, \sqsubseteq)$ یک $dcpo$ کامل کراندار باشد در آنصورت $\sigma \vee \omega$ فشرده است ($\sigma \vee \omega$ را توپولوژی لاوسن می نامند).
برهان: کافیست نشان دهیم که P در شرط اشتراک متناهی صدق می کند:

فرض کنید که $\mathcal{C}$ یک گردایه از مجموعه های σ ـ بسته و $\mathcal{F}$ یک گردایه از زیر پایه مجموعه های ω ـ بسته باشد بطوریکه $\bigcap(\mathcal{C}' \cup \mathcal{F}') \neq \emptyset$، که $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}, \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ متناهی هستند؛ نشان می دهیم که $\bigcap(\mathcal{C} \cup \mathcal{F}) \neq \emptyset$. بنابراین وقتی $\uparrow p_1, ..., \uparrow p_n \in \mathcal{F}$ آنگاه

$$\uparrow p_1 \cap \uparrow p_2 \cap ... \cap \uparrow p_n \neq \emptyset .$$

---
[۳] Bounded complete