بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه کاشان

دانشکده : مهندسی

گروه : مهندسی مکانیک

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته مهندسی مکانیک

عنوان :

حل بسته در تحلیل ارتعاشات عرضی یک تیر تیموشنکو با جرم‌های متمرکز متعدد

استاد راهنما:

دکتر کیوان ترابی

به وسیله:

عادل جعفرزاده جزی

۸۸۱۳۵۲۰۰۰۲

پائیز ۱۳۹۰

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

دانشگاه کاشان
دانشکده مهندسی

مدیریت تحصیلات تکمیلی دانشگاه

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

نام و نام خانوادگی دانشجو : عادل جعفرزاده جزی **شماره دانشجویی:** ۸۸۱۳۵۲۰۰۰۲

رشته : مهندسی مکانیک **دانشکده :** مهندسی

عنوان پایان نامه : حل بسته در تحلیل ارتعاشات عرضی یک تیر تیموشنکو با جرم های متمرکز متعدد

تعداد واحد پایان نامه : ۶ واحد **تاریخ دفاع :** ۹۰/۱۱/۹

این پایان‌نامه به مدیریت تحصیلات تکمیلی به منظور بخشی از فعالیتهای تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد ارایه می‌گردد. دفاع از پایان نامه در تاریخ ۹۰/۱۱/۹ مورد تأیید و ارزیابی هیات داوران قرار گرفت و با نمره ۲۰ بیست **و درجه** عالی **به تصویب رسید.**

اعضاء هیات داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر کیوان ترابی	استادیار	
۲. متخصص و صاحب نظر از داخل دانشگاه	دکتر علی قربانپور	دانشیار	
۳. متخصص و صاحب نظر از داخل دانشگاه	دکتر عباس لقمان	دانشیار	
٤. ناظر تحصیلات تکمیلی دانشگاه	دکتر محمد جواد پورولی	استادیار	

مدیر تحصیلات تکمیلی دانشگاه
دکتر ابراهیم نعمتی لای

آدرس: کاشان- بلوار قطب راوندی
کدپستی ۵۱۱۶۷-۸۷۳۱۷
تلفن ۵۵۵۹۱۳۰- دورنگار ۵۵۵۹۱۳۰
http: www.kashanu.ac.ir

تقدیم به:

پدر ومادر مهربانم

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس ایزد منان را که موهبتی دیگر به بنده عنایت فرمود تا این مقطع تحصیلی را نیز با موفقیت به پایان رسانم. انجام این مهم را مدیون حمایت‌های خانواده مهربانم هستم که در تمام مراحل زندگی‌ام مشوق و پشتیبان من بوده‌اند.

از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر کیوان ترابی که در طول سال‌های تحصیلم در دانشگاه کاشان و به خصوص در کلیه مراحل این رساله از هیچ کوششی برای راهنمایی من فرو گذار نبوده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. بی‌شک بدون حمایت ایشان انجام این مهم میسر نبود.

همچنین از آقایان دکتر عباس لقمان و دکتر علی قربانپور آرانی که داوری پایان‌نامه اینجانب را برعهده داشتند کمال تشکر را دارم.

در پایان از جناب آقای دکتر محمد جواد پوروقار که بعنوان ناظر تحصیلات تکمیلی دانشگاه قبول زحمت فرمودند سپاس‌گذاری می‌کنم.

چکیده:

وجود جرم متمرکز بر روی تیر بعنوان مدل ساده شده وسایل پرکاربردی همچون چرخدنده‌ها بر روی شافت جعبه‌دنده‌ها، پره‌ها بر روی شافت توربین‌ها و جسم سنگین در سر بازوی روباتهای صنعتی است. در این پژوهش یک حل بسته تحلیلی دقیق برای بررسی ارتعاشات عرضی تیر تیموشنکو با سطح مقطع یکنواخت و با جرم‌های متمرکز متعدد ارائه شده است. برای اعمال اثر جرم‌های متمرکز بر روی دینامیک تیر، از تابع ضربه و خواص آن استفاده شده و بعد از حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر، از توابع پایه بمنظور کاهش حجم محاسبات در بدست آوردن ضرایب انتگرال‌گیری (که با توجه به شرایط مرزی تیر بدست می‌آیند) استفاده شده است و در نهایت معادله فرکانسی و معادله مودشیپ برای هر شرط مرزی بدست آمده است. وجه تمایز این تحقیق با سایر تحقیقات انجام شده در این است که حل ارائه شده، یک حل تحلیلی و دقیق است و هیچ محدودیتی در تعداد، اندازه و مکان جرم‌های متمرکز بر روی تیر و شرایط مرزی تیر وجود نخواهد داشت. همچنین استفاده از توابع پایه برای شرایط مرزی استاندارد موجب ارائه یک فرمول تحلیلی برای معادله فرکانسی خواهد شد. همانطور که انتظار می‌رود وجود جرم متمرکز بر روی تیر موجب کاهش فرکانس طبیعی و دامنه جابجایی تیر می‌شود، این میزان کاهش به اندازه، مکان و تعداد جرم‌های متمرکز در هر شرط مرزی بستگی دارد و بطور کلی جرم متمرکز در مکان‌هایی از تیر که جابجایی بیشتری دارند، دارای اثر بارزتری می‌باشد.

کلمات کلیدی : ارتعاشات عرضی، تیرتیموشنکو، حل دقیق، جرم متمرکز

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول‌ها

عنوان **صفحه**

فصل اول: مقدمه

۱-۱-پیشگفتار

تیرها یکی از معمولی ترین سازه های مهندسی هستند که با توجه به مشخصات هندسی مقطع و طول آن ها تقسیم بندی می شوند. یکی از مهمترین مسائل مهندسی مکانیک و عمران بررسی پاسخ تیرها به نیروهای وارد بر آنها، چه در حالت استاتیکی و چه در حالت دینامیکی، می‌باشد و نظریه‌های گوناگونی در رابطه با آنها ارائه شده است. ارتعاشات تیرها به دلیل برخورداری از اهمیت بالایی که دارا می‌باشد همواره مورد توجه می‌باشند، زیرا تیرها در بسیاری از سازه‌های مهندسی به کار گرفته می‌شوند و چگونگی رفتار آنها در برابر نیروهای اجباری و دینامیکی در طراحی آنها نقش اساسی را دارا می‌باشد و این درحالی است که یافتن پاسخ تیرها به بارهای دینامیکی نسبت به بارهای استاتیکی از پیچیدگی بیشتری برخوردار است.

زمانیکه به بررسی ارتعاشات آزاد تیرها پرداخته می‌شود، یکی از اهداف مهم، یافتن فرکانس‌های طبیعی و مودشیپ‌های آنها است، زیرا دسترسی به فرکانس‌های طبیعی تیرها کاربردهای گوناگونی را بهمراه دارد. یکی از مهمترین کاربردهای دسترسی به فرکانس‌های طبیعی تیرها، بررسی پاسخ فرکانسی تیر به نیروهای اجباری دینامیکی و جلوگیری از پدیده تشدید در یک سازه می‌باشد، زیرا ارتعاش بیش از اندازه تیر باعث خسارت به تیر و یا تکیه-

گاههای تیر می‌گردد. از جمله کاربردهای دیگر اطلاع از فرکانس‌های طبیعی تیرها، عیب یابی[1] آنها است، بعنوان مثال در یک توربین گازی که شافت دوار آن بصورت یک تیر مدل شده است، با خسارت دیدن یک قطه از قطعات دینامیکی آن، پاسخ فرکانسی سازه نیز تغییر می‌کند. با استفاده از تجربه ونیز توزیع طیفی توان در فرکانس‌های متفاوت، می‌توان چنین عیبی را با توجه به تغییر پاسخ فرکانسی تخمین زد. همچنین اطلاع از مودشیپ‌های یک تیر نیز کاربرد گسترده‌ای در بهینه کردن طراحی آنها دارد. با اطلاع از شکل مودشیپ‌های یک تیر می‌توان شکل و مکان تکیه‌گاههای تیر را به گونه‌ای تغییر داد که میزان ارتعاشات در برابر نیروی اجباری به حداقل رسیده و یا فرکانس طبیعی آن در جهت مطلوب تغییر کند.

تیرهای ضخیم را می توان یکی از کابردی‌ترین تیرها در صنایع نام برد. بسیاری از شفتهای دوار و سازه‌های با طول محدود از این خانواده محسوب می‌شوند. خواص الاستیک به همراه دینامیک در تیرهای استفاده شده، لزوم بررسی ارتعاشات و یافتن فرکانسهای طبیعی و مودشیپها را در جهت طراحی مناسب تاکید می‌نماید. تیر تیموشنکو بعلت در نظر گرفتن چرخش المانها و نیروی برشی بهمراه جابجایی عرضی، بعنوان یکی از بهترین مدلهای کارآمد در این زمینه است. این مدل توسط استفن پرو کفیوش تیموشینکو (۱۸۷۸-۱۹۷۲) در سال ۱۹۲۱ مطرح شد که برای تحلیل ارتعاشات تیرهای ضخیم به کار می‌رود . این نظریه نسبت به نظریه تیر اویلر- برنولی برای تیرهایی که سطح مقطع آنها در برابر طول آنها کوچک نیستند دارای دقت بیشتری است، زیرا نظریه تیر اویلر- برنولی زمانی کاربرد دارد که طول تیر در برابر سطح مقطع تیر بسیار بزرگ باشد که این موضوع برای بسیاری از تیرهایی که درصنعت کاربرد دارند صدق نمی‌کند و تنها علت استفاده از نظریه اویلر- برنولی ساده‌تر بودن این نظریه نسبت به نظریه تیر تیموشنکو است، که این عامل منجر به ساده‌تر شدن مسئله و ساده‌تر شدن حل آن می‌شود.

وجود تیرهای ضخیم همراه با جرم های متمرکز بر روی آن یکی از مسائلی است که تا امروزه حل دقیقی برای به دست‌آوردن مودشیپها و فرکانس‌های طبیعی آنها ارائه نشده است و غالبا تحقیقات موجود بر اساس نظریه اویلر- برنولی برای بررسی ارتعاشات آنها استفاده شده و یا تنها تاثیر یک جرم بر روی تیر در نظر گرفته شده است و اگر برای تیر تیموشنکو با جرمهای متمرکز متعدد راه حلی ارائه شده، متکی به حل‌های عددی بوده است. از جمله کاربردهای تیرهای ضخیم با جرم متمرکز می‌توان به شافت توربین‌ها و یا جعبه‌دنده ها اشاره کرد که بر

[1] Condition monitoring

روی آنها ابزارهایی همچون چرخ دنده‌ها و پره‌ها قرار دارند. این چنین اجزا را می توان به صورت جرم متمرکز بر روی محور شافت مدل کرد. بررسی ارتعاشات بازوی روباتها نیز مثال دیگری در این رابطه است زیرا ارتعاش بازوهای روباتیک دقیق در صنایع فضایی از اهمیت زیادی برخوردار است و می‌توان قطعات با جرم بالا همچون سروها [۱] و ابزارها را با جرم متمرکز بر روی انها مدل کرد.

۱-۲- تاریخچه

در رابطه با بررسی ارتعاشات تیرها با جرم متمرکز، تا کنون بیشتر از نظریه اویلر- برنولی استفاده شده در زیر نمونه‌هایی از تحقیقاتی که با استفاده از این نظریه انجام شده، ارائه شده است.

در سال ۱۹۷۴ لاورا و همکاران [۱] فرکانس های طبیعی و مودشیپ‌های تیر یک سر درگیر که در سر آزاد آن یک جرم قرار دارد را به دست آوردند. آنها جوابهای دقیقی را برای نسبت‌های مختلف یک جرم متمرکز بر روی تیر مدل اویلر- برنولی به دست آوردند . گول [۲] به بررسی ارتعاشات یک تیر با یک جرم متمرکز در مکان دلخواه تیر با تکیه‌گاه مقاوم در برابر چرخش بر اساس مدل اویلر- برنولی و استفاده از تبدیل لاپلاس پرداخته است . وی به تاثیر نسبت جرم متمرکز به جرم تیر، سختی فنرهای دو سر تیر به سختی تیر و مکان جرم متمرکز بر روی تیر در تحلیل فرکانس‌های طبیعی تیر پرداخته است. پارنل [۳] به بررسی ارتعاشات یک تیر یک سر درگیر با یک جرم متمرکز در سر دیگر آن پرداخته است. وی این مسئله را برای تیر با سطح مقطع یکسان، با بار گسترده دلخواه، شرایط مرزی و اولیه دلخواه و بر اساس نظریه اویلر- برنولی حل نموه است. لاورا [۴] بار دیگر به بررسی ارتعاشات تیر یک سر درگیر با تکیه‌گاه الاستیک و سطح مقطع متغیر که یک جرم متمرکز بر روی آن قرار گرفته پرداخته است. وی برای حل این مسئله از روش تقریبی رایلی– اشمیت استفاده نموده است. لیو [۵] به بررسی ارتعاشات آزاد تیر که دو جرم متمرکز بر روی آن قرار دارد پرداخته است. دو جرم متمرکز یکی در وسط تیر و دیگری در انتهای آزاد آن، برای مدل تیر اویلر- برنولی بررسی شده است. تیر با شرایط مرزی یک سر درگیر با تکیه گاه الاستیک در نظر گرفته شده است. همچنین لو [۶] به بررسی فرکانس های طبیعی سیستم تیر و یک جرم در ارتعاشات عرضی پرداخته است . وی از مدل اویلر- برنولی و روش تقریبی رایلی استفاده نموده است. یامان [۷] با

[1] Servo

استفاده از روش المان محدود به تحلیل تیر یک سر درگیر به همراه یک جرم متمرکز پرداخته است. جرم متمرکز در این تحلیل در سر آزاد تیر قرار دارد. مایز با استفاده از نظریه اویلر-برنولی به حل دقیق تیر با اجرام متمرکز محدود بر روی آن و با در نظر گرفتن اینرسی پیچشی جرم ها پرداخته است [۸]. در سال ۲۰۰۹ [۹] روزا به بررسی ارتعاشات آزاد تیر مخروطی و یک سر درگیر با تکیه‌گاه الاستیک و دارای یک جرم متمرکز به همراه دمپر ویسکوز پرداخته است.

تحقیقاتی که با استفاده از نظریه تیر تیموشنکو انجام شده، در مقایسه با کارهایی که از نظریه اویلر- برنولی استفاده شده کمتر هستند. نمونه‌ای از این کارها به صورت زیر می‌باشند. در سال ۱۹۷۸ گرانت [۱۰] اثر اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی بر روی فرکانسهای طبیعی و مودشیپ‌های تیر با یک جرم متمرکز را بررسی کرده است. وی از تابع ضربه برای اعمال کردن تاثیر جرم متمرکز استفاده کرده است و از تبدیل لاپلاس بمنظور حل معادلات دیفرانسیل استفاده نموده است. براچ و همکاران [۱۱] ارتعاشات تیر تیموشنکو یکسر درگیر که یک جرم- اینرسی دورانی متمرکز در سر آزاد ان قرار دارد را مورد بررسی نمودند. وی بمنظور اعمال اثر جرم متمرکز بر روی ارتعاشات تیر، جرم متمرکز را در شرایط مرزی دخالت داده است. آنها نشان داده‌اند که با افزایش جرم- اینرسی دورانی متمرکز، پنج فرکانس طبیعی اول تیر کاهش می‌یابد. ابراموویچ [۱۲] در بررسی ارتعاشات تیر یکسر درگیر با یک جرم در سر آزاد آن، فاصله بین مرکز جرم تا محل اتصال جرم با سر تیر را در نظر گرفت که این فاصله ایجاد گشتاور در سر تیر می‌کند. وی با در نظر گرفتن اثر نیروی برشی و اینرسی دورانی جرم، نتایج خود را با نتایج براچ در مرجع [۱۱] مقایسه نموده است. ابراموبچ در تحقیقی دیگر ارتعاشات تیر یکسر درگیر با یک جرم در سر آزاد آن و فنرهای پیچشی و انتقالی بر روی تیر را بررسی کرد[۱۳]. روسی [۱۴] ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو با یک جرم و فنر بر روی آن را بررسی کرده است. وی در ابتدا معادلات متشکله تیر تیموشنکو را استخراج، سپس از شرایط سازگاری بگونه‌ای استفاده کرده تا اثر نیروی برشی ناشی از جرم و فنر را بر روی تیر اعمال نماید.

همانطور که مشخص است، تحقیقات انجام شده تنها برای یک جرم بر روی تیر انجام شده و حتی برای تعداد شرط مرزی محدودی انجام شده است. همچنین برای ارتعاشات تیر تیموشنکو با جرمهای متعدد روشهای عددی همچون DQM [۱۵] نیز استفاده شده ولی حل

دقیقی هنوز برای ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو با هر شرط مرزی و یا هر تعداد جرم متمرکز و در هر موقعیت تیر ارائه نشده است.

۱-۳- تحقیق حاضر

در این تحقیق به بررسی ارتعاشات عرضی آزاد یک تیر با اجرام متمرکز بر روی آن و با استفاده از نظریه تیموشنکو پرداخته شده است. بر روی این تیر جرمهای متمرکز متعددی وجود دارد که مقدار جرم، تعداد و مکان آنها بر روی تیر به دلخواه قابل تغییر است. بمنظور بدست آوردن مودشیپ‌ها و فرکانس‌های طبیعی از یک حل دقیق استفاده شده است. همچنین از ویژگی‌های منحصر به فرد این پژوهش، ارائه حل تحلیلی در بررسی ارتعاشات عرضی آزاد تیرها، در شرایط مرزی گوناگون است. بمنظور اعمال اثر جرم متمرکز بر دینامیک تیر، از تابع ضربه استفاده شده است. سپس با استفاده از یک حل تحلیلی بسته، معادلات حرکت آن حل شده و معادله فرکانسی و معادله مودشیپ از آن استخراج می‌شود. همچنین بمنظور ساده‌تر بدست آوردن ثابت‌های انتگرال‌گیری، پایه‌های معادله جابجایی به پایه‌های دلخواه منتقل می‌شود. دو عدد از چهار پایه معادله حرکت، همواره از شرایط مرزی در ابتدای تیر به راحتی بدست می‌آیند و برای بدست آوردن معادله فرکانسی منجر به حل دترمینان یک ماتریس ۲ در ۲ می‌شود و لذا حجم محاسبات به حداقل، کاهش می‌یابد. با بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی، مودشیپ‌های نظیر آنها بدست می‌آیند. با استخراج فرکانس‌های طبیعی، مشخص می‌شود که وجود جرم بر روی تیر، همانطور که انتظار می‌رود، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی در ارتعاشات عرضی تیر مدل تیموشنکو می‌گردد.

فصل دوم: نظریه تیر تیموشنکو و استفاده از توابع پایه

۲-۱- مقدمه

نظریه تیر تیموشنکو یا نظریه خمش تیرهای ضخیم در سال ۱۹۲۱ میلادی توسط استفن تیموشنکو[1] مطرح شد. در نظر گرفتن دو اثر زیر در نظریه تیر تیموشنکو باعث تفاوت این نظریه با نظریه اویلر- برنولی در ارتعاشات تیرها و دقت بالای آن در بررسی تیرهای ضخیم شده است.

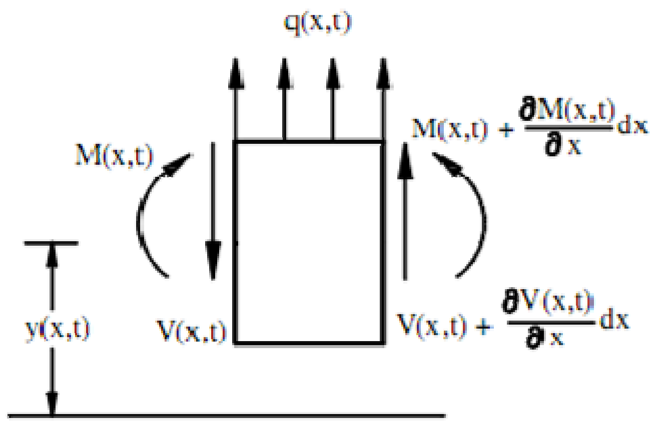
- در نظر گرفتن تغییر شکل برشی در تغییر شکل هندسی تیر.
- اثر اینرسی دورانی المان‌های تیر در بررسی دینامیکی آن.

برای بیان بهتر تفاوت بین نظریه اویلر- برنولی با نظریه تیموشنکو ابتدا چند نکته در مورد تیر اویلر- برنولی بیان می‌شود.

[1] استفن تیموشنکو (۱۹۷۲-۱۸۷۸)، مهندس روسی الاصل که به امریکا مهاجرت کرد، یکی از مشهورترین نویسندگان در زمینه الاستیسیته، مقاومت مصالح و ارتعاشات است. او رئیس دپارتمان مکانیک در دانشگاههای میشیگان و استانفورد بود. در امریکا، او را پدر مکانیک مهندسی می‌دانند.

۲-۲- تعریف ممان خمشی و نیروی برشی در نظریه اویلر- برنولی

در تیر اویلر- برنولی کرنش برشی تعریف نمی‌شود، یعنی یک المان تیر در اثر نیروی برشی تغییر شکل نمی‌دهد. در این نظریه برای تعریف نیروی برشی از تعریف ممان خمشی استفاده می‌شود. شکل ۲-۱یک المان از تیر اویلر- برنولی را نشان می‌دهد.



شکل۲-۱ المان تیر اویلر- برنولی

از آنجایکه برای یک تیر مدل اویلر- برنولی اثر اینرسی دورانی برابر صفر است، بنابراین قانون اویلر برای چنین تیری به صورت زیر بیان می‌شود[۱۶].

$$\sum M(x,t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} + Q(x,t) = 0 \qquad (۱-۲)$$

همچنین برای این المان γ (کرنش برشی) تعریف نمی‌شود. به عبارت دیگر میزان دوران المان در اثر خمش تیر، برابر با شیب تار خنثی می‌باشد.

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \psi(x,t) \qquad (۲-۲)$$

برای گشتاور خمشی بر اساس روابط خطی و توزیع کرنش در حالت استاتیکی تیر نیز تعریف زیر وجود دارد.

$$M(x,t) = EI\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} = EI\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial y^2} \qquad (۳-۲)$$

که E بیانگر مدول یانگ و I بیانگر ممان اینرسی سطح مقطع تیر است. که در نهایت با توجه به معادله ۲-۱ نیروی برشی نیز به صورت معادله ۲-۴ بیان می‌شود.

$$Q(x,t) = -EI\frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial y^3} \quad (۲-۴)$$

۲-۳- ممان خمشی و نیروی برشی در نظریه تیموشنکو و معادلات متشکله

اساس معادلات مدل تیر تیموشنکو در ارتعاشات عرضی، برپایه اثربخشی نیروهای برشی در تغییر شکل الاستیک تیر می‌باشد. در تیر تیموشنکو ممان خمشی و نیروی برشی بر اساس رابطه ۲-۵ تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} M(x,t) &= EI\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ Q(x,t) &= K_s GA\gamma(x,t) \end{aligned} \quad (۲-۵)$$

که G مدول برشی، A مساحت سطح مقطع تیر، γ کرنش برشی و K_s ضریب برش تیموشنکو می‌باشند.

برای بدست آوردن ضریب برش تیموشنکو تحقیقات گسترده‌ای انجام شده و محققین متعددی روابط متفاوتی را برای بدست آوردن آن ارائه داده‌اند. ضریب برش تیموشنکو در واقع باید رابطه ۲-۶ را برآورده نماید.

$$\int_A \overline{\tau}\, dA = K_s GA\gamma \quad (۲-۶)$$

که $\overline{\tau}$ در اینجا معرف تنش برشی است. اما در مجموع محققین برای بدست آوردن K_s ، دو نظر را دنبال می‌کنند.

- ضریب تنش برشی تنها تابع شکل تیر است و به جنس تیر وابسته نیست.
  - نظریه‌های ابتدایی برای ضریب تنش برشی، نسبت متوسط تنش برشی در سطح مقطع تیر به تنش برشی در تار خنثی تیر در همان مقطع را در نظر گرفته‌اند[۱۷] که البته این روش، روش دقیقی نیست. بعنوان مثال برای سطح مقطع مستطیل عدد ۰/۷۵ بدست می‌آید.
  - برخی از روشهای دیگر، عددهای دقیقتری را برای این ضریب ارائه کرده‌اند که تنها به شکل سطح مقطع تیر وابسته است[۱۸]. بعنوان مثال برای سطح

مقطع مستطیل و دایره به ترتیب اعداد $\frac{5}{6}$ و $\frac{9}{10}$ ارائه شده که این اعداد از دقت خوبی برخوردارند.

- برخی دیگر از محققین ضریب برشی را تابعی از ضریب پواسون ($\bar{\nu}$) می‌دانند. بعنوان مثال تیموشنکو رابطه ۲-۷ را برای سطح مستطیل و رابطه ۲-۸ را برای سطح مقطع دایره ارائه کرده است [۱۹].

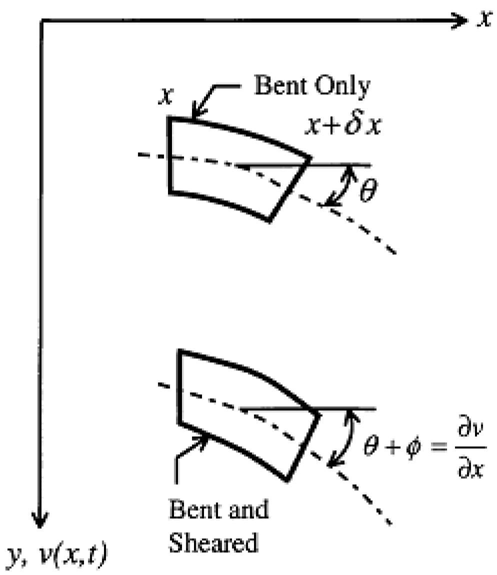
$$K_s = \frac{10(1+\bar{\nu})}{12+11\bar{\nu}} \tag{۷-۲}$$

$$K_s = \frac{6(1+\bar{\nu})}{7+6\bar{\nu}} \tag{۸-۲}$$

همانطور که قبلا نیز بیان شد، در تیر تیموشنکو کرنش برشی نیز در نظر گرفته می‌شود که علاوه بر نیروی برشی، بر روی ممان خمشی نیز اثر می‌گذارد .

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \gamma \Rightarrow \gamma = \frac{\partial y}{\partial x} - \psi \tag{۹-۲}$$

بعبارتی شیب کلی تار خنثی تیر برابر است با دوران تیر در اثر خمش به علاوه تغییر شیب تیر در اثر کرنش برشی. در شکل ۲-۲ این اثر را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۲ اثر کرنش برشی در تغییر شیب تیر