بسم الله الرحمن الرحيم

١٢٢٤١٢ـ٢ـ٤٨٨٠

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

روش‌های نقطه‌درونی برای بهینه‌سازی نیمه‌معین

استاد راهنما:

دکتر حسین منصوری

استاد مشاور:

دکتر مریم زنگی آبادی

توسط:

سید عبدالله طباطبائی میرک آباد

مهرماه ۱۳۸۸

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

سید عبداله طباطبایی میرک آباد

تحت عنوان

« روش های نقطه درونی برای بهینه سازی نیمه معین »

در تاریخ ۱۳۸۸/۷/۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه .... عالی **به تصویب نهایی رسید.**

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر حسین منصوری با مرتبه علمی استاد یار امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر مریم زنگی آبادی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۴- استاد داور پایان نامه دکترعلیرضا امینی هرندی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۵- استاد داورپایان نامه دکتر علی دلاور خلفی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۶- نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه دکتر محمد مرادی
با مرتبه علمی استادیار امضاء

دکتر محمد مردانی
معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی
دانشکده علوم پایه

دانشگاه شهرکرد
دانشکده علوم پایه

کلیه حقوق مادی مرتبط و نتایج

مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی

از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به

دانشگاه شهرکرد است.

تشکر و قدردانی

گر بر تن من زبان شود هر مویی   یک شکر تو از هزار نتوانم کرد

خدایا تو را سپاس، آنگاه که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم پدر و مادر عزیزم، که مرا به جان پروردن و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختن از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

بر خود لازم می دانم از جناب آقای دکتر منصوری به عنوان استاد راهنما که با سعه صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان‌نامه شدند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

از سرکار خانم دکتر زنگی‌آبادی به عنوان استاد مشاور که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودن بسیار سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر دلاورخلفی و جناب آقای دکتر امینی‌هرندی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، تشکر می‌کنم.

و در نهایت از همه‌ی دوستان خوبم، برای همه‌ی همراهی‌ها و به خاطر تمام لحظات شیرین و به یادماندنی که در کنارشان تجربه کردم، سپاسگزارم.

امید آن دارم که لیاقت و توفیق داشته باشم تا بگونه‌ای زندگی کنم که پاسخی مثبت و ارزشمند به زحمت همه کسانی باشد که مرا در زندگی و در امر تحصیل و آموختن به نوعی یاری داده‌اند.

سیدعبدالله طباطبائی

مهرماه ۱۳۸۸

هدیه به آن دُر شاهوار که دریای بی‌آلایش است، آنکه در راهش
قدم استوار و کلام گویایش، زندگی را یافته و می‌یابم،
گنج ناتمام پدرم.

پیشکش به آن مهر عالمتاب عطوفت، که بهشت بر زیر گامش نقش دارد،
او که با محبت نشسته بر چشمان خواب ربوده‌اش،
دستان پر سخاوتش و گفتار شیرینش بوستان زندگیم را باغبان است،
مهر بیکران مادرم.

تقدیم به آنان که به من آموختند، بویژه استاد عزیزم
دکتر حسین منصوری

چکیده

مسائل بهینه‌سازی نیمه‌معین (SDO)، مسائل بهینه‌سازی محدب روی اشتراک یک مجموعه آفین و مخروط ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت است. مسائل SDO در زمینه‌های علمی و مهندسی، چون نظریه کنترل و سیستم، مهندسی برق و مکانیک، بهینه‌سازی ترکیبیاتی و نظریه تقریب کاربردهای فراوانی دارد.

روش‌های نقطه‌درونی روش‌های تقریبی مناسبی برای حل مسائل SDO هستند. اکثر روش‌های نقطه‌درونی برای SDO تعمیمی از روش‌های نقطه‌درونی برای بهینه‌سازی خطی هستند و به طور مشابه با بهینه‌سازی خطی دارای پیچیدگی چندجمله‌ای می‌باشند.

ما بعضی از روش‌های نقطه‌درونی شدنی و نشدنی همراه با تحلیل‌شان را برای حل مسائل SDO ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی

بهینه‌سازی نیمه‌معین، روش‌های نقطه‌درونی، مسیرمرکز، پیچیدگی چندجمله‌ای.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

به ازای هر	$\forall$
متعلق است به	$\in$
متعلق نیست به	$\notin$
زیرمجموعه	$\subset$
اشتراک	$\cap$
اجتماع	$\cup$
حاصل‌ضرب	$\prod$
مجموع	$\sum$
مساوی	$=$
مخالف	$\neq$
هم‌ارز	$\equiv$
کوچک‌تر(کوچک‌تر یا مساوی)	$<\ (\leq)$
بزرگ‌تر(بزرگ‌تر یا مساوی)	$>\ (\geq)$
گرادیان	∇
ضرب کرونکر	$\otimes$
کاردینال C	$\|C\|$
لگاریتم	$\log$
دترمینان	$\det$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n$	مجموعه بردارهای nتایی از اعداد حقیقی
$\mathbb{R}^n_+$	مجموعه بردارهای nتایی از اعداد حقیقی مثبت
$\mathbb{R}^{n\times n}$	فضای ماتریس‌های $(n \times n)$ با درایه‌های حقیقی
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\mathbb{Z}^+$	مجموعه اعداد صحیح مثبت
$\mathbb{Z}^n$	nتایی از اعداد صحیح
e	بردار همه یک با طول متناسب
$\frac{d}{dt}$	مشتق نسبت به t
A_{ij}	درایه سطر iام و ستون jام ماتریس A
$vec(A)$	$(A_{۱۱}, A_{۲۱}, ..., A_{n۱}, A_{۱۲}, ..., A_{۲۲}, ..., A_{nn})^T$ برای $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$smat$	عملگر وارون vec
$svec(S^n_+)$	$\left\{ x \in \mathbb{R}^{\frac{۱}{۲}n(n+۱)} \;\middle|\; smat(x) \in (S^n_+) \right\}$
$Diag(x)$	ماتریس قطری $n \times n$ با مولفه‌های بردار $x \in \mathbb{R}^n$ روی قطر اصلی
$diag(X)$	ماتریس قطری که عناصر روی قطر اصلی آن مولفه‌های بردار x هستند. $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\lvert \cdot \rvert$	قدرمطلق
$\lVert \cdot \rVert_۱$	نرم-۱
$\lVert \cdot \rVert_۲$	نرم-۲
$\lVert \cdot \rVert_\infty$	نرم بینهایت
$\lVert A \rVert$	نرم فروبنیوس ماتریس A
$\mathcal{K}$	مخروط محدب بسته
$\mathcal{K}^*$	دوگان $\mathcal{K}$

فضای متعامد با $\mathcal{N}$	$\mathcal{N}^{\perp}$
ماتریس همانی	I
ترانهاده ماتریس A	A^T
وارون ماتریس A	A^{-1}
مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	$Tr(A)$
مجموعهٔ ماتریس‌های متقارن $n \times n$	S^n
فضای ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت متقارن $n \times n$	S^n_+
فضای ماتریس‌های معین مثبت متقارن $n \times n$	S^n_{++}
$A - B$ معین مثبت است	$A \succ B$
$A - B$ نیمه‌معین مثبت است	$A \succeq B$
A با B متشابه است	$A \sim B$
بهینه‌سازی خطی	LO
بهینه‌سازی نیمه‌معین	SDO
بهین	OPT
مساله اولیه بهینه‌سازی خطی در فرم استاندارد	(P)
مساله دوگان بهینه‌سازی خطی در فرم استاندارد	(D)
مساله اولیه بهینه‌سازی نیمه‌معین در فرم استاندارد	(SDP)
مساله دوگان بهینه‌سازی نیمه‌معین در فرم استاندارد	(SDD)
مساله تغییریافته (SDP) با پارامتر ν	(SDP_ν)
مساله تغییریافته (SDD) با پارامتر ν	(SDD_ν)
مجموعه شدنی مساله (SDP)	$\mathcal{P}$

مجموعه شدنی مساله (SDD)	$\mathcal{D}$
مجموعه بهین مساله (SDP)	$\mathcal{P}^*$
مجموعه بهین مساله (SDD)	$\mathcal{D}^*$
مقدار بهین مساله (SDP)	p^*
مقدار بهین مساله (SDD)	d^*
روش نقطه‌درونی	IPM
شرط نقطه‌درونی	IPC
روش نقطه‌درونی نشدنی	$IIPM$
$\left\{ (X,S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D} \mid X \succ 0 \ , \ S \succ 0 \right\}$	$ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$
iامین مقدار ویژهٔ بزرگ ماتریس A (اگر مقادیر ویژه حقیقی باشند)	$\lambda_i(A)$
بزرگ‌ترین مقدار ویژهٔ ماتریس A (اگر مقادیر ویژه حقیقی باشند)	$\lambda_{\max}(A)$
کوچک‌ترین مقدار ویژهٔ ماتریس A (اگر مقادیر ویژه حقیقی باشند)	$\lambda_{\min}(A)$
مجموعهٔ رأس‌ها	V
مجموعهٔ یال‌ها	E
یال اتصال دهنده رأس‌های i و j	(i,j)
مکمل گراف G	$\bar{G}$
عدد فامی گراف G	$\chi(G)$
عدد حلقه گراف G	$\omega(G)$
گراف G با مجموعهٔ رأس‌های V و مجموعه یال‌های E	$G=(V,E)$
تابع ϑـلوواز از گراف G	$\vartheta(G)$
$f(n)/g(n)$ از بالا کراندار است	$f(n)=O(g(n))$

پیشگفتار

مساله مینیمم یا ماکسیمم کردن یک تابع خطی با قیدهای خطی، یک مساله بهینه‌سازی خطی (LO)[۱] است. اولین روش برای حل مسائل LO روش سیمپلکس بود که توسط $Dantzig$[۱۴] در سال ۱۹۴۷ ارائه شد. $Klee$ و $Minty$ در [۲۹] ثابت کردند در بدترین حالت ممکن، پیچیدگی روش سیمپلکس از نوع نمائی است. در سال ۱۹۷۹ اولین الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای LO توسط $Khachiyan$[۲۸] ارائه شد.

یک پیشرفت عمده برای حل مسائل LO انتشار مقاله $Karmarkar$[۲۷] در سال ۱۹۸۴ بود، او یک روش زمان چندجمله‌ای به نام روش نقطه‌درونی (IPM)[۲] برای حل LO ارائه کرد. یک مفهوم خیلی مهم در روش نقطه‌درونی «مسیرمرکز»[۳] است که ابتدا بوسیله $Sonnevend$[۵۲] و $Megiddo$[۳۹] مطرح شد. در روش‌های نقطه‌درونی مسیرمرکز به عنوان یک مسیر برای رسیدن به مجموعه بهین است. براساس مقاله $Megiddo$[۳۹] اولین روش نقطه‌درونی اولیه-دوگان برای LO بوسیله $Kojima$ و همکاران در [۳۲] ارائه شد.

روش نقطه‌درونی شدنی با یک نقطه شدنی اکید شروع می‌شود و شدنی بودن در طول فرایند رسیدن به جواب حفظ می‌شود. اما همیشه یافتن یک نقطه شدنی اکید به راحتی ممکن نیست، برای اولین بار Ye و $Todd$ در [۶۱] استراتژی جایگزینی را برای رفع این مشکل ارائه دادند.

از طرف دیگر روش‌های نقطه‌درونی نشدنی $(IIPMs)$[۴] با یک نقطه مثبت دلخواه شروع می‌شوند و با رسیدن به مقدار بهین، شدنی بودن نیز تامین می‌شود. اولین بار $Lustig$[۳۷] و $Tanabe$[۵۳]

---

[۱] Linear Optimization

[۲] Interior-Point Method

[۳] Central Path

[۴] Infeasible Interior-Point Methods

روش‌های نقطه‌درونی نشدنی را برای LO مطرح کردند. و نخستین نتایج تئوری روی روش‌های نقطه‌درونی نشدنی اولیه-دوگان بوسیله $Kojima$، $Meggido$ و $Mizuno$ در [۳۱] ارائه شد. و $Zhang$[۶۲] با این روش نخستین پیچیدگی چندجمله‌ای را بدست آورد.

مسائل بهینه‌سازی نیمه‌معین (SDO)[5] همان مسائل بهینه‌سازی خطی هستند با این تفاوت که متغیرها، ماتریس‌های نیمه‌معین هستند. اولین مقاله در زمینه ویژگی‌های تئوری SDO در سال ۱۹۶۳ توسط $Bellman$ و Fan در [۶] ارائه شد. اما شروع جدی پرداختن به این مسائل را باید از سال ۱۹۸۱ توسط $Craven$ و $Mond$ در [۱۳] دانست.

محققین زیادی چون $Shapiro$[۵۱]، $Fletcher$[۱۸]، $Allwright$[۵]، $Kojima$ و همکاران [۳۰] روی شرایط بهینگی این مسائل بحث کرده‌اند.

از سال ۱۹۹۲ به طور مستقل $Nesterov$ و $Nemirovsky$ در [۴۳]، $Alizade$[۲]، $Kamath$ و $Karmarkar$ در [۲۵] روش‌های نقطه‌درونی را از بهینه‌سازی خطی به بهینه‌سازی نیمه‌معین تعمیم دادند.

همچنین $Kojima$ و همکاران [۳۴] ، $Potra$ و $Shing$ در [۴۸] با نقطه شروع نشدنی مستقلاً تعمیمی از الگوریتم $Mizuno-Todd-Ye$[۴۱] به SDO را ارائه دادند.

از تحقیقات انجام شدهٔ اخیر در این زمینه می‌توان به $Roos$[۴۹] و $Mansouri$[۳۸] اشاره کرد:

در سال ۲۰۰۶، $Roos$[۴۹] با کمک روش‌های نقطه‌درونی نشدنی اولیه-دوگان، الگوریتم گام نیوتن را برای حل LO ارائه داد. سپس $Mansouri$[۳۸] با تغییر در تعریف جهت جستجو الگوریتمی با تحلیل ساده‌تر ارائه و همچنین روش نقطه‌درونی نشدنی گام نیوتن را به SDO تعمیم داد.

[5] Semidefinite Optimization

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ مقدمه

در این فصل با اشاره مختصری به مساله بهینه‌سازی خطی (LO) زمینه را برای تعریف مساله بهینه‌سازی نیمه‌معین (SDO) آماده می‌کنیم. در ادامه با ارائه تعاریف و قضایای مورد نیاز مقایسه‌ای بین بهینه‌سازی خطی و بهینه‌سازی نیمه‌معین خواهیم داشت و در پایان با چند مثال بعضی از تفاوت‌های LO و SDO را بیان می‌کنیم.

۲.۱ مختصری بر بهینه‌سازی خطی

مساله بهینه‌سازی خطی مساله‌ای با مینیمم یا ماکسیمم کردن یک تابع خطی با قیدهای خطی است که این قیدها می‌توانند به صورت معادله یا نامعادله باشند. روش‌های مختلفی برای نمایش مساله LO وجود دارد، معروف‌ترین فرمول‌بندی از مساله بهینه‌سازی خطی فرم استاندارد است که به طور گسترده برای توصیف و تحلیل الگوریتم‌ها استفاده می‌شود. این فرم به صورت زیر است:

$$
(P) \qquad \begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ s.t & Ax & = & b\,, \\ & x & \geq & \circ \end{array}
$$

که c و x بردارهایی در $\mathbb{R}^n$، b برداری در $\mathbb{R}^m$ و A یک ماتریس $m \times n$ (با فرض $m < n$) است.
بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم A ماتریس رتبه کامل سطری است.
متناظر با هر مساله بهینه‌سازی خطی، مساله بهینه‌سازی دیگری به نام مساله دوگان(دوال) وجود دارد.
مساله دوگان شامل همان اطلاعات مساله قبل می‌باشد که فقط این اطلاعات در فرم دیگری مرتب شده‌اند. دوگان مساله (P) به صورت

$$
(D) \qquad \begin{array}{lrcl} \max & b^T y & & \\ s.t & A^T y + s & = & c\,, \\ & s & \geq & \circ \end{array}
$$

است که y یک بردار در $\mathbb{R}^m$ و s یک بردار در $\mathbb{R}^n$ است. مولفه‌های y را متغیرهای دوگان می‌نامیم در حالی که s بردار زائد دوگان است.
مساله بهینه‌سازی خطی (P) اغلب مساله اولیه و (D) مساله دوگان نامیده می‌شود و هر دو مساله را باهم جفت اولیه-دوگان می‌نامیم.