دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

پایداری معادلات تابعی ترکیبی در فضاهای مختلف

نگارنده

مرضیه فامیلی

استاد راهنما

دکتر علی غفاری

استاد مشاور

دکتر محمود بیدخام

اسفند ۱۳۸۹

به نام پروردگار بخشنده و مهربان

خدایا:

مرا همواره آگاه و هوشیار دار تا پیش از شناختن درست کسی یا فکری، مثبت یا منفی، قضاوت نکنم، جهل آمیخته با خودآگاهی و حسد، مرا رایگان ابزار قتاله دشمن برای حمله به دوست نسازد، خدایا به من تحمل عقیدهٔ مخالف را ارزانی دار، عقیده‌ام را از دست عقده‌ام مصون دار.

«دکتر علی شریعتی»

چکیده

در این پایان نامه پایداری معادلات تابعی درجه دو و درجه سه را در فضاهای نرمدار تصادفی با t—نرم پیوسته دلخواه بررسی می‌کنیم و پایداری هایرز— اولام— راسیاس تعمیم یافته معادله تابعی جمعی درجه دو— سه زیر را در فضاهای نرمدار تصادفی با t—نرم پیوسته دلخواه بررسی می‌کنیم.

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2[f(x+y)-f(x-y)]+2f(3y)-6f(2y)+6f(y)$$

سپس حل عمومی و پایداری معادله تابعی زیر را در فضاهای نرمدار تصادفی با t—نرم پیوسته دلخواه بدست می آوریم.

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4[f(x+y)+f(x-y)]+2[f(2x)-4f(x)]-6f(x)$$

در ادامه پایداری این معادله تابعی را در فضاهای نرمدار محتمل بررسی می‌کنیم.

در آخر با استفاده از روش نقطه ثابت پایداری هایرز— اولام تعمیم یافته معادله تابعی جمعی درجه دو—چهار زیر را بررسی می‌کنیم.

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2f(x+y)+2f(-x-y)+2f(x-y)+2f(y-x)-4f(-x)$$
$$-2f(x)+f(2y)+f(-2y)-4f(y)-4f(-y)$$

واژه‌های کلیدی: پایداری، معادله تابعی، فضای نرمدار تصادفی، فضای نرمدار محتمل و فضای نرمدار فازی

مقدمه

معادلات تابعی از جنبه های مختلفی مورد بررسی قرار می‌گیرند. یکی از سوالات جالبی که در نظریه معادلات تابعی مطرح می‌شود این است که آیا نگاشتی که به طور دقیق در معادله تابعی ξ صدق کند به یک جواب تقریبی ξ نزدیک است یا خیر؟ اگر پاسخی مثبت برای این سوال وجود داشته باشد، معادله ξ پایدار گفته می‌شود.

مسئله پایداری معادلات تابعی از یک سوال اولام[1] [۴۷] در سال ۱۹۴۰ در رابطه با پایداری همریختی های گروه به وجود آمد: سوال این است که فرض کنیم $\epsilon > 0$، (G_1, o) یک گروه و $(G_2, *, d)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ باشد. آیا $\delta > 0$ موجود است که اگر نگاشت $h : G_1 \to G_2$ در رابطه

$$d(h(xoy), h(x) * h(y)) < \delta, \quad (x, y \in G_1)$$

صدق کند، آنگاه یک همریختی $H : G_1 \to G_2$ موجود باشد به قسمی که

$$d(h(x), H(x)) < \epsilon. \qquad (x \in G_1)$$

اولین جواب مثبت به سوال اولام را هایرز[2] [۲۴] در فضاهای باناخ داد:

فرض کنیم $f : E \to E'$ یک نگاشت بین فضاهای باناخ باشد بطوریکه به ازای هر $x, y \in E$ و یک $\delta > 0$،

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta$$

آنگاه یک نگاشت جمعی منحصر به فرد $T : E \to E'$ موجود است بطوریکه به ازای هر $x \in E$

$$\|f(x) - T(x)\| \leq \delta$$

بعلاوه اگر $x \in E$ و فرض کنیم $t \to f(tx)$ از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، در اینصورت T یک نگاشت خطی است.

در سال ۱۹۷۸ راسیاس[3] [۴۴] قضیه هایرز را به صورت زیر بیان کرد:

[1] Ulam
[2] Hyers
[3] Rassias

فرض کنیم $f : E \to E'$ یک نگاشت از فضای نرمدار E به فضای باناخ E' باشد. فرض کنیم ϵ و p اعداد ثابتی باشند که $\epsilon > ۰$ و $۰ \leq p < ۱$ و به ازای هر $x, y \in E$،

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon(\|x\|^p + \|y\|^q)$$

آنگاه یک نگاشت جمعی منحصر به فرد $T : E \to E'$ موجود است بطوریکه به ازای هر $x \in E$

$$\|f(x) - T(x)\| \leq k\epsilon\|x\|^p$$

که در آن $k = \frac{۲}{۲ - ۲^p}$.

در سال ۱۹۹۱ گاجدا[۴] [۲۱] سوالی را که راسیاس مطرح کرده بود به ازای $p > ۱$ پاسخ داد. این مفهوم جدید به پایداری معادلات تابعی هایرز-اولام-راسیاس معروف است [۱، ۵، ۹، ۶، ۲۵، ۲۶، ۴۰، ۴۱]. معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y) \qquad (۰.۱)$$

که نگاشت $f(x) = cx^۲$ یکی از جواب های این معادله است را معادله تابعی درجه دو می‌نامیم. هر جواب معادله تابعی درجه دو را یک نگاشت درجه دو می‌نامیم. تابع f بین فضاهای برداری حقیقی یک نگاشت درجه دو است اگر و فقط اگر نگاشت دوجمعی، متقارن و منحصر به فرد B موجود باشد بطوریکه به ازای هر x، $f(x) = B(x, x)$ [۱، ۳۱]. تابع دو جمعی B با ضابطه‌ی زیر مشخص می‌شود.

$$B(x, y) = \frac{۱}{۴}(f(x+y) - f(x-y))$$

مسئله پایداری هایرز-اولام-راسیاس برای معادله تابعی (۰.۱) توسط اسکوف[۵] [۴۶] برای توابع $f : A \to B$ که A یک فضای نرمدار و B یک فضای باناخ است اثبات شد. چلوا[۶] [۱۲] نشان داد که قضیه اسکوف وقتی A یک گروه آبلی باشد هم برقرار است. در [۱۴] چرویک[۷] پایداری هایرز-اولام-راسیاس معادله تابعی (۰.۱) را ثابت کرد. گرابیک[۸] [۲۲] نتایج ذکر شده در بالا را تعمیم

---

[۴] Gajda
[۵] Skof
[۶] Cholewa
[۷] Zerwik
[۸] Grabiec

داد. معادله تابعی درجه سه زیر که قدیمی ترین معادله تابعی درجه سه است را جی. ام. راسیاس [۴۲] در سال ۲۰۰۱ معرفی کرد.

$$f(x+2y)+3f(x)=3f(x+y)+f(x-y)+6f(y)$$

جان وکیم[۹] [۲۷] معادله تابعی درجه سه زیر را معرفی کردند.

$$f(x+2y)+f(2x-y)=2f(x+y)+2f(x-y)+12f(x)$$

تابع $f(x)=ax^3$ یکی از جواب های این معادله است به همین دلیل این معادله را معادله تابعی درجه سه نامیم. هر جواب معادله تابعی درجه سه را یک تابع درجه سه می‌نامیم.
معادله تابعی

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4f(x+y)+4f(x-y)+24f(x)-6f(y)$$

که نگاشت $f(x)=cx^4$ یک جواب آن است معادله تابعی درجه چهار نامیده می‌شود هر جواب معادله تابعی درجه چهار یک نگاشت درجه چهار نامیده می‌شود.

اولین بار جی. ام. راسیاس[۱۰] [۴۳] مسئله پایداری معادله تابعی درجه چهار را برای نگاشت $f:X\to Y$ که در آن X یک فضای نرمدار حقیقی و Y یک فضای باناخ است ثابت کرد. بعلاوه میر مصطفایی [۳۴، ۳۵، ۳۶]، السینا [۱۳]، میهت و رادو [۳۳] پایداری را در فضاهای نرمدار تصادفی، محتمل و فازی بررسی کردند.
این پایان نامه شامل چهار فصل است که در فصل اوّل تعاریف مقدماتی را بیان می‌کنیم که در فصل های بعدی مورد نیاز است.
در فصل دوم پایداری معادله تابعی درجه دو

$$f(x+y)-f(x-y)=2f(x)-2f(y) \qquad (0.2)$$

و پایداری معادله تابعی درجه سه

$$f(2x+y)+f(2x-y)=2f(x+y)-2f(x-y)+12f(x) \qquad (0.3)$$

[۹] Kim, Jun
[۱۰] J.M.Rassias

را در فضاهای نرمدار تصادفی بررسی می‌کنیم. در ادامه یک حل عمومی برای معادله تابعی ترکیبی درجه دو— چهار

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۴[f(x+y)+f(x-y)]+۲[f(۲x)-۴f(x)]-۶f(y) \qquad (۰.۴)$$

ارائه می‌دهیم و سپس پایداری آنرا در فضاهای نرمدار تصادفی بررسی می‌کنیم.
برای این منظور از مقاله های زیر استفاده شده است.

1- M.Eshaghi Gordji, J. M. Rassias and M. Bavand Savadkouhi, Approximation of the quartic and cubic functional equations in RN-spaces, Europian Journal of Pure and Applied Mathematics **2**, (2009) 494-507.

2- M.Eshaghi Gordji.M.Bavand Savadkouhi and Choonkil Park, Quadratic-quartic functional equations in RN-spaces, Journal of Inequalities and Applications **2009**, (2009) 14 pages.

همچنین پایداری معادله ترکیبی جمعی درجه دو— سه

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲[f(x+y)-f(x-y)]+۲f(۳y)-۶f(۲y)+۶f(y)$$

را در فضاهای نرمدار تصادفی بررسی می‌کنیم.
در فصل سوم، پایداری معادله تابعی ترکیبی درجه دو— چهار معرفی شده در فصل دوم را در فضاهای نرمدار محتمل بررسی خواهیم کرد.
در فصل چهارم با استفاده از روش نقطه ثابت پایداری معادله تابعی جمعی درجه دو—چهار

$$f(x+۲y)+f(x-۲y)=۲f(x+y)+۲f(-x-y)+۲f(x-y)+۲f(y-x)-۴f(-x)$$
$$-۲f(x)+f(۲y)+f(-۲y)-۴f(y)-۴f(-y) \qquad (۰.۵)$$

را ابتدا در حالت فرد و سپس در حالت زوج بررسی می‌کنیم. در این مورد از مقاله زیر استفاده می‌کنیم.

3- Choonkil Park, Fuzzy stability of an additive -quadratic-quartic functional equations, Journal of Inequalities and Applications **2010**, (2010) 22 pages.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

این فصل حاوی تعاریف و مفاهیم مقدماتی می‌باشد که در فصول بعدی مورد نیاز هستند.

۱.۱ فضاهای نرمدار تصادفی

در این بخش تعاریف مربوط به فضای نرمدار تصادفی با $t-$ نرم پیوسته را ارائه می‌دهیم که در فصل ۲ مورد نیاز است.

تعریف ۱.۱.۱ فضای برداری X روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را فضای نرمدار گوییم، هرگاه تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$، سه خاصیت زیر را دارا باشد:

۱) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۳) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

دراینصورت زوج $(X, \|.\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم. با قرار دادن $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای نرمدار X به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم.

تذکر ۲.۱.۱ فضای همهٔ نگاشت های $F:\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}\rightarrow[\circ,۱]$ که F پیوسته چپ و غیر نزولی روی $\mathbb{R}$ است، $F(\circ)=\circ$ و $F(\infty)=۱$ را با Δ^+ نمایش می‌دهیم. یعنی Δ^+ فضای همه توابع توزیع است. D^+ زیرمجموعه ای از Δ^+ شامل همهٔ توابع $f\in\Delta^+$ است که $l^-F(+\infty)=۱$ که در آن $l^-f(x)$ حد چپ تابع f در نقطه x است، یعنی

$$l^-f(x)=\lim_{t\rightarrow x^-}f(t)$$

Δ^+ با ترتیب نقطه به نقطه معمولی توابع، یعنی $F\leq G$ اگر و فقط اگر به ازای هر$t\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $F(t)\leq G(t)$، یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است. عضو ماکسیمال آن با این رابطه ترتیب، تابع توزیع زیر است:

$$\varepsilon_\circ(t)=\begin{cases}\circ & t\leq\circ\\ ۱ & t>\circ\end{cases}$$

تعریف ۳.۱.۱ نگاشت $T:[\circ,۱]\times[\circ,۱]\rightarrow[\circ,۱]$ را یک نرم مثلثی پیوسته یا به طور خلاصه یک $t-$ نرم پیوسته گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱) T جابه جایی است یعنی به ازای هر $x,y\in[\circ,۱]$،

$$T(x,y)=T(y,x)$$

۲) T شرکت پذیر است یعنی به ازای هر $x,y,z\in[\circ,۱]$،

$$T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$$

۳) T پیوسته است .

۴) به ازای هر $a\in[\circ,۱]$، $T(a,۱)=a$

۵) به ازای هر $a,b,c,d\in[\circ,۱]$، که $a\leq c$ و $b\leq d$،

$$T(a,b)\leq T(c,d)$$

مثال ۴.۱.۱ نگاشت های $T_P(a,b)=ab$، $T_M(a,b)=min(a,b)$ و $T_L(a,b)=max(a+b-1,0)$ ($t-$نرم لوکاسویچ) مثال هایی از t نرمهای پیوسته هستند.

تذکر ۵.۱.۱ اگر T یک $t-$نرم پیوسته و $\{x_n\}$ یک دنباله از اعداد در بازه$[0,1]$ باشد آنگاه $T_{i=1}^n x_i$ با تعریف بازگشتی زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} T_{i=1}^1 x_i &= x_1 \\ T_{i=1}^n x_i &= T(T_{i=1}^{n-1} x_i, x_n); \qquad (n\ge 2) \\ T_{i=n}^\infty x_i &= T_{i=1}^\infty x_{n+i-1} \end{aligned}$$

قضیه ۶.۱.۱ برای $t-$نرم لوکاسویچ رابطهٔ زیر برقرار است.

$$\lim_{n\to\infty}(T_L)_{i=1}^\infty x_{n+i-1}=1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty (1-x_n)<\infty$$

برهان: ر.ک. [۲۳]

تعریف ۷.۱.۱ یک فضای نرمدار تصادفی[1] یا به طور خلاصه یک $RN-$ فضا، عبارت است از سه تایی (X,μ,T) که در آن X یک فضای برداری، T یک $t-$نرم پیوسته و μ یک نگاشت از X به توی D^+ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$RN1$) به ازای هر $t>0$، $\mu_x(t)=\varepsilon_0(t)$ اگر وفقط اگر $x=0$،

$RN2$) به ازای هر $x\in X$ و $\alpha\neq 0$ ، $\mu_{\alpha x}(t)=\mu_x(t/|\alpha|)$،

$RN3$) به ازای هر $x,y\in X$ و $t,s\ge 0$ ، $\mu_{x+y}(t+s)\ge T(\mu_x(t),\mu_y(s))$.

مثال ۸.۱.۱ هر فضای نرمدار$(X,\|.\|)$ یک فضای نرمدار تصادفی (X,μ,T_M) تعریف می کند که

$$\mu_x(t)=\frac{t}{t+\|x\|}$$

و T_M، $t-$نرم مینیموم است. این فضا، فضای نرمدار تصادفی القا شده نامیده می‌شود.

[1] random normed space

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم (X,μ,T) یک $RN-$ فضا باشد.

۱) دنباله $\{x_n\}$ در X به x همگراست هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، $\lambda > ۰$ یک عدد صحیح مثبت N موجود باشد به طوری که به ازای $n \geq N$،

$$\mu_{x_n - x}(\epsilon) > ۱ - \lambda.$$

۲) دنباله $\{x_n\}$ در X یک دنباله کوشی است هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$، $\lambda > ۰$ یک عدد صحیح مثبت N موجود باشد به طوری که به ازای $n \geq m \geq N$،

$$\mu_{x_n - x_m}(\epsilon) > ۱ - \lambda.$$

۳) $RN-$ فضای (X,μ,T) کامل است اگر وفقط اگر هر دنباله کوشی در X به یک نقطه در X همگرا باشد. $RN-$فضای کامل را $RN-$فضای باناخ گویند.

قضیه ۱۰.۱.۱ اگر X و Y فضاهای برداری نرمدار حقیقی باشند نگاشت $f : X \to Y$ از درجه دو است یعنی در معادله تابعی

$$f(x+y) + f(x-y) = ۲f(x) + ۲f(y)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر یک تابع دو جمعی متقارن و منحصر به فرد $B : X \times X \to Y$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(x) = B(x,x)$.

برهان: ر. ک. [۱].

قضیه ۱۱.۱.۱ اگر X و Y فضاهای برداری نرمدار حقیقی باشند، نگاشت $f : X \to Y$ از درجه سه است یعنی در معادله تابعی

$$f(۲x+y) + f(۲x-y) = ۲f(x+y) + ۲f(x-y) + ۱۲f(x)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر تابع منحصر به فرد $C : X \times X \times X \to Y$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(x) = C(x,x,x)$ که C نسبت به هر یک متغیر ثابت، متقارن و برای دو متغیر ثابت جمعی است.

برهان: ر. ک. [۲۷].

قضیه ۱۲.۱.۱ اگر X و Y فضاهای برداری نرمدار حقیقی باشند نگاشت $f : X \to Y$ درجه چهار است یعنی در معادله تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۴f(x+y)+۴f(x-y)+۲۴f(x)-۶f(y)$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر یک تابع چند جمعی منحصر به فرد $B : X \times X \times X \times X \to Y$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in X$، $f(x)=B(x,x,x,x)$.

برهان: ر. ک. [۳۹].

۲.۱ فضاهای نرمدار محتمل

در این بخش مفاهیم و تعاریف مربوط به فضاهای نرمدار محتمل[۲] را بیان می‌کنیم که در فصل سه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۲.۱ نگاشت $\tau : \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ را یک تابع مثلث گوییم اگر شرایط زیر برقرار باشند:

۱) τ جابجایی است یعنی به ازای هر $F,G \in \Delta^+$،

$$\tau(F,G)=\tau(G,F)$$

۲) τ شرکت پذیراست یعنی به ازای هر $F,G,H \in \Delta^+$،

$$\tau(\tau(F,G),H)=\tau(F,\tau(G,H))$$

۳) τ روی هر مولفه‌اش غیر نزولی است یعنی به ازای هر $F,G,H \in \Delta^+$،

$$F \le G \Rightarrow \tau(F,H) \le \tau(G,H)$$

---

[۲] probabilistic normed space

۴) $\epsilon_\circ$ عنصر واحد آن است یعنی به ازای هر $F \in \Delta^+$،

$$\tau(F, \epsilon_\circ) = \tau(\epsilon_\circ, F) = F$$

اگر $F, G \in \Delta^+$ و $h \in (\circ, ۱)$ سه تایی (F, G, h) به این معنی است که به ازای هر $x \in (\circ, ۱)$،

$$G(x) \leq F(x+h) + h$$

متر d_s را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d_s(F, G) := inf\{h \in (\circ, ۱) : (F, G; h), (G, F; h)\}$$

گوییم یک تابع مثلث پیوسته است اگر در فضای متریک (Δ^+, d_s) پیوسته باشد.

تذکر ۲.۲.۱ اگر $\{F_n\}$ دنباله‌ای ازاعضای Δ^+ باشد آنگاه تابع های مثلث به طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{i=۱}^{۱}(F_i) = F_۱$$

$$\tau_{i=۱}^{n}(F_i) = \tau(\tau_{i=۱}^{n-۱}(F_i), F_n), \qquad (n \geq ۲)$$

نگاشت های $\tau_T(F, G)(x) = sup_{s+t=x} T(F(s), G(t))$ و $\tau_T^*(F, G)(x) = sup_{s+t=x} T^*(F(s), G(t))$ مثال هایی از تابعهای مثلث هستند که در آن T یک t—نرم پیوسته و $T^*(x, y) = ۱ - T(۱-x, ۱-y)$ است که T^* را یک t—کونرم[۳] پیوسته گوییم. برای مثال $M(x, y) = min(x, y)$ و $M^*(x, y) = max(x, y)$ و یا $T(x, y) = xy$ و $T^*(x, y) = x + y - xy$ به ترتیب t—نرم و t—کونرم‌های پیوسته هستند.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنیم $\tau_۱$ و $\tau_۲$ دو تابع مثلث باشند گوییم $\tau_۲$ مغلوب $\tau_۱$ است و می‌نویسیم $\tau_۱ \gg \tau_۲$ هرگاه به ازای هر $F_۱, F_۲, G_۱, G_۲ \in \Delta^+$،

$$\tau_۱(\tau_۲(F_۱, G_۱), \tau_۲(F_۲, G_۲)) \geq \tau_۲(\tau_۱(F_۱, G_۱), \tau_۱(F_۲, G_۲))$$

[۳] t-conorm

در سال ۱۹۹۳ السینا[۴] ، سویزر [۵] و اسکلار [۶] تعریف جدیدی از فضاهای نرمدار محتمل ارائه دادند که در زیر آمده است.

تعریف ۴.۲.۱ یک فضای نرمدار محتمل (یا به طور خلاصه یک PN–فضا)، چهارتایی (V, ν, τ, τ^*) است که در آن V یک فضای برداری حقیقی، τ و τ^* تابع های مثلث پیوسته و ν یک نگاشت $V \to \Delta^+$ با $p \to \nu_p$ است بطوریکه به ازای هر $p, q \in V$ شرایط زیر برقرارند:

$(PN۱)$ $\nu_p = \epsilon_۰$ اگر و فقط اگر $p = \theta$ که در آن θ بردار صفر در V است،

$(PN۲)$ به ازای هر $p \in V$، $\nu_{-p} = \nu_p$،

$(PN۳)$ به ازای هر $p, q \in V$، $\nu_{p+q} \geq \tau(\nu_p, \nu_q)$،

$(PN۴)$ به ازای هر $\alpha \in [۰, ۱]$، $\nu_{-p} \leq \tau^*(\nu_{\alpha p}, \nu_{(۱-\alpha)p})$.

اگر نامساوی $(PN۴)$ را با $\nu_p = \tau_M(\nu_{\alpha p}, \nu_{(۱-\alpha)p})$ جابجا کنیم، آنگاه PN–فضای جدید یک فضای سرستنو[۷] نامیده می‌شود و به عنوان یک نتیجه شرطی قوی تر از شرط $(PN۲)$ برقرار است، یعنی به ازای هر $p \in V$، $\lambda \neq ۰$ و $x \in \mathbb{R}$، $\nu_{\alpha p}(x) = \nu_p(\frac{x}{|\alpha|})$.

لم ۵.۲.۱ اگر $|\alpha| \leq |\beta|$ آنگاه به ازای هر $p \in V$، $\nu_{\beta p} \leq \nu_{\alpha p}$.

برهان: ر. ک. [۳]

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید (V, ν, τ, τ^*) یک PN–فضا باشد.

۱) دنباله $\{p_n\}_n$ در V به $p \in V$ همگرا است هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ و $\lambda > ۰$ عدد صحیح مثبت N موجود باشد بطوریکه به ازای $n \geq N$،

$$\nu_{p_n - p}(\epsilon) > ۱ - \lambda$$

[۴] Alsina
[۵] Schweizer
[۶] Sclar
[۷] Serstnev

۲) دنباله $\{p_n\}_n$ در V دنباله کوشی است هرگاه به ازای هر $\epsilon > ۰$ و $\lambda > ۰$ عدد صحیح مثبت N موجود باشد بطوریکه به ازای $n, m \geq N$،

$$\nu_{p_n - p_m}(\epsilon) > ۱ - \lambda$$

۳) PN–فضای (V, ν, τ, τ^*) کامل است اگر و فقط اگر هر دنباله کوشی در V، همگرا به یک نقطه در V باشد.

قضیه ۷.۲.۱ فرض کنید $(V_i, \nu_i, \tau, \tau^*)$، به ازای $i = ۱, ..., n$ تحت تابع های مثلث τ, τ^*، PN–فضا باشند، $\tau \ll \tau_۱$ و $\tau_۱ \ll \tau^*$. اگر $V = V_۱ \times ... \times V_n$ ، $\eta_p = \tau_۱{}_{i=۱}^{n-۱}(\nu_{۱p_۱}, ..., \nu_{np_n})$ و $p = (p_۱, ..., p_n)$ آنگاه (V, η, τ, τ^*) یک PN–فضا است.

برهان: با استفاده از قضیه ۷ از [۳۲] و استقرا حکم بدست می‌آید. □

تعریف ۸.۲.۱ اگر T یک t–نرم پیوسته باشد آنگاه فضای $(X, \nu, \tau_T, \tau_T^*)$ یک PN–فضای منجر[۸] (یا به طور خلاصه MPN–فضا) نامیده می‌شود و با (X, ν, τ_T) نمایش داده می‌شود که در آن

$$\tau_T(F, G)(x) = sup_{s+t=x} T(F(s), G(t))$$

۳.۱ فضاهای نرمدار فازی

در این بخش مفاهیم و تعاریف مربوط به فضاهای نرمدار فازی را بیان می‌کنیم که در فصل چهار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. تابع $N : X \times \mathbb{R} \to [۰, ۱]$ را نرم فازی روی X گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $s, t \in \mathbb{R}$ شرایط زیر برقرار باشد:

$(N_۱)$ به ازای هر $t \leq ۰$، $N(x, t) = ۰$،

$(N_۲)$ $x = ۰$ اگر و فقط اگر به ازای هر $t > ۰$، $N(x, t) = ۱$،

[۸] Menger