بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فنی و مهندسی

گروه مکانیک

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

مهندسی مکانیک-طراحی کاربردی

تحلیل تنش در صفحه تضعیف‌شده توسط ترک براساس نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش

استاد راهنما:

دکتر علیرضا فتوحی

پژوهش و نگارش:

ایمان کریمی پور

زمستان ۱۳۹۲

گواهی حفظ حقوق مادی و معنوی پایان‌نامه

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی نسبت دادن پایان‌نامه برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم که با تحمل رنج و مشقت فراوان در راه شکوفایی ام تلاش کردند و همیشه دعای خیرشان مایه

موفقیتم بوده است

و

خواهر مهربانم که همواره و در همه حال پشتیبان من بوده

و

به تمامی آنان که در راه آموختن مرا یاری کردند

تشکر و قدردانی

آنچه پدید آمده است نتیجه تلاش و محبت جمع زیادی است. از این میان پدر و مادرم بیش‌ترین سهم را داشته‌اند که از ایشان تشکر و قدردانی می کنم همچنین بر خود لازم می دانم که از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر فتوحی به واسطه راهنمایی های ارزنده و حمایت های بی دریغ و محبت های فراوان ایشان کمال تشکر را داشته باشم و بدین وسیله گوشه ای از زحماتی را که ایشان در طی انجام این پایان نامه متقبل شدند، جبران نمایم. بی شک آموخته های من در این تحقیق حاصل دلسوزی ها و راهنمایی های بی دریغ ایشان است و انجام این پروژه جز با حمایت های سخاوتمندانه و بی دریغ ایشان به معنای واقعی کلمه غیر ممکن بود. همچنین بر خود لازم می دانم از اساتید محترم سرکار خانم دکتر اسعدی و جناب آقای دکتر شفیعی که به عنوان اساتید داور قبول زحمت فرمودند صمیمانه تشکر کنم.

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از روش توزیع نابجایی تحلیل تنش در یک صفحه الاستیک بی‌نهایت حاوی مجموعه‌ای از ترک‌ها تحت بار پادصفحه‌ای بر اساس تئوری گرادیان کرنش انجام می‌گردد. ابتدا حل نابجایی پادصفحه‌ای در صفحه با حل معادله بای هارمونیک، اعمال شرایط مرزی و پیوستگی مربوط به نابجایی پادصفحه‌ای با استفاده از تبدیل فوریه انجام می‌گردد و میدان تنش در اثر نابجایی پادصفحه‌ای به صورت انتگرالی به دست آمده و از روی آن توزیع نابجایی تعیین می‌شود. با استفاده از این حل، معادلات انتگرالی برای تحلیل مسئله چندین ترک به دست می‌آید. این معادلات انتگرالی از نوع تکین مرتبه بالا هستند همچنین کرنل آن‌ها به صورت انتگرال روی خط بی‌نهایت است. این انتگرال‌ها باید به گونه‌ای تنظیم شوند که با بزرگ شدن پارامتر انتگرال، انتگراندها به سرعت به سمت صفر میل کنند تا تابع توزیع نابجایی با دقت بالا به دست آید. بعد از به دست آوردن توزیع نابجایی روی ترک‌ها می‌توان ضریب شدت تنش برای ترک‌ها را به دست آورد. مثالی جهت صحت‌سنجی روش انجام شده است و سپس چند مسئله جدید جهت نمایش قابلیت روش توزیع نابجایی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی :گرادیان کرنش- پارامتراثرطول– مکانیک محیط پیوسته تعمیم‌یافته- نابجایی پادصفحه‌ای- مکانیک شکست – تکینگی مرتبه بالا.

فهرست مطالب شماره صفحه

فصل اول: مقدمه..... ۱

۱-۱-کلیات ۱

۱-۲- رفتار غیر موضعی مواد ۱

۱-۳- مروری بر الاستیسیته گرادیان کرنش خطی..... ۲

۱-۴-اهمیت اثر اندازه در مقیاس نانو..... ۵

۱-۵-تحقیقات انجام‌شده در نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش ۶

فصل دوم: اصول نظریه توزیع نابجایی ۱۰

۲-۱-مفهوم ضریب شدت تنش..... ۱۰

۲-۲-نابجایی‌ها..... ۱۱

فصل سوم: حل نابجایی پادصفحه‌ای..... ۱۰

مقدمه:..... ۱۰

۳-۱. معادلات حاکم بر نظریه گرادیان کرنش ۱۰

۳-۲-معادلات تشکیل دهنده برای تئوری میکروالاستیسیته: تابع چگالی انرژی کرنش ۱۰

۳-۳. حل مساله نابجایی..... ۲۷

۳-۳-۱. حالت پاد صفحه‌ای..... ۲۷

۳-۳-۲. استخراج معادلات حرکت در فضای حقیقی..... ۲۸

۳-۳-۲-۱- تعیین جواب در فضای حقیقی ۳۲

فصل چهارم: حل مسئله ترک به کمک روش توزیع نابجایی ۴۳

مقدمه ۴۳

۴-۱. اصل باکنر ۴۳

۴-۲. کاربرد روش توزیع نابجایی ۴۲

۴-۲-۱-مفهوم اصل باکنر ۴۲

۴-۳- معادلات انتگرالی ترک ۴۵

۴-۳ -۱-معادلات انتگرالی چندین ترک ۴۷

فصل پنجم: روش حل عددی معادلات انتگرالی ۵۷

مقدمه ۵۷

۵-۱-حل معادلات انتگرالی ۵۷

۵-۲. محاسبه ضریب شدت تنش ۵۸

۵-۲-۱. ضریب شدت تنش در حالت کلاسیک ۵۹

۵-۲-۲-محاسبه ضریب شدت تنش در نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش: ۶۱

فصل ششم: نتایج و بحث ۷۵

مقدمه ۷۵

۶-۱. نتایج نمودارهای تنش ۷۵

۶-۲-اعتبارسنجی ۶۸

۶-۳-ترک تنها در صفحه بی‌نهایت تحت تنش پاد صفحه‌ای ۶۸

۶-۳-۱-یک ترک در صفحه بی‌نهایت تحت تنش پاد صفحه‌ای ۶۹

۶-۴-دو ترک در صفحه بینهایت تحت تنش پادصفحه‌ای ۷۳

۶-۴-۱-دو ترک مستقیم و همراستا ۷۳
۶-۴-۱-۱-محاسبه ضریب شدت تنش در حالت کلاسیک: ۷۴
۶-۴-۲-دو ترک مستقیم و غیرهمراستا ۷۸
۶-۴-۲-۱-حالت اول ۷۸
۶-۴-۲-۲-حالت دوم ۸۰

۶-۵-صفحه بی‌نهایت شامل سه ترک: ۸۳
۶-۵-۱-سه ترک مستقیم و همراستا ۸۳
۶-۵-۱-۱-محاسبه ضریب شدت تنش در حالت کلاسیک ۸۴
۶-۵-۲-سه ترک مستقیم و غیر همراستا ۸۹
۶-۵-۲-۱-حالت اول ۸۹
۶-۵-۲-۲-حالت دوم ۹۵

۶-۶- نتیجه‌گیری ۱۰۲

فصل هفتم: نتیجه‌گیری و پیشنهادها ۱۰۳

۷-۱-مقدمه ۱۰۳

۷-۲-نتیجه‌گیری ۱۰۳

پیشنهادها ۱۰۴

مراجع ۱۰۵

ABSTRACT ۱۱۰

فهرست اشکال شماره صفحه

شکل (۲-۱). نمایش سه مود اصلی ترک ۱۰
شکل (۲-۲). محورهای مختصات در نظرگرفته شده در نوک ترک ۱۰

شکل (۲-۳). یک استوانه (A) در حالت اولیه و (B) تا (G) در حالتهای تغییر شکل یافته برای ایجاد انواع نابجایی‌ها[۴۶] ۱۳
شکل (۲-۴). نابجایی لبه ای در بلور ساده مکعبی [۴۶] ۱۴
شکل (۲- ۵). موازی بودن خط نابجایی با بردار برگرز در نابجایی پادصفحه‌ای [۴۶] ۱۴
شکل (۲-۶). نابجایی پادصفحه‌ای [۴۶] ۱۵
شکل (۲-۷). نابجایی پادصفحه‌ای در بلور ساده مکعبی [۴۶] ۱۵
شکل (۲-۸). یک نابجایی حلقه بسته ۱۶
شکل (۳-۲) تعادل گشتاور برای المان بی نهایت کوچک ۲۲
شکل (۳-۳). صفحه بی‌نهایت شامل نابجایی پادصفحه‌ای ۳۰
شکل (۴-۱). اصل باکنر[۵۶] ۴۳
شکل (۴-۲). کاربرد اصل باکنر برای ترک ۴۴
شکل (۴-۳). مدل‌سازی ترک با استفاده از توزیع نابجایی، الف) آرایش نابجایی‌ها ب)آرایش نابجایی در طول یک المان کوچک پ) چگالی نابجایی د)جابجایی دهانه ترک ۴۵
شکل (۴-۴). نحوه چیدمان نابجایی‌ها برای تشکیل ترک ۴۶
شکل (۶-۱). تنش $\sigma_{xz}/(b_z G)$ در صفحه شامل نابجایی برای مقادیر مختلف L در فاصله $x=0.5$ از مبدأ مختصات و $\rho=L'/L=0.5$ ۷۵
شکل (۶-۲). تنش $\sigma_{yz}/(b_z G)$ در صفحه شامل نابجایی برای مقادیر مختلف L در فاصله $x=0.5$ از مبدأ مختصات و $\rho=L'/L=0.5$ ۶۶
شکل (۶-۳). تنش $\sigma_{xz}/(b_z G)$ در صفحه شامل نابجایی برای مقادیر مختلف L در فاصله $y=0.5$ از مبدأ مختصات و $\rho=L'/L=0.5$ ۶۶
شکل (۶-۴). تنش $\sigma_{yz}/(b_z G)$ در صفحه شامل نابجایی برای مقادیر مختلف L در فاصله $y=0.5$ از مبدأ مختصات و $\rho=L'/L=0.5$ ۶۸
شکل (۶-۵). صفحه بینهایت حاوی یک ترک تحت تنش پاد صفحه‌ای ۶۹
شکل (۶-۶). ضریب شدت تنش بی بعد شده $K_{III}/K_{III}^{classic}$ بر حسب $\tilde{L}$ ۷۰
شکل (۶-۷). ضریب شدت تنش بی بعد شده $K_{III}/K_{III}^{classic}$ بر حسب $\tilde{L}$ ۷۱
شکل (۶-۸). میزان بازشدگی ترک در طول خط ترک به ازای مقادیر مختلف $\tilde{L}$ و $\tilde{L}'$ ۷۲
شکل (۶-۹). نمودار جابجایی نوک سمت راست ترک برای نظریه کلاسیک و گرادیان کرنش ... ۷۲
شکل (۶-۱۰). صفحه بی‌نهایت شامل دو ترک ۷۵

شکل(۶-۱۱). ضریب شدت تنش بی بعد شده $K_{III}/K_{III}^{classic}$ نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف.الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۷۶
شکل(۶-۱۲). ضریب شدت تنش بی بعد شده $K_{III}/K_{III}^{classic}$ نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۷۷
شکل(۶-۱۳).آرایش دو ترک غیر هم راستا در صفحه بی‌نهایت ۷۸
شکل(۶-۱۴). ضریب شدت تنش نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۷۹
شکل (۶-۱۵). ضریب شدت تنش نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۸۰
شکل (۶-۱۶). ضریب شدت تنش نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۸۲
شکل (۶-۱۷). ضریب شدت تنش نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۸۳
شکل (۶-۱۸). صفحه بینهایت شامل سه ترک هم راستا ۸۵
شکل(۶-۱۹). ضریب شدت تنش نوک A برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۸۶
شکل (۶-۲۰). ضریب شدت تنش نوک B برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۸۷
شکل(۶-۲۱). ضریب شدت تنش نوک C برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب)وجود اثر اندازه سطح وحجم ۸۸
شکل (۶-۲۲). آرایش صفحه بی‌نهایت حاوی سه ترک غیر هم راستا ۸۹
شکل (۶-۲۳). ضریب شدت تنش نوک A_1 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۰
شکل (۶-۲۴). ضریب شدت تنش نوک A_2 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۱
شکل (۶-۲۵). ضریب شدت تنش نوک B_1 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۲

شکل (۶-۲۶). ضریب شدت تنش نوک B_2 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۳
شکل (۶-۲۷). ضریب شدت تنش نوک C_1 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۴
شکل (۶-۲۸). ضریب شدت تنش نوک C_2 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۵
شکل (۶-۲۹). ضریب شدت تنش نوک A_1 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۷
شکل (۶-۳۰). ضریب شدت تنش نوک A_2 برای اثر اندازههای مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۸
شکل (۶-۳۱). ضریب شدت تنش نوک B_1 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۹۹
شکل (۶-۳۲). ضریب شدت تنش نوک B_2 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۱۰۰
شکل (۶-۳۳). ضریب شدت تنش نوک C_1 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۱۰۱
شکل (۶-۳۴). ضریب شدت تنش نوک C_2 برای اثر اندازه‌های مختلف الف) نادیده گرفتن اثر اندازه سطح ب) وجود اثر اندازه سطح وحجم ۱۰۲

فهرست جداول

جدول ۱-۱. دسته بندی تئوری‌های الاستیسیته ۳
جدول ۶-۱. مقایسه نتایج عددی ضریب شدت تنش ۶۸

فصل اول: مقدمه

۱-۱-کلیات:

با وجود پیشرفت‌های زیاد در دانش فنی بشر، خرابی ناگهانی بعضی سازه‌ها و قطعات مهندسی، خسارات مالی و جانی زیادی را در بر داشته است. کاربرد وسیع ولی نه صحیح فلزات در قرن ۱۹ موجب حوادث ناگوار فراوانی گردید. به عنوان مثال بر اساس گزارش ناسا در سال ۱۹۷۶ خسارات ناشی از شکست سازه‌ها و کوشش‌ها به منظور جلوگیری از آن‌ها حدود ۱۱۹ میلیارد دلار در سال برای آمریکا هزینه در بر داشته است[۱].حوادثی که در طول ۲۰۰ سال اخیر بر اثر شکست اتفاق افتاده است، در[۲ و ۳] به رشته تحریر درآمده است.در بررسی علل شکست، محققین دریافتند که طراحی بسیاری از این سازه‌ها بر مبنای نظریه الاستیسیته و مقاومت مصالح درست بوده است و عامل شکست ریز ترک‌هایی بودند که در سازه وجود داشته یا در حین کار به وجود آمده‌اند. تجزیه و تحلیل این سازه‌ها بر مبنای نظریه الاستیسیته و مقاومت مصالح موفقیت‌آمیز نبوده است. لذا در دهه دوم قرن بیستم علم جدیدی به نام مکانیک شکست پایه‌گذاری شد که تجزیه و تحلیل سازه‌ها را بر مبنای وجود ترک در آن‌ها بررسی می‌کند. کاربرد عملی این علم در سازه‌های مهندسی به خصوص صنایع فضایی، انرژی اتمی، کشتی‌سازی و ... می‌باشد[۱].

۱-۲- رفتار غیر موضعی مواد:

موادی که دارای ساختاری در حدود ابعاد میکرو هستند، به دلیل نقش مشخصه‌های ابعادی، شامل ابعاد و اندازه و فاصله توده‌های عیوب موجود، اندازه دانه‌های مواد، فاصله فیبر مواد و غیره، دارای رفتار غیر موضعی[1] می‌باشند. طول‌های مشخصه میکرو ساختار در مقیاس‌هایی که از ابعاد مورد نیاز برای تحلیل ماده کوچک تراست، معنی‌دار هستند. ازآنجایی‌که نظریه‌های مرسوم و کلاسیک محیط پیوسته شامل پارامترهای توضیح‌دهنده وابستگی به ابعاد مواد نمی‌باشند، به همین دلیل استفاده از نمونه‌های غیر موضعی که در آن پارامتر مشخصه ابعاد میکرو ساختار وجود دارد، مورد توجه قرارگرفته است. به طوری که در این نمونه‌ها تنش دریک نقطه ماده فقط تحت تأثیر وضعیت آن نقطه نیست و وضعیت سایر نقاط همسایگی آن نیز در وضعیت آن تأثیر دارد. نظریه‌های غیر موضعی بر روی هر نوع معادله‌ساختاری قابل‌اعمال است [۴].

1. non-local

با الهام گرفتن از مسایل مختلف وابسته به ابعاد که در بسیاری از مواد فلزی و غیرفلزی دیده شده است و با توجه به این‌که معادلات موجود برای تحلیل رفتار مواد درناحیهٔ نرم شدگی درستی خود را از دست می‌دهند، نظریه‌های زیادی بر مبنای درنظرگرفتن گرادیان کمیات اساسی شکل-دهی ماده بوجودآمده که هدف آن‌ها توجیه رفتار مواد با استفاده از اندازه مقیاس طول داخلی ماده می‌باشد. این نظریه‌ها اغلب بر مبنای نظریات محیط پیوسته ارائه‌شده است.

در معادلات روش‌های مبتنی بر الاستیسیته غیر کلاسیک، گرادیان مرتبه بالای کمیات اساسی، همراه با درنظرگرفتن محیط پیوسته غیر موضعی[1] ارائه‌شده است. این کمیات وابسته به ابعاد ماده، جزء خواص ماده بوده و به صورت کمی و کیفی اثرات وابستگی به ابعاد را توجیه می-کنند .علیرغم تمامی تلاش‌های صورت گرفته برای یافتن توجیه فیزیکی مقیاس طولی ماده، این کمیت هنوز مفهوم فیزیکی خاصی که مورد قبول محققین باشد را ندارد[۵].در واقع تنها چیزی که با قاطعیت می‌توان گفت این است که مقیاس طولی ماده، کمیتی است که به صورت ضریبی از گرادیان‌های مرتبه بالای کرنش در معادلات وارد می‌شوند وبه‌کمک آن‌ها سعی شده، رفتار وابسته به ابعاد مواد توجیه گردد.

نتایج تحقیقات آزمایشگاهی نشان داده‌اند که وقتی ابعاد هندسه مساله مورد مطالعه در مقیاس میکرو باشد، نظریه کلاسیک الاستیسیته قادر به پیش‌بینی رفتار الاستیک مواد نیست. این عدم توانایی در پیش‌بینی رفتار مواد ناشی از این است که نظریه کلاسیک الاستیسیته قادر به مدل‌سازی رفتار مواد در مقیاس میکرو نیست. نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش با واردکردن پارامتر جدیدی به نام طول مشخصه ماده به عنوان یکی از خصوصیات ماده (علاوه بر ضرایب لامه) در معادلات ساختاری، اقدام به در نظر گرفتن اثرات ساختار ماده در مقیاس میکرو بر روی رفتار مواد می‌کند. در این نظریه، تابع چگالی انرژی کرنش ماده علاوه بر کرنش، تابعی از گرادیان کرنش نیز در نظر گرفته می‌شود که منجر به وارد شدن چند عبارت جدید در معادلات ساختاری می‌شود [۶].

۱-۳- مروری بر الاستیسیته گرادیان کرنش خطی

از آنجا که نظریه الاستیسیته کلاسیک قادر به پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو نمی-باشد و برای این منظور باید از نظریه‌های الاستیسیته غیر کلاسیک مانند نظریه الاستیسیته گرادیان کرنشی استفاده کرد.تعمیمی از الاستیسیته کلاسیک، الاستیسیته گرادیان کرنش[2] یا به

[1] .non-local continuum
[2] . strain gradient theory

طور مختصرتر الاستیسیته گرادیان نامیده می‌شود. انگیزه فیزیکی این موضوع اولین بار توسط کرونر در اوایل دهه شصت میلادی مطرح گردید [۷].نظریه‌های گرادیان کرنشی با اضافه نمودن جمله‌های گرادیان کرنش به معادله ساختاری الاستیسیته کلاسیک سبب توسعه آن گردیدند. به سبب وجود گرادیان‌ها، این نظریه‌ها باید دارای ثوابت ماده‌ی اضافه‌ای باشند که همگی دارای بعد طول هستند. این ثوابت ، ضرایب گرادیان نامیده می‌شوند. علاوه بر تنش کوشی، در برخی نمونه‌ها ابر تنش‌ها [۱] (به طور مثال تنش‌های دوگانه و تنش‌های سه‌گانه[۲]) نیز در این ساختار وارد می‌شوند. ابر تنش‌ها به صورت مزدوج گرادیان‌های کرنش مطرح می‌گردند و دارای مفهوم فیزیکی می-باشند.همان‌گونه که بیان‌شد جواب الاستیسیته کلاسیک در خطوط نابجایی‌های مستقیم[۳] دارای تکینگی می‌باشد. التان و ایفانتیس [۸] توانستند تکینگی کرنش را حذف نمایند ولی همچنان تنش به صورت تکین باقی ماند تا این‌که بعدها با تغییری در معادله ساختاری رو و ایفانتیس [۹] و نیز گوتکین و ایفانتیس [۱۰]. توانستند همچنین تنش را از حالت تکینگی خارج سازند.علاوه برتکینگی تنش و کرنش مساله دیگری که حائز اهمیت است پرش در تنش یا کرنش می‌باشد. به طور مثال اگر یک نابجایی را در محیط دوجنسی[۴] در نظر بگیریم با تغییر از یک محیط به محیط دیگر ناگهان مقدار تنش‌های غیرترکشن[۵] دارای یک پرش خواهند بود و یا اگر یک حجمی را تحت بارگذاری دوردست قرار دهیم نیز مقدار تنش‌های غیرترکشن دارای یک پرش خواهند بود. اگرچه این رفتارها ممکن است از دید ماکرو قابل توجیه باشد ولی از دیدگاه نانو یا میکرو نامعقول است. علاوه بر نظریاتی که بیان شد نظریات فراوان دیگری نیز موجود است که هر کدام دارای نقاط قوت و ضعف مربوط به خود است. از این تعداد نظریه می‌توان به نظریه الاستیسیته میکروپلار گرادیان و الاستیسیته میکروپلار غیر موضعی اشاره نمود که در حقیقت به ترتیب ترکیبی از نظریه میکروپلار و الاستیسیته گرادیان الاستیسیته غیر موضعی می‌باشند [۱۱] .

جدول ۱-۱. دسته بندی تئوری‌های الاستیسیته

الاستیسیته میکروپلار		الاستیسیته	
الاستیسیته میکروپلار گرادیان	الاستیسیته میکروپلار غیرموضعی	الاستیسیته غیر موضعی	الاستیسیته گرادیان

[1] . hyperstress
[2] . double stress and triple stress
[3] . straight dislocation
[4].bimedium
[5].traction

در نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش با در نظر گرفتن گرادیان میدان کرنش در محاسبه تابع انرژی کرنش جسم، پارامتر جدیدی به نام طول مشخصه ماده وارد معادلات ساختاری جسم می‌شود که به منظور بررسی رفتار مواد در مقیاس میکرو مورد استفاده قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که این پارامتر جدید به عنوان یکی از خصوصیات ماده (علاوه بر ضرایب لامه) در معادلات ساختاری، قادر به در نظر گرفتن ساختار ماده در تحلیل رفتار مواد می‌باشد. در این نظریه انرژی پتانسیل ماده علاوه بر کرنش، تابعی از گرادیان کرنش در نظر گرفته می‌شود که منجر به وارد شدن چند عبارت جدید در معادلات ساختاری می‌شود. این نظریه برای اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط میندلین[۱۲] مطرح شد و به دلیل اهمیت آن در سال‌های بعد توسط محققان دیگری بسط داده شد. محققان زیادی از نظریه گرادیان کرنش برای تحلیل رفتار مواد استفاده کرده‌اند، ولی کاربرد اصلی این نظریه در پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو است. مطالعات تجربی نشان داده‌اند که وقتی ابعاد جسم مورد مطالعه در مقیاس میکرو باشد نظریه کلاسیک الاستیسیته قادر به پیش‌بینی رفتار مواد نخواهد بود. از این رو با توجه به گسترش روزافزون کاربرد مواد در ابعاد میکرو در سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی، بسط و گسترش نظریه‌های غیر کلاسیک الاستیسیته برای پیش‌بینی رفتار مواد در مقیاس میکرو ضروری به نظر می‌رسد. پیش‌بینی می‌شود با توجه به اینکه نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش با واردکردن طول مشخصه ماده در معادلات ساختاری خصوصیات ماده را نیز در نظر می‌گیرد، نتایج متفاوتی نسبت به نظریه‌های کلاسیک حاصل شود. در نانو ساختارها، فضای خالی بین اتم‌ها نسبت به ابعاد نانو ساختار شایان توجه بوده و نمی‌توان از آن صرف‌نظر کرد .ضمناً، طول مشخصه داخلی نانو ساختارها در مرتبه طول مشخصه خارجی آن‌ها می‌باشد. بنابراین توجیه استفاده از نظریه مکانیک محیط پیوسته کلاسیک برای مدل‌سازی نانو ساختارها که اساساً بر فرض پیوستگی استواراست، مبهم می‌باشد .برای رفع این ابهام، برخی محققین به جای نظریه کلاسیک از نظریه‌های محیط پیوسته غیر کلاسیکی که می‌توانند تأثیرات ابعاد کوچک (در حد نانومتر) و ناپیوستگی ذاتی نانو ساختارها را در نظر بگیرد، بهره می‌برند .نظریه محیط پیوسته گرادیان کرنش، یکی از نظریه‌های محیط پیوسته غیر کلاسیک است که تأثیرات مقیاس‌های کوچک و عدم پیوستگی محیط مادی در معادلات مشخصه این نظریه لحاظ شده است.

این نظریه در سال ۱۹۶۴ توسط میندلین [۱۳]به نام نظریه گرادیان‌های کرنش ارائه شد .در این نظریه تعمیم‌یافته فرض بر آن بود که چگالی انرژی کرنشی علاوه بر آنکه متأثر از کرنش‌ها است به گرادیان‌های مرتبه اول و دوم کرنش نیز وابسته است .از این طریق با استفاده از پارامترهایی از بعد طول که به طول مشخصهٔ ماده معروف‌اند، قابلیت پیش‌بینی اثر اندازه به وجود می آید .این نظریه در سال ۲۰۰۰ توسط گوتکین[۱۴] به منظور مطالعه نابجایی‌ها[1]و نابچرخشی‌ها

[1] .dislocation

در ابعاد نانو مورد استفاده قرار گرفت .در سال ۲۰۰۳، لوباردا [۱۵]تئوری کوپل تنش را به منظور بررسی مسائل مربوط به ناهمگنی ها وناخالصی های دایروی در مسائل پادصفحه ای به کار گرفت و حل هایی به شکل بسته برای این دسته از مسائل ارائه نمود. در سال ۲۰۰۵ نیز ژانگ[۱۶] به کمک نظریه مرتبه دوم گرادیان کرنش که در آن اثر کوپل تنش نیز دیده شده است به بررسی مسئله ناخالصی‌های کروی در محیط بی‌نهایت پرداخته و سعی نموده‌اند تا به کمک روش ناخالصی معادل[1]، روشی برای حل مساله ناهمگنی ارائه کنند.آن‌ها در این مطالعه موفق شدند روشی تقریبی برای پیدا کردن میدان‌های الاستیک در اطراف ناهمگنی‌های کروی ارائه کنند .همین طور که از نتایج این مطالعه به منظور ارائه تخمینی برای مدول‌های الاستیک مؤثر برای مواد مرکب شامل ناهمگنی‌های کروی در ابعاد نانو نیز کمک گرفتند.

۱-۴-اهمیت اثر اندازه در مقیاس نانو

در مقیاس نانو پدیده مهمی که وجود دارد، وابستگی به اندازه مشخصات مادی می‌باشد. با اعمال معادلات کوپل تنش بر هر ذره مواد نانو ساختار، معادلات گشتاور را می‌توان به معادلات المان ماده افزود، همچنین معادلات تعادل گشتاور را می‌توان به عنوان قید به معادلات نیرویی اعمال نمود و این امر با اعمال یک ضریب به معادلات نیرویی که پارامتر اثر طول نامیده می‌شود، حاصل می‌شود. با توجه به اینکه پارامتر اثر طول ماهیت آماری دارد، این ضریب باید در معادلات غیرخطی و تغییر شکل‌های بزرگ ماده ظاهر شود. به طور کلی مواد نانو چون ساختار آن‌ها در ابعاد نانومتر است و مشاهدات تجربی نشان می‌دهد که رفتار مواد در ابعاد میکرومتر و نانومتر به ابعاد بستگی دارد لذا پارامتر اثر ابعاد (که به آن اثر طول نیز گفته می‌شود) در معادلات تغییر شکل الاستیک مواد در ابعاد نانومتر بایستی لحاظ گردد. در کاربردهای مهندسی اثر ابعاد ماده اهمیت به خصوصی دارد. نظریه کلاسیک مکانیک قابلیت توصیف رفتار وابستگی به اندازه را در سازه‌های بسیار کوچک ندارد بنابراین نظریه‌های غیر کلاسیک همانند الاستیک غیر موضعی [۱۷]تنش کوپل[۱۸]، نظریه گرادیان کرنش[۱۹]، نظریه کوپل تنش اصلاح‌شده[۲۰] و ... در سال‌های اخیر برای در نظر گرفتن اثر اندازه پیشنهاد شده است. برای حضور پارامتر اثر طول در معادلات معمولاً از نظریه کوسرات[۲۱] استفاده می‌شود. در این نظریه بر اثر اعمال نیرو به ماده علاوه بر تنش، ممان نیز در ماده به وجود می‌آید و می‌بایست در معادلات تعادل المان‌ها مد نظر قرار گیرد. مطالعات بر روی نتایج پارامتر اثر طول ماده در عمل بر روی فلزات در ابعاد میکرومتر (با ساختار نانومتری) توسط فلک و همکاران در سال ۱۹۹۴[۲۲] شروع شد و از آن پس توسط محققین دیگر استفاده شده است [۳۵-۲۳] و اثرات وابستگی به اندازه به صورت قابل‌توجهی در آزمایش‌های تغییر شکل میکرو سازه‌ها نشان داده شد. با توجه به رفتار آماری پارامترهای اثر طول، قابل

[1] .Equivalent inclusion method

پیش‌بینی است که در نظر گرفتن تغییر شکل‌ها به صورت تغییر شکل‌های بزرگ و متعاقباً معادلات غیرخطی جواب‌های مناسب تری را برای میکرو سازه‌ها حاصل می‌نمایند. بر اساس نتایج به دست آمده کوپل تنش در نظریه گرادیان کرنش، این نظریه به فرم غیرخطی نیز بسط داده شده است. در این حالت از یک پارامتر مقیاس طول به عنوان یک قید در معادلات ساختاری کلاسیک استفاده می‌شود.

۱-۵-تحقیقات انجام‌شده در نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش

همان طور که پیش از این ذکر شد، نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش برای اولین بار در سال ۱۹۶۳ توسط میندلین[۳۶] ارائه شد. دو سال بعد، وی به ارائه الاستیسیته گرادیان کرنش نوع دوم، با واردکردن مشتقات دوم کرنش پرداخت که علاوه بر اثرات میکرو ساختار اثرات انرژی سطحی نیز در نظر گرفته می‌شد. سه سال بعد میندلین و اشل[۳۷] به بیان نوع سوم نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش با واردکردن مشتقات دوران در تابع چگالی انرژی کرنشی پرداختند و مروری کلی بر روابط ساختاری، سینماتیک و معادلات حاکم بر هر سه نوع نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش پرداختند. در این مقاله با دسته‌بندی این نظریه در سه فرم، به مقایسه رابطه پارامترهایی چون تنش و کرنش در این سه فرم و نیز با تعریف کوپل تنش[1]به بیان رابطه تعادل تنش‌ها و تعادل ممان‌ها پرداختند. پس از این مقاله تغییراتی در این نظریه توسط محققان دیگر اعمال شد تا بتوان از حجم محاسبات در مسائل کاربردی کاست و از آن برای تحلیل مسائل زیادی استفاده کرد. امروزه از این فرمول‌بندی در حل مسائل زیادی استفاده شده است. ویتسمن و کوک[۳۸] در مقاله‌ای با عنوان تأثیرات گرادیان کرنش [2] در اطراف حفره کروی در یک ماده، با استفاده از نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش به تحلیل تنش در یک جسم بی‌نهایت با یک ناخالصی کروی پرداخته‌اند. در این مقاله از یک المان حجم نماینده [3] که یک ناخالصی کروی دارد و تحت تأثیر بار هیدرواستاتیک قرار گرفته است، استفاده شده است. در این مقاله نشان داده شده است که مقدار تنش پیش‌بینی‌شده توسط نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش در اطراف ناخالصی از آنچه توسط نظریه کلاسیک پیش‌بینی‌شده است بیشتر است و ضریب تمرکز تنش در اطراف ناخالصی بسیار بیشتر از مقدار پیش‌بینی‌شده توسط نظریه کلاسیک است. همچنین اثرات انرژی سطحی[4] در این تحلیل مورد توجه قرار گرفته است.

باید توجه داشت که حل مسائل با استفاده از روش میندلین در بسیاری از موارد پیچیده خواهد بود بنابراین نظریه‌های ساده‌تری به وجود آمدند. اکثر محققین به علت پیچیدگی

---

[1]-Couple Stress
[2]-Strain Gradient
3-Representative Volume Element(RVE)
4 . Surface Energy

الاستیسیته ی گرادیان کرنش میندلین در حل مسائل خود از روش الاستیسیته گرادیان کرنش تقریبی استفاده کرده‌اند[۳۹- ۴۱].

آلتان و ایفانتیس در سال ۱۹۹۲[۸] و رو و ایفانتیس در سال ۱۹۹۳[۹] یک روش آسان برای حل مسئله مقدار مرزی که از ساده‌سازی نمونه میندلین با فرض $l_1 = l_2$ به دست می‌آید ارائه کردند. این روش که با نام الاستیسیته گرادیان کرنش تقریبی [۱] شناخته می‌شود، با تغییر دادن میدان تغییر مکان حاصل از الاستیسیته معمولی به وسیله یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای هلمهولتز[۲] جواب‌ها را بهبود می‌بخشد. آلتان و ایفانتیس در سال۱۹۹۲ و رو و ایفانتیس در سال۱۹۹۳ این روش را برای مسائل ترک در مواد الاستیک به کاربردند.

بررسی مساله پاد صفحه‌ای با درنظرگرفتن گرادیان الاستیسیته و انرژی سطحی توسط جئورجیادیس و واردولاکیس[۴۲] در سال ۱۹۹۸، مورد استفاده قرارگرفته است.

انگر و آیفانتیس[۴۳] نظریه گرادیان کرنش را برای حل مسائلی که شامل تکینگی و ناپیوستگی در مواد بودند استفاده کردند. از جمله قابلیت‌های این نظریه می‌توان گفت که این نظریه می‌تواند تکینگی کرنش در نزدیکی نوک ترک را حذف کند. با توجه به ترم‌های مرتبه بالاتر این نظریه، شرایط مرزی اضافی بیشتری نسبت به نظریه کلاسیک باید بر مسئله تحمیل شود که این شرایط به طور مستقیم بر شکل حل تأثیر خواهد گذاشت. روش‌های تحلیلی جدیدی در این مطالعه ارایه شد و به حل مسائل جابجایی‌های ترکی که دارای ماهیت نوسانی بودند پرداخته شد.

پائولینو و همکارانش[۴۴] به تحلیل مود سوم شکست در مواد هدفمند در حالتی که ترک عمود بر راستای تغییرات خصوصیات فیزیکی ماده باشد، پرداختند. در این تحلیل از نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش با دو ثابت ماده جدید علاوه بر ضرایب لامه استفاده شده است و فرض شده است خصوصیات فیزیکی ماده به صورت تابعی نمایی از مکان تغییر می‌کند. معادلات حاکم در این مساله به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای می‌باشد که برای حل آن‌ها از تبدیل فوریه استفاده شده است و برای گسسته سازی معادلات انتگرالی از چندجمله‌ای چبیشف [۳] استفاده شده است و در نهایت یک حل تحلیلی برای توزیع تنش در اطراف نوک ترک و در داخل جسم ارائه‌شده است. بعلاوه چند مثال عددی برای بررسی اثرات طول مشخصه ماده بر توزیع تنش در نوک ترک ارائه‌شده است که نتایج وابستگی زیادی را به طول مشخصه نشان می‌دهد.

1 .approximate strain gradient elasticity
2 . Helmholtz partial differential equation
3-Chebyshev Polynomial

در این پروژه از نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش برای مطالعه و محاسبه ضریب شدت تنش برای ترک‌ها استفاده شده است. بیشتر روش‌هایی که تاکنون برای محاسبه این پارامتر ارائه‌شده‌اند، مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته کلاسیک بوده‌اند. این روش‌ها مقادیر درستی از تنش‌های ایجادشده در مجاورت نوک ترک‌ها ارائه نمی‌دهند؛ به عبارت دیگر تنش ایجادشده در نزدیکی نوک ترک را بی‌نهایت اندازه‌گیری می‌کنند. با توجه به ماهیت اتمی پدیده شکست لزوم ایجاد روش‌هایی برای اندازه‌گیری پارامترهای مکانیک شکست در ابعاد نانو احساس می‌شود.

در پایان نامه حاضر حل تحلیلی مسئله صفحه بی‌نهایت تضعیف شده به وسیله چندین ترک مستقیم تحت بارگذاری پادصفحه‌ای براساس تئوری الاستیسته گرادیان کرنش، با استفاده از روش نابجایی مورد بررسی قرار گرفته است و تاثیر اثر اندازه، طول ترک و چیدمان ترک‌ها بر روی ضرایب شدت تنش ارائه شده است. می‌توان گفت این تحقیق برای اولین بار روش نابجایی را برای حل مسائل چندین ترک در مقیاس نانو با تئوری گرادیان کرنش به کار می‌گیرد. همان طور که مشاهده می‌شود بررسی پدیده اثر اندازه با تئوری گرادیان کرنش در تحقیقات قبلی برای مسائل چندین ترک انجام نشده است، لذا در این پایان نامه، تئوری گرادیان کرنش به کار گرفته می‌شود تا اثرات اندازه بر روی ضریب شدت تنش این مسائل بررسی شود.

در این رساله ابتدا در فصل دوم اصول نظریه توزیع نابجایی، تعریف ضریب شدت تنش و مفهوم نابجایی شرح داده شده است.در فصل سوم حل نابجایی پاد صفحه‌ای به طور کامل شرح داده می‌شود. روابط مکانیک محیط پیوسته به طور کامل برای نظریه الاستیسیته گرادیان کرنش ارائه می‌شود و در ادامه همین فصل میدان تنش ناشی از یک نابجایی با بردار بر گرز خیلی کوچک در مبدأ، به دست آمده است.در فصل چهارم پایان‌نامه با استفاده از نتیجه فصل سوم، میدان تنش حاصل از توزیع نابجایی در امتداد ترک و در ادامه آن حل مساله ترک و نحوه مدل‌سازی ترک با استفاده از روش توزیع نابجایی شرح داده شده است. بدین منظور اصل باکنر، تشکیل معادلات انتگرالی تکین برای چندین ترک بیان شده است.در فصل پنجم روش حل عددی معادلات انتگرالی تکین برای صفحه بیان شده و در نهایت محاسبه ضریب شدت تنش ارائه‌شده است.در فصل ششم برای نشان دادن قابلیت روش نابجایی در محاسبه ضرایب شدت تنش صفحات با آرایش مختلف ترک‌ها و در بارگذاری‌های دلخواه، چند مثال عددی متنوع آورده شده است.در فصل هفتم به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات پرداخته می‌شود و در انتهای پایان‌نامه مراجع آورده می‌شود.