بسم الله الرحمن الرحیم

۱۲۹۳۵۰

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکدهٔ علوم ریاضی

پایان نامهٔ دکتری ریاضی محض گرایش منطق

عنوان

توسعهٔ نظریهٔ مدلهای کریپکی منطق مرتبهٔ اول شهودی

استاد راهنما

دکتر مرتضی منیری

اساتید مشاور

دکتر محمد مهدی ابراهیمی

دکتر مسعود پورمهدیان

نگارش

مصطفی زارع خورمیزی

شهریور ۱۳۸۸

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره دکتری»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۶۸/۲۰۰/د مورخ ۸۸/۶/۲ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه آقای **مصطفی زارع خورمیزی** به شماره شناسنامه: ۲۹۶۰ صادره از : **مهریز** متولد: **۱۳۵۸** دانشجوی دوره دکتری ریاضی

با عنوان:

توسعهٔ نظریهٔ مدل های کریپکی منطق مرتبه اول شهودی

به راهنمایی: آقای دکتر مرتضی منیری

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۸/۶/۱۰ تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه دکتری مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ ۱۹/- (نوزده) و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- استاد راهنما: آقای دکتر مرتضی منیری	استادیار	شهید بهشتی	
۲ - استاد مشاور: آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	
۳- استاد مشاور: آقای دکتر مسعود پورمهدیان	استادیار	صنعتی امیرکبیر	
۴- استاد داور: آقای دکتر سید محمد باقری	استادیار	تربیت مدرس	
۵- استاد داور: آقای دکتر شهرام محسنی‌پور	استادیار	پژوهشگاه دانش های بنیادی	
۶- استاد داور: آقای دکتر رجبعلی برزویی	استاد	شهید بهشتی	
۷- استاد داور: خانم دکتر مژگان محمودی	استاد	شهید بهشتی	
۸- مدیر گروه: آقای دکتر علیرضا سالمکار	استادیار	شهید بهشتی	
۹- نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: آقای دکتر حسین حاجی ابوالحسن			

تقدیم به:

امام عصر حضرت مهدی عجّل اللّه تعالی فرجه الشریف

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس بیکران پروردگار یکتا را که بندگان خود را به زیور عقل و خرد آراست تا به وسیلهٔ آن عبودیت ذات بی‌همتایش را پیشه کنند و به تعالی و کمال دست یابند.

بر خود لازم می‌دانم از همهٔ عزیزانی که در طول این دورهٔ تحصیلی از لطف و محبتهایشان بهره‌مند بوده‌ام، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم:

استاد راهنمای خود جناب آقای دکتر مرتضی منیری که در طول این دورهٔ تحصیلی همواره از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره‌مند بوده‌ام،

آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی و دکتر مسعود پورمهدیان که به عنوان استاد مشاور بنده را راهنمایی نموده‌اند،

آقای دکتر رجبعلی برزویی، خانم دکتر مژگان محمودی، آقای دکتر سید محمد باقری و آقای دکتر شهرام محسنی‌پور که زحمت داوری این پایان نامه را متحمل شده‌اند،

آقای دکتر حسین حاجی ابوالحسن که به عنوان نمایندهٔ تحصیلات تکمیلی دانشگاه در جلسهٔ دفاع حضور داشتند،

اعضاء دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شهید بهشتی به خصوص گروه ریاضی.

در پایان از همسر گرامیم که وجود خود را وقف آرامش من نموده و همواره از محبّت، همراهی و همکاریش بهره‌مند بوده‌ام،

و پدر و مادر بزرگوارم که برای آسایش فرزندانشان سختیهای فراوانی متحمل شده‌اند، صمیمانه سپاسگزارم و این نیست مگر جلوه‌ای از لطف و محبّت پروردگاری که از ادای شکر حتی یک نعمت او ناتوانم.

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله نظریهٔ مدلهای کریپکی منطق مرتبهٔ اول شهودی را مطالعه می‌کنیم. یکی از مفاهیم پایه‌ای در نظریهٔ مدلهای کلاسیک مفهوم زیرمدل است. این مفهوم را برای مدلهای کریپکی به صورتهای مختلفی می‌توان تعریف کرد. می‌توان قاب یا جهانهای کلاسیک یا هر دو را تحدید کرد. در این رساله تعریف دوم از زیرمدل را در نظر می‌گیریم. تعریفی طبیعی از نظریه‌های عمومی و وجودی در زمینهٔ منطق شهودی ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که نظریه‌هایی که تحت زیرمدل حفظ می‌شوند و نظریه‌هایی که تحت توسیع حفظ می‌شوند، به ترتیب نظریه‌های عمومی و وجودی هستند. همچنین دو قضیهٔ تمامیّت برای فرمولهایی که با تعاریف اول و سوم از زیرمدل تحت توسیع حفظ می‌شوند، ثابت می‌کنیم. مفهوم همریختی را نیز برای مدلهای کریپکی تعریف نموده و نظریه‌هایی که تحت تصویر و تصویر معکوس همریختی‌ها حفظ می‌شوند را مشخص می‌کنیم. در ادامه، تعریفی طبیعی از مفهوم زیرمدل مقدماتی برای مدلهای کریپکی متناسب با تعریف دوم از زیرمدل را در نظر گرفته و ارتباط بین جهانهای کلاسیک متناظر را در توسیعهای مقدماتی مدلهای کریپکی بررسی می‌کنیم. به ویژه ثابت می‌کنیم که ارتباط بین جهانهای متناظر در توسیعهای مقدماتی مدلهای کریپکی متناهی، توسیع مقدماتی به معنای کلاسیک است. همچنین مفهوم اجتماع زنجیر را برای مدلهای کریپکی تعریف و یک کلاس طبیعی از فرمولها که تحت اجتماع زنجیر حفظ می‌شود را معرفی می‌کنیم.

مقدمه

در این رساله مطالعهٔ نظریهٔ مدلهای کریپکی منطق مرتبهٔ اول شهودی را ادامه می‌دهیم. در این زمینه تاکنون، مطالعات زیادی صورت نگرفته است. نتایج پایه‌ای در زمینهٔ نظریهٔ مدلهای کریپکی و منطق شهودی را می‌توان در [۲۷]، [۱۰] و [۲۸] یافت.

معناشناسی کریپکی برای منطق موجهات و منطق شهودی توسط ساوّل کریپکی[۱] ابداع و در مجموعه مقالات وی بین سالهای ۱۹۶۵ ـ ۱۹۵۹ ارائه شد. وی قضایای صحت و تمامیت را برای آنها ثابت کرد. منشأ ایدهٔ معناشناسی کریپکی برای منطق موجهات به لایب‌نیتز[۲] و مفهوم او از جهانهای ممکن برمی‌گردد. یک جمله در جهان حقیقی ضرورتاً درست است اگر در تمام جهانهای ممکن (شامل جهان حقیقی) درست باشد و امکاناً درست است اگر یک جهان ممکن موجود باشد که در آن درست باشد. مقالهٔ اول کریپکی دربارهٔ منطق موجهات در ۱۹۵۹ منتشر شد (وی به کارهای قبلی هینتیکا[۳] در این خصوص اشاره می‌کند). در ۱۹۳۳ گودل یک ترجمه از منطق شهودی گزاره‌ای (IPC) به منطق موجهات S_4 ارائه کرد. مک‌کینزی[۴] و تارسکی (۱۹۵۴) کار گودل روی این موضوع را با ارائهٔ ترجمهٔ جدیدی تکمیل کردند. کریپکی با الهام از این ترجمه، معناشناسی خود برای منطق شهودی را از نظریهٔ مدلهای S_4 استخراج کرد.

[۱] Saul Kripke
[۲] Leibniz
[۳] Hintikka
[۴] MaKinsey

این ترجمه به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} M(p) &= \Box p \\ M(\neg\varphi) &= \Box\neg M(\varphi) \\ M(\varphi \to \psi) &= \Box(M(\varphi) \to M(\psi)) \\ M(\varphi \wedge \psi) &= M(\varphi) \wedge M(\psi) \\ M(\varphi \vee \psi) &= M(\varphi) \vee M(\psi) \end{aligned}$$

قضیه (مک‌کینزی ـ تارسکی). فرض کنید φ یک فرمول گزاره‌ای باشد. φ در IPC اثبات‌پذیر است اگر و تنها اگر $M(\varphi)$ در S_4 اثبات‌پذیر باشد.

باقری و پورمهدیان در [۳]، [۴]، [٦] و [۷] با در نظر گرفتن کلاسهای بسیار خاصی از مدلهای کریپکی نظیر کلاس مدلهای کریپکی با جهان ثابت، قاب خطی و جهان ثابت، شبه کلاسیک [۱] و تقریباً کلاسیک [۲] ، بعضی مفاهیم پایه‌ای نظریهٔ مدلهای کلاسیک نظیر دیاگرام، نشاندن، نشاندن مقدماتی، زیرمدل، زیرمدل مقدماتی، اجتماع زنجیر و فراضرب را برای مدلهای کریپکی منطق مرتبهٔ اول شهودی تعریف و نظایری از قضایای نظریهٔ مدلهای کلاسیک مانند قضایای حفظ را برای آنها ثابت می‌کنند. آنها همچنین خواص AP و JEP را برای بعضی از این کلاسها بررسی نموده‌اند.

یک مدل کریپکی با جهان ثابت A شبه کلاسیک نامیده می‌شود، هرگاه برای هر جملهٔ اتمی φ با پارامترها در A، اگر رأسی چون α وجود داشته باشد به طوری که $\alpha \Vdash_A \varphi$، آنگاه یک رأس می‌نیمم با این ویژگی وجود داشته باشد. همچنین برای هر رأس α یک جملهٔ اتمی φ با پارامترها در A وجود داشته باشد به طوری که α رأس می‌نیمم با ویژگی $\alpha \Vdash_A \varphi$ باشد. یک مدل کریپکی با جهان ثابت A تقریباً کلاسیک نامیده می‌شود، هرگاه شرط فوق برای هر $\mathcal{L}(A)$ ـ جمله برقرار باشد.

[۱] Semi-classical

[۲] Almost classical

برخی از مفاهیم نظریهٔ مدلهای کلاسیک نظیر زیرمدل، زیرمدل مقدماتی و فراضرب برای مدلهای کریپکی منطق مرتبهٔ اول شهودی در [۲۹]، [۵]، [۲۵]، [۱۲]، [۱۴]، [۱۵] و [۲۱] در حالت کلی تعریف و حقایقی دربارهٔ آنها ثابت شده است. رویکرد ما در این رساله نیز همین رویکرد کلی است.

یک بخش از نظریهٔ مدلهای کلاسیک مشخص سازی فرمولها و نظریه‌ها بر حسب مدلها است. یک قضیهٔ مهم در نظریهٔ مدلهای کلاسیک بیان می‌کند که فرمولهای عمومی و وجودی دقیقاً فرمولهایی هستند که به ترتیب در تحدید و توسیع مدلها حفظ می‌شوند ([۹] را ببینید). یک سؤال طبیعی این است که نظیر این قضیه در زمینهٔ مدلهای کریپکی چیست؟

در زمینهٔ مدلهای کریپکی تعاریف متفاوتی از مفهوم زیرمدل می‌توان داشت: می‌توان قاب یا ساختارهای کلاسیک الحاق شده به رئوس و یا هر دو را تحدید کرد.

در [۲۹]، ویسر[۱] با انتخاب تعریف اول ثابت می‌کند که یک نظریهٔ شهودی تحت زیرمدل حفظ می‌شود اگر و تنها اگر توسط جملات نیم مثبت اصل‌پذیر باشد. یک فرمول نیم مثبت فرمولی است که هر زیرفرمول شرطی آن دارای مقدم اتمی باشد.

در [۱۲]، مؤلفان با انتخاب تعریف سوم ثابت می‌کنند که یک نظریهٔ شهودی تحت زیرمدل حفظ می‌شود اگر و تنها اگر توسط جملات نیم مثبت عمومی (که آنها به طور طبیعی تعریف می‌کنند) اصل‌پذیر باشد.

در این رساله، تعریف دوم برای زیرمدل در نظر گرفته شده است و کلاس فرمولهای $\mathcal{U}$ و $\mathcal{E}$ که به ترتیب کلاس فرمولهای عمومی و کلاس فرمولهای وجودی نامیده شده‌اند، به طور طبیعی تعریف و نشان داده شده است که یک نظریهٔ شهودی تحت زیرمدل (توسیع) حفظ می‌شود اگر و تنها اگر توسط جملات عمومی (وجودی) اصل‌پذیر باشد.

همچنین ثابت شده است که یک فرمول با تعاریف اول یا سوم از زیرمدل، تحت توسیع (با تعبیر ما) حفظ می‌شود اگر و تنها اگر در منطق شهودی با یک فرمول مثبت معادل باشد.

---

[۱] Visser

مفهوم همریختی یکی دیگر از مفاهیم پایه‌ای در نظریهٔ مدلهای کلاسیک است. یک قضیه در نظریهٔ مدلهای کلاسیک بیان می‌کند که فرمولهای مثبت وجودی و منفی عمومی دقیقاً فرمولهایی هستند که به ترتیب تحت تصویر و تصویر معکوس همریختی‌ها حفظ می‌شوند ([۹] را ببینید). فرمولهای مثبت وجودی بستار فرمولهای اتمی تحت رابطهای $\vee$ و $\wedge$ و سور $\exists$ هستند و فرمولهای منفی عمومی بستار نقیض فرمولهای اتمی تحت رابطهای $\vee$ و $\wedge$ و سور $\forall$ هستند. در [۱۳] فلیچمن[۱] با تعریف مفهوم همریختی برای مدلهای کریپکی و عملگرهایی متناظر با بستار عمومی و بستار وجودی در منطق کلاسیک، نظریه‌هایی که تحت تصویر معکوس همریختی‌ها حفظ می‌شوند را مشخص می‌کند.

در این رساله ما با تعریف مفهوم همریختی بین مدلهای کریپکی با قاب یکسان و عملگرهای دیگری متناظر با بستار عمومی و بستار وجودی در منطق کلاسیک، که آنها را به ترتیب با $\mathcal{U}(\cdot,\cdot)$ و $\mathcal{E}(\cdot,\cdot)$ نشان می‌دهیم، نظریه‌هایی که تحت تصویر و تصویر معکوس همریختی‌ها حفظ می‌شوند را مشخص می‌کنیم.

یکی دیگر از مفاهیم پایه‌ای در نظریهٔ مدلهای کلاسیک مفهوم زیرمدل مقدماتی است. در [۵]، باقری و منیری با انتخاب تعریف دوم برای زیرمدل، مفهوم زیرمدل مقدماتی را به نحو مشابهی تعریف و نظیری از محک تارسکی[۲] و با استفاده از آن قضیهٔ لوفن‌هایم[۳] ـ اسکولم[۴] کاهشی را ثابت می‌کنند. همچنین مفهوم فراضرب را برای یک خانواده از مدلهای کریپکی با قاب یکسان، به طور طبیعی تعریف و نظیر قضیهٔ لاش[۵] را برای مدلهای کریپکی با قابی که در آن مجموعهٔ رئوس بالای هر رأس متناهی است، ثابت می‌کنند. ضمناً آنها با استفاده از قضیهٔ لاش، قضیهٔ لوفن‌هایم ـ اسکولم افزایشی را برای این کلاس از مدلهای کریپکی ثابت می‌کنند.

یکی از سؤالاتی که در [۵] درباره توسیع مقدماتی مدلهای کریپکی مطرح شده است، این است که اگر $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$، رابطهٔ بین جهانهای متناظر چیست؟ یک جواب طبیعی می‌تواند توسیع مقدماتی کلاسیک باشد. در [۵] درستی این حدس برای مدلهای کریپکی دو رأسی ثابت شده است.

[۱] Fleischmann

[۲] Tarski

[۳] Löwenheim

[۴] Skolem

[۵] Loś

در این رساله با استفاده از لم اول هرس کردن و خواص رئوس کلاسیک و ضعیفاً کلاسیک که در [۱۱]، [۳۰] و [۲] ارائه شده‌اند، ثابت می‌کنیم که این حدس برای همهٔ مدلهای کریپکی متناهی صادق است. ضمناً اگر $A \preccurlyeq B$ با قاب ω باشند، آنگاه برای تعدادی نامتناهی $n < \omega$، $A_n \preccurlyeq B_n$، یعنی B_n توسیع مقدماتی A_n به معنای کلاسیک است.

در نظریهٔ مدلهای کلاسیک $\forall_2$ ـ فرمولها نقش مهمی دارند. یکی از مهمترین خواص $\forall_2$ ـ فرمولها این است که آنها دقیقاً فرمولهایی هستند که در اجتماع زنجیرها از مدلها حفظ می‌شوند. خاصیت نظریهٔ مدلی دیگری که این کلاس از فرمولها را مشخص می‌سازد حفظ شدن از بالا به پایین در توسیعهای از نوع $A \Leftarrow_{\exists_1} B$ است. در این جا $A \Leftarrow_{\exists_1} B$ به معنای آن است که همهٔ فرمولهای وجودی با پارامترها در A که در B درست هستند در A نیز درست می‌باشند. در این رساله، نظایری شهودی برای این کلاس از فرمولها معرفی می‌کنیم. همچنین مفهوم اجتماع زنجیر برای مدلهای کریپکی را متناسب با تعریف دوم از زیرمدل، تعریف نموده و یک کلاس طبیعی از فرمولها که تحت اجتماع زنجیر حفظ می‌شود را معرفی می‌کنیم.

ساختار این رساله به شرح زیر است:

در فصل اول مقدمات لازم از منطق مرتبهٔ اول شهودی و نظریهٔ مدلهای کریپکی را بیان کرده‌ایم. در فصل دوم نظریه‌هایی که با تعریف دوم از مفهوم زیرمدل، تحت زیرمدل حفظ می‌شوند و نظریه‌هایی که تحت توسیع حفظ می‌شوند، را مشخص کرده‌ایم. همچنین دو قضیهٔ تمامیّت برای فرمولهایی که با تعاریف اول و سوم از زیرمدل تحت توسیع حفظ می‌شوند، ثابت کرده‌ایم. در فصل سوم مفهوم همریختی را برای مدلهای کریپکی تعریف و نظریه‌هایی که تحت تصویر و تصویر معکوس همریختی‌ها حفظ می‌شوند را مشخص کرده‌ایم. در فصل چهارم تعریفی طبیعی از مفهوم زیرمدل مقدماتی برای مدلهای کریپکی متناسب با تعریف دوم از زیرمدل که اولین بار در مرجع [۵] معرفی شده است را در نظر گرفته و ارتباط بین جهانهای کلاسیک متناظر را در توسیعهای مقدماتی مدلهای کریپکی بررسی کرده‌ایم. همچنین مفهوم اجتماع زنجیر را برای مدلهای کریپکی تعریف و یک کلاس طبیعی از فرمولها که تحت اجتماع زنجیر حفظ می‌شود را معرفی کرده‌ایم.

فصل ۱

پیش نیازها

چکیده

در این فصل به اختصار مروری بر مفاهیم، تعاریف و قضایای مهم منطق مرتبهٔ اول شهودی خواهیم داشت. دستگاه استنتاج طبیعی برای منطق مرتبهٔ اول شهودی و معناشناسی کریپکی برای این منطق را معرفی می‌کنیم. در ادامه تعاریف مفهوم زیرمدل برای مدلهای کریپکی و قضایای حفظ ویسر و رویتنبرگ و همکاران را بیان می‌کنیم. همچنین تعریف فلیچمن از مفهوم همریختی برای مدلهای کریپکی و قضایای حفظ وی را بیان می‌کنیم.

۱.۱ زبان منطق مرتبهٔ اول شهودی

تعریف ۱.۱.۱ یک زبان مرتبهٔ اول $\mathcal{L}$ مجموعهٔ همهٔ فرمولهایی است که از یک مجموعه از نمادهای محمولی، تابعی، ثابت و متغیرها با استفاده از رابطهای $\top, \bot, \wedge, \vee, \rightarrow$ و سورهای $\forall, \exists$ ساخته می‌شود. نمادهای $\top$ و $\bot$ هم اتم و هم رابط صفر موضعی در نظر گرفته می‌شوند. همچنین $\neg\varphi$ اختصاری برای $\varphi \rightarrow \bot$ و $\varphi \leftrightarrow \psi$ اختصاری برای $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ می‌باشند.

در سراسر این رساله $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبهٔ اول ثابت دلخواه است و نماد تساوی $(=)$ به عنوان یک نماد محمولی دو موضعی، عضو زبان در نظر گرفته می‌شود.

۲.۱ دستگاه استنتاج طبیعی

در این بخش مفهوم استنتاج را با استفاده از دستگاه استنتاج طبیعی[۱] تعریف می‌کنیم. N را برای دستگاه استنتاج طبیعی، i را برای منطق محمولات شهودی[۲] و c را برای منطق محمولات کلاسیک[۳] بکار می‌بریم.

تعریف ۱.۲.۱ (**تعریف استنتاج، فرضیات باز و فرضیات حذف شدهٔ یک استنتاج**) مفهوم استنتاج در دستگاه Ni و Nc به طور استقرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

مرحلهٔ پایه. به ازای هر فرمول φ، درخت تک رأسی φ یک استنتاج از فرض باز φ است؛ در این حالت هیچ فرض حذف شده‌ای وجود ندارد. اگر فرمول φ یک اصل باشد، آنگاه درخت تک رأسی φ یک استنتاج است؛ در این حالت هیچ فرض باز و حذف شده‌ای وجود ندارد.

مرحلهٔ استقراء. فرض کنید $\mathcal{D}_1$، $\mathcal{D}_2$ و $\mathcal{D}_3$ سه استنتاج باشند. یک استنتاج $\mathcal{D}$ می‌تواند توسط یکی از قواعد زیر ساخته شود. کاربرد بعضی از این قواعد محدودیتهایی دارد که در پایان بیان شده است.

---
[۱] Natural deduction system
[۲] Intuitionistic Predicate Logic
[۳] Classical Predicate Logic

برای $\perp$ قاعدهٔ تحویل به تناقض شهودی[1]

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\perp_i$$

را داریم. برای رابطهای دیگر و سورها **قواعد معرفی**[2] و **قواعد حذف**[3] زیر را داریم.

قواعد معرفی

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \varphi & \psi\end{matrix}}{\varphi\wedge\psi}\wedge I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^u\\ \mathcal{D}_1\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\to\psi}\to I,u$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\vee I_r \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\vee\psi}\vee I_l$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \varphi\end{matrix}}{\forall y\varphi[x/y]}\forall I$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \varphi[x/t]\end{matrix}}{\exists x\varphi}\exists I$$

قواعد حذف

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\varphi}\wedge E_r \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \varphi\wedge\psi\end{matrix}}{\psi}\wedge E_l$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \varphi\to\psi & \varphi\end{matrix}}{\psi}\to E$$

$$\dfrac{\begin{matrix} & [\varphi]^u & [\psi]^v\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3\\ \varphi\vee\psi & \sigma & \sigma\end{matrix}}{\sigma}\vee E,u,v$$

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1\\ \forall x\varphi\end{matrix}}{\varphi[x/t]}\forall E$$

$$\dfrac{\begin{matrix} & [\varphi]^u\\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2\\ \exists y\varphi[x/y] & \sigma\end{matrix}}{\sigma}\exists E,u$$

قواعد تساوی به صورت زیر است.

$$\dfrac{x=y \quad y=z}{x=z}RI_3 \qquad \dfrac{x=y}{y=x}RI_2 \qquad \dfrac{}{x=x}RI_1$$

[1] Intuitionistic absurdity rule

[2] Introduction rules

[3] Elimination rules

$$\frac{x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \quad \cdots \quad x_n = y_n}{t(x_1, \ldots, x_n) = t(y_1, \ldots, y_n)}\ RI_4$$

$$\frac{x_1 = y_1 \quad x_2 = y_2 \quad \cdots \quad x_n = y_n \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi(y_1, \ldots, y_n)}\ RI_5$$

ضمناً $(\bot \to \bot) \leftrightarrow \top$ را به عنوان یک اصل می‌پذیریم.

دستگاه Nc با افزودن **قاعدهٔ تحویل به تناقض کلاسیک**[1]

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^u \\ \mathcal{D}_1 \\ \bot\end{array}}{\varphi}\ \bot_c, u$$

به Ni ساخته می‌شود.

در کاربرد $\to I$ همهٔ فرضیات باز به فرم φ در $\mathcal{D}_1$ که با $[\varphi]$ نشان داده شده است، حذف می‌شوند.

در کاربرد $\vee E$ مجموعه‌های $[\varphi]$ در $\mathcal{D}_2$ و $[\psi]$ در $\mathcal{D}_3$ حذف می‌شوند.

در $\exists E$ مجموعهٔ $[\varphi]$ در $\mathcal{D}_2$ حذف می‌شود.

فرضیاتی که حذف نمی‌شوند، باز باقی می‌مانند.

در $\forall E$ و $\exists I$ جایگزینی t به جای x در φ باید آزاد باشد.

در $\forall I$، $\mathcal{D}_1$ نباید شامل فرض بازی باشد که x در آن آزاد است. همچنین باید $x \equiv y$ یا y در φ آزاد نباشد.

در $\exists E$، $\mathcal{D}_2$ نباید شامل فرض بازی باشد که x در آن آزاد است مگر مجموعهٔ $[\varphi]$. x نباید در σ آزاد باشد. همچنین باید $x \equiv y$ یا y در φ آزاد نباشد.

در کاربرد RI_5 باید جانشینی $y_1, \ldots, y_n$ به جای $x_1, \ldots, x_n$ در φ آزاد باشد. ضمناً لزومی ندارد که y_i جانشین همهٔ موارد x_i شده باشد.

بنابراین یک استنتاج در دستگاه Ni (Nc)، درختی است که برگ‌های آن فرضیات حذف نشده است. هر رأس با به کار بردن یکی از قواعد استنتاجی Ni (Nc) از رأسهای بالاتر حاصل می‌شود. ریشهٔ درخت **نتیجهٔ استنتاج** نامیده می‌شود.

[1] Classical absurdity rule

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید Γ یک مجموعه از فرمولها و φ یک فرمول باشند. گوییم φ یک نتیجهٔ منطقی Γ در Ni (Nc) است و می‌نویسیم $\Gamma \vdash_{Ni} \varphi$ ($\Gamma \vdash_{Nc} \varphi$)، هرگاه یک استنتاج در Ni (Nc) برای φ موجود باشد که همهٔ فرضیات حذف نشدهٔ آن عضو Γ باشند. در صورتی که $\Gamma = \varnothing$، می‌نویسیم $\vdash_{Ni} \varphi$ ($\vdash_{Nc} \varphi$) و در این صورت φ را یک قضیهٔ Ni (Nc) می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱ مجموعهٔ قضایای Ni و Nc را به ترتیب با CQC[۱] و IQC[۲] نشان می‌دهیم.

در سراسر این رساله $\vdash_{Ni}$ را به اختصار با $\vdash$ نشان می‌دهیم. در زیر برخی از قضایای منطق مرتبهٔ اول شهودی را بیان می‌کنیم.

حقیقت ۴.۲.۱

۱) $\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

۲) $\vdash \varphi \vee \psi \leftrightarrow \psi \vee \varphi$

۳) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

۴) $\vdash (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$

۵) $\vdash \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$

۶) $\vdash \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$

۷) $\vdash (\varphi \vee \psi \rightarrow \sigma) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \sigma) \wedge (\psi \rightarrow \sigma)$

۸) $\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$

۹) $\vdash \neg\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\varphi$

۱۰) $\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$

۱۱) $\vdash \neg\neg(\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi)$

۱۲) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$

---

۱ Classical Predicate Calculus

۲ Intuitonistic Predicate Calculus

۱۳) $\vdash \neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \leftrightarrow (\varphi \to \neg\neg\psi)$

۱۴) $\vdash \neg\neg(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\neg\varphi \wedge \neg\neg\psi)$

۱۵) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to \psi)$

۱٦) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi \to \sigma)$

۱۷) $\vdash (\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma))$

۱۸) $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$

۱۹) $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$

۲۰) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$

۲۱) $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \neg(\neg\varphi \to \psi)$

۲۲) $\vdash \neg\varphi \vee \neg\psi \to \neg(\varphi \wedge \psi)$

۲۳) $\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$

۲۴) $\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$

۲۵) $\vdash \neg\neg(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

۲٦) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

۲۷) $\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \sigma) \to (\varphi \to \sigma))$

۲۸) $\vdash (((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to \varphi) \to \psi) \to \sigma$

۲۹) $\vdash \bot \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg\varphi)$

۳۰) $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \neg\psi) \to \neg\psi$

۳۱) $\vdash ((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \neg\neg\varphi$

۳۲) $\vdash \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x) \leftrightarrow \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x))$

۳۳) $\vdash \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x) \leftrightarrow \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$

۳۴) $\vdash \exists x\varphi(x) \wedge \exists y\psi(y) \leftrightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \wedge \psi(y))$

۳۵) $\vdash \neg\exists x\varphi(x) \leftrightarrow \forall x\neg\varphi(x)$

۳۶) $\vdash \exists x\neg\varphi(x) \to \neg\forall x\varphi(x)$

۳۷) $\vdash \neg\forall x\neg\varphi(x) \to \neg\neg\exists x\varphi(x)$

۳۸) $\vdash \forall x(\varphi \to \psi(x)) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi(x))$

۳۹) $\vdash \exists x(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to \exists x\psi(x))$

۴۰) $\vdash (\varphi \vee \forall\psi(x)) \to \forall x(\varphi \vee \psi(x))$

۴۱) $\vdash (\varphi \wedge \exists\psi(x)) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \psi(x))$

۴۲) $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi(x) \to \psi)$

۴۳) $\vdash \exists x(\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x\varphi(x) \to \psi)$

۴۴) $\vdash \neg\neg\forall x\varphi(x) \to \forall x\neg\neg\varphi(x)$

شرایط مربوط به آزاد نبودن بعضی متغیرها می‌بایست در نظر گرفته شوند.

اثبات (۴۲)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi(x)]^{3} \qquad \dfrac{[\varphi(x)]^{2} \qquad \dfrac{[\forall x(\varphi(x)\to\psi)]^{1}}{\varphi(x)\to\psi}\,\forall E}{\psi}\to E}{\psi}\,\exists E_{2}}{\exists x\varphi(x)\to\psi}\to I_{3}}{\forall x(\varphi(x)\to\psi)\to(\exists x\varphi(x)\to\psi)}\to I_{1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\exists x\varphi(x)\to\psi]^{2} \qquad \dfrac{[\varphi(x)]^{1}}{\exists x\varphi(x)}\,\exists I}{\psi}\to E}{\varphi(x)\to\psi}\to I_{1}}{\forall x(\varphi(x)\to\psi)}\,\forall I}{(\exists x\varphi(x)\to\psi)\to\forall x(\varphi(x)\to\psi)}\to I_{2}$$