بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٧٣١٤

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان
کتابخانه مرکزی ۱۳۷۰

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی گرایش آنالیز

بررسی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای ماتریس‌ها

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا افشین

استاد مشاور:

دکتر علی آرمندنژاد

دانشجو :

محمدعلی مهرجوفرد

۱۳۸۹/۹/ ۱۴

آذر ۱۳۸۷

۱۴۷۳۱۴

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری‌ها ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه
متعلق به دانشگاه ولی‌عصر رفسنجان است.

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی آقای محمدعلی مهرجوفرد

تحت عنوان:

بررسی غلاف‌های عددی چند جمله‌ای ماتریس‌ها

در تاریخ ۸۷/۹/۱۰ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه .عالی..... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان‌نامه آقای دکتر علی آرمندنژاد با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- داور ۱، آقای دکتر عباس سالمی با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۳- داور ۲، خانم دکتر طیبه لعل‌شاطری با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی آقای دکتر حمیدرضا روستا با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

باسمه تعالی

چکیده

در پایان‌نامه‌ی حاضر به محاسبه‌ی غلاف‌های عددی چندجمله‌ای ماتریس‌ها پرداخته شده است. بدین منظور، ابتدا رابطه‌ی غلاف عددی چندجمله‌ای مرتبه‌ی ۲ با هذلولی قائم‌الزاویه بررسی شده و احکامی راجع به غلاف عددی چندجمله‌ای مرتبه‌ی ۲ی ماتریس‌های نرمال خاصی بدست آمده اند. سپس به کمک برد عددی توأم، چگونگی محاسبه‌ی تحلیلی غلاف عددی چندجمله‌ای مرتبه‌ی ۲ مطرح و اثبات گردیده است. در ادامه غلاف عددی چندجمله‌ای مرتبه kی ماتریس‌های دوری مقدماتی محاسبه شده است، و در پایان به کمک فرم ماتریس‌هایی که توان دوم آنها هرمیتی است احکامی در راستای محاسبه‌ی غلاف عددی چندجمله‌ای این ماتریس‌ها مطرح و اثبات شده اند.

واژه‌های کلیدی : غلاف عددی چندجمله ای، ماتریس نرمال، برد عددی توأم، هذلولی قائم الزاویه.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش‌نیازها

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A \in M_n$ را **طیف ماتریس** A می‌نامیم و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱ نرم طیفی $\|\cdot\|$ روی M_n به صورت ذیل تعریف می شود:

$$\|A\| \doteq \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma\left(A^*A\right)\right\}$$

تعریف ۳.۱.۱ شعاع طیفی ماتریس $A \in M_n$ عبارت است از:

$$r\left(A\right) = \max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\left(A\right)\right\}$$

تعریف ۴.۱.۱ برد عددی ماتریس $A \in M_n$ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$W\left(A\right) = \{x^{*}Ax : x \in \mathbb{C}^{n}, x^{*}x = ۱\}$$

قضیه ۵.۱.۱ [۱۴.۱.۲.۲] به ازای هر $A \in M_n$، $W(A)$ محدب است.

قضیه ۶.۱.۱ [۱۴.۱.۲] اگر $A, U \in M_n$، $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، و U ماتریسی یکانی باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} W\left(\alpha A + \beta I\right) &= \alpha W\left(A\right) + \beta \\ \sigma\left(A\right) &\subseteq W\left(A\right) \\ W\left(U^{*}AU\right) &= W\left(A\right) \end{aligned}$$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید V فضای برداری حقیقی یا مختلطی باشد، غلاف محدب مجموعه‌ی $S \subseteq V$، با $\mathrm{conv}(S)$ نشان داده می‌شود و کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدب شامل S می باشد.

قضیه ۸.۱.۱ [۱۴.۱.۲.۹] اگر $A \in M_n$ ماتریسی نرمال باشد آن‌گاه $W\left(A\right) = conv\left(\sigma\left(A\right)\right)$.

تعریف ۹.۱.۱ برد عددی توأم $(A_۱, A_۲, \cdots, A_m) \in M_n \times \cdots \times M_n$ عبارت است از:

$$W\left(A_۱, A_۲, \cdots, A_m\right) = \{(x^{*}A_۱x, x^{*}A_۲x, \cdots, x^{*}A_mx) : x \in \mathbb{C}^{n}, x^{*}x = ۱\}$$

تعریف ۱۰.۱.۱ غلاف عددی چندجمله‌ای از مرتبه‌ی k مربوط به ماتریس $A \in M_n$ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$V^k(A) = \{\xi \in \mathbb{C} : |p(\xi)| \leqslant \|p(A)\| \text{، به ازای هر } p(z) \in \boldsymbol{P}_k[\mathbb{C}]\}$$

قضیه ۱۱.۱.۱ [۱.۲.۱۰.۲] به ازای هر $A \in M_n$، و $k \in \mathbb{N}$، $V^k(A)$ فشرده است.

قضیه ۱۲.۱.۱ [۳.۲.۵] وقتی $A \in M_n$ داریم:

$$V^k(A) = \left\{\zeta \in \mathbb{C} : (0, \cdots, 0) \in conv\, W\left((A - \zeta I), (A - \zeta I)^2, \cdots, (A - \zeta I)^k\right)\right\} \quad (1.1)$$

قضیه ۱۳.۱.۱ فرض کنید $A \in M_n$. در این صورت $\mu \in V^k(A)$ اگر و تنها اگر $\left(\mu, \cdots, \mu^k\right) \in convW\left(A, \cdots, A^k\right)$

اثبات :

$$\mu \in V^k(A) \overset{\text{قضیه‌ی } ۱۲.۱.۱}{\Leftrightarrow} (0,\cdots,0) \in convW\left((A-\mu I),(A-\mu I)^2,\cdots,(A-\mu I)^k\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\, \exists t_1,\cdots,t_m \geq 0\ \exists x_1,\cdots,x_m \in \mathbb{C}^n \ s.t.$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} t_i = 1, \\ x_1^* x_1 = \cdots = x_m^* x_m = 1, \\ (0,\cdots,0) = \sum_{j=1}^{m} t_j \left(x_j^*(A-\mu I)x_j,\cdots,x_j^*(A-\mu I)^k x_j\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}\, \exists t_1,\cdots,t_m \geq 0\ \exists x_1,\cdots,x_m \in \mathbb{C}^n \ s.t.$$
$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} t_i = 1, \\ x_1^* x_1 = \cdots = x_m^* x_m = 1, \\ 0 = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j^*(A-\mu I)x_j = \sum_{j=1}^{m} t_j\left(x_j^* A x_j\right) - \mu, \\ 0 = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j^*(A-\mu I)^2 x_j = \sum_{j=1}^{m} t_j\left(x_j^* A^2 x_j - 2\mu x_j^* A x_j + \mu^2\right) = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j^* A^2 x_j - \mu^2, \\ \vdots \\ 0 = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j^*(A-\mu I)^k x_j = \cdots\cdots\cdots\cdots = \sum_{j=1}^{m} t_j\left(x_j^* A^k x_j\right) - \mu^k. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \left(\mu,\cdots,\mu^k\right) \in convW\left(A,\cdots,A^k\right)$$

□

قضیه ۱۴.۱.۱ [[۳.۶(v)]] اگر $A \in M_n$ ماتریسی نرمال یا بالامثلثی توئپلیتز باشد، آن‌گاه $W\left(A,\cdots,A^k\right)$ محدب است و درنتیجه:

$$\begin{aligned} V^k(A) &= \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \left(\zeta,\cdots,\zeta^k\right) \in W\left(A,\cdots,A^k\right)\right\} \\ &= \left\{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1,\ and\ (x^*Ax)^j = x^*A^jx,\ j = 1,2,\cdots,k\right\} \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

تعریف ۱۵.۱.۱ غلاف عددی چندجمله‌ای مربوط به ماتریس $A \in M_n$ عبارت است از:

$$V(A) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V^k(A).$$

گزاره ۱۶.۱.۱ [۱.۲.۱۰] وقتی $A \in M_n$ و p چندجمله‌ای مختلط دلخواهی باشد

$$\sigma(A) \subset \{\lambda : |p(\lambda)| \leq \|p(A)\|\}$$

گزاره ۱۷.۱.۱ [۱.۲.۱۰.۵] فرض کنید L یک عملگر کراندار در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت $V^1(L) = \overline{W(L)}$.

نتیجه ۱۸.۱.۱ [۹.۱.۱] در گزاره‌ی بالا، اگر $\dim H < \infty$، آن‌گاه $V^1(L) = W(L)$.

لم ۱۹.۱.۱ اگر درجه‌ی چندجمله‌ای مینیمال $A \in M_n$ برابر k باشد، آن‌گاه

$$V(A) = \sigma(A) = V^k(A) = V^{k+1}(A) = \cdots$$

اثبات :

با توجه به لم ۱۶.۱.۱ داریم

$$V^1(A) \supseteq V^2(A) \supseteq \cdots \supseteq V^k(A) \supseteq \cdots \supseteq V(A) \supseteq \sigma(A)$$

اما باتوجه به تعریف اگر p چندجمله‌ای مینیمال A با درجه‌ی k باشد آن‌گاه $V^k(A) \subset \{\lambda : |p(\lambda)| \leq \|p(A)\| = 0\}$ از طرفی بنا به نتیجه‌ی ۴.۳.۳ از [۷] می دانیم $\sigma(A) = \{\lambda : p(\lambda) = 0\}$ و برهان کامل شده است.

□

لم ۲۰.۱.۱ در نظر بگیرید $A \in M_n$، $\alpha \in V^k(A)$، و $A' = A \oplus [\alpha]$، که $[\alpha]$ مشخص کننده‌ی ماتریس 1×1 ای با درایه‌ی α است. در این صورت $V^k(A') = V^k(A)$.

اثبات :

فرض کنید p چندجمله‌ای دلخواهی از درجه‌ی حداکثر k باشد. می توان مشاهده کرد که به ازای هر عدد طبیعی k، $(A')^k = A^k \oplus \left[\alpha^k\right]$ و بنابراین $p(A') = p(A) \oplus [p(\alpha)]$ اکنون داریم

$$\begin{aligned}
&(p(A'))^* p(A') = \{p(A) \oplus [p(\alpha)]\}^* (p(A) \oplus [p(\alpha)]) \\
&= \left\{(p(A))^* \oplus \left[\overline{p(\alpha)}\right]\right\} (p(A) \oplus [p(\alpha)]) = (p(A))^* p(A) \oplus \left[\overline{p(\alpha)} p(\alpha)\right] \\
&= (p(A))^* p(A) \oplus \left[|p(\alpha)|^2\right] \\
&\Rightarrow \|p(A')\| = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma\left((p(A))^* p(A) \oplus \left[|p(\alpha)|^2\right]\right)\right\} \\
&= \max\left\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma((p(A))^* p(A)) \cup \left\{|p(\alpha)|^2\right\}\right\} \\
&\Rightarrow \|p(A')\| = \max\{\|p(A)\|, |p(\alpha)|\}
\end{aligned}$$

ملاحظه می کنیم که $\alpha \in V^k(A)$ بنابراین $|p(\alpha)| \le \|p(A)\|$ بدین‌ترتیب $\|p(A')\| = \|p(A)\|$ و درنتیجه $V^k(A') = V^k(A)$.

□

تعریف ۲۱.۱.۱ وقتی $A \in M_n$ و عدد صحیح مثبت m در ویژگی‌های $V^m(A) = V(A)$ و $\forall i < m \;\; V^i(A) \neq V(A)$ صدق کند، آن‌گاه عدد صحیح m را مرتبه‌ی عددی A نامند و با $\mathrm{num}(A)$ نشان می دهند.

گزاره ۲۲.۱.۱ [۱۰.۱.۳] فرض کنید L عملگر خودالحاق کرانداری در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت $\mathrm{num}(L) \leq ۲$ و بنابراین $V^{۲}(L) = \sigma(L)$.

قضیه ۲۳.۱.۱ [۴.۵.۴.۲] (اصل ماکسیمم قدرمطلق) فرض کنید $D \subseteq \mathbb{C}$ یک حوزه‌ی کراندار است و f تابعی پیوسته روی $\overline{D}$ باشد به گونه ای که روی D تحلیلی می‌باشد. مقدار ماکسیمم $|f|$ روی $\overline{D}$ (که به دلیل بسته و کراندار بودن $\overline{D}$ باید وجود داشته باشد) به ازای عنصری از ∂D بدست می آید.

لم ۲۴.۱.۱ به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$، $k \in \mathbb{N}$ و $A \in M_n$ داریم:

الف) $V^k(A + \beta I) = V^k(A) + \beta$.

ب) اگر $A \in M_n$ نرمال باشد آن‌گاه $V^k(\alpha A) = \alpha V^k(A)$.

اثبات :

گزاره‌ی (الف) همان قضیه‌ی [(ii)۳.٦] می‌باشد، اما برای اثبات (ب) با توجه به قضیه‌ی ۱۴.۱.۱ داریم:

$$
\begin{aligned}
&V^k(\alpha A) = \left\{x^*(\alpha A)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱,\ and\ (x^*(\alpha A)x)^j = x^*(\alpha A)^j x, j = ۱, ۲, \cdots, k\right\} \\
&= \alpha \left\{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = ۱,\ and\ (x^*Ax)^j = x^*(A)^j x, j = ۱, ۲, \cdots, k\right\} \\
&= \alpha V^k(A)
\end{aligned}
$$

□

قضیه ۲۵.۱.۱ در نظر بگیرید که $A \in M_n$ یک ماتریس نرمال باشد. در این صورت

$$\partial(W(A)) \cap V^{۲}(A) \subseteq \sigma(A)$$

اثبات :

می دانیم $W\left(A\right)=conv\left(\sigma\left(A\right)\right)$ ؛ بنابراین $W(A)$ یک چندضلعی است. حال ضلعی از این چندضلعی مانند S را در نظر بگیرید. برای تکمیل برهان کافی است ثابت کنیم صرفا رأس‌های دو سر این ضلع در $V^{2}(A)$ قرار دارند.

فرض کنید $\alpha,\theta\in\mathbb{R}$ به گونه ای باشند که ضلع S در چندضلعی $e^{i\theta}W\left(A\right)+\alpha$ روی محور حقیقی قرار داشته باشد در حالی که سایر نقاط چندضلعی بالای محور حقیقی باشند.

می دانیم

$$\sigma\left(\alpha A+\beta I\right)=\alpha\sigma\left(A\right)+\beta$$
$$W\left(\alpha A+\beta I\right)=\alpha W\left(A\right)+\beta$$
$$V^{k}\left(\alpha A+\beta I\right)=\alpha V^{k}\left(A\right)+\beta$$

بدین ترتیب بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد A ماتریسی است که $\Im\left(W\left(A\right)\right)\geqslant 0$ و $S\subset\mathbb{R}$. در نظر بگیرید $a,b\in\sigma(A)$ دو سر ضلع S باشند. مشاهده می کنیم که وقتی U ماتریس یکانی دلخواهی باشد داریم:

$$\sigma\left(U^{*}AU\right)=\sigma\left(A\right)$$
$$W\left(U^{*}AU\right)=W\left(A\right)$$
$$V^{2}\left(U^{*}AU\right)=V^{2}\left(A\right)$$

از طرفی هر ماتریس نرمال با ماتریس قطری‌ای که درایه‌های روی قطر آن همان عناصر $\sigma(A)$با ترتیب دلخواه اند به طور یکانی متشابه است. بدین ترتیب بدون کاستن از کلیت می توان فرض کرد که$A=A_{1}\oplus A_{2}$ به گونه ای که $A_{1}=\mathrm{diag}\left(a,b\right)$، $W\left(A_{1}\right)=S$ و $\Im\left(W\left(A_{2}\right)\right)>0$. در نظر بگیرید که $x\in\mathbb{C}^{n}$ بردار یکه‌ی دلخواهی باشد و $x=x_{1}\oplus x_{2}$ به گونه ای که $x_{1}\in\mathbb{C}^{2}$. برای تکمیل برهان کافی است ثابت کنیم اگر $x^{*}Ax\in S\cap V^{2}\left(A\right)$ آن‌گاه $x^{*}Ax\in\{a,b\}$. فرض کنید $x^{*}Ax\in S$. با توجه به طریقه‌ی ساخت A_{1} مشاهده

کردیم که A_1 ماتریسی قطری با درایه‌های حقیقی است پس $W(A_1) = S \subset \mathbb{R}$ اما در این صورت $x_1^* A_1 x_1$ یا صفر است و یا

$$\frac{1}{x_1^* x_1} x_1^* A_1 x_1 = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^* x_1}}\right)^* A_1 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^* x_1}}\right) \in W(A_1)$$

و بدین ترتیب همواره $x_1^* A_1 x_1 \in \mathbb{R}$. از طرفی

$$x_1^* A_1 x_1 + x_2^* A_2 x_2 = (x_1^* \oplus x_2^*)(A_1 \oplus A_2)(x_1 \oplus x_2) = x^* A x \in S \subseteq \mathbb{R}$$

بنابراین $\Im\left(x_2^* A_2 x_2\right) = 0$. مشاهده می کنیم که اگر $x_2 \neq 0$،

$$\frac{1}{x_2^* x_2} x_2^* A_2 x_2 = \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^* x_2}}\right)^* A_2 \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^* x_2}}\right) \in W(A_2)$$

اما $\Im(W(A_2)) > 0$، بدین ترتیب $\Im\left(x_2^* A_2 x_2\right) > 0$ که تناقض است، پس نتیجه می گیریم که $x_2 = 0$ و بنابراین

$$x = x_1 \oplus 0 \Rightarrow x^* x = x_1^* x_1 + 0 \Rightarrow \|x\| = \|x_1\|.$$

اگر هم‌چنین $x^* A x \in V^2(A)$، آن‌گاه $x^* A^2 x = (x^* A x)^2$، درنتیجه $x_1^* A_1^2 x_1 = \left(x_1^* A_1 x_1\right)^2$؛ به عبارت دیگر $x_1^* A_1 x_1 \in V^2(A_1)$. اما A_1 ماتریسی هرمیتی است، پس با توجه به گزاره‌ی ۲۲.۱.۱، $x^* A x = x_1^* A_1 x_1 \in \sigma(A_1) \subseteq \sigma(A)$

□

فصل ۲

غلاف عددی چندجمله‌ای مرتبه‌ی دوی ماتریس‌های نرمال خاص

۱.۲ ماتریس‌های به فرم $A = A_1 \oplus iA_2, A_1^* = A_1, A_2^* = A_2$

در این فصل، ماتریس‌های $A \in M_n$ ای را مورد بحث قرار می‌دهیم که به صورت ذیل اند:

$$A = A_1 \oplus iA_2, A_1^* = A_1, A_2^* = A_2 \qquad (۱.۲)$$

گزاره ۱.۱.۲ وقتی $A \in M_n$ ماتریسی نیم‌ـمعین و $x \in \mathbb{C}^n$ باشد آن‌گاه از $x^*Ax = 0$ نتیجه می‌شود که $Ax = 0$.

اثبات :

ابتدا فرض کنید A ماتریسی نیم‌معین مثبت باشد و $t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{C}$ دلخواه باشند.

$$\begin{aligned}
&0 \leq (x+ty)^* A (x+ty) = x^*Ax + t(y^*Ax + x^*Ay) + t^2 y^*Ay \\
&\overset{x^*Ax=0}{=} t(y^*Ax + x^*Ay) + t^2 y^*Ay \Rightarrow 0 \geq \Delta = b^2 - 4ac = (y^*Ax + x^*Ay)^2 \\
&\Rightarrow y^*Ax + x^*Ay = 0 \quad (*) \overset{y \leftarrow iy}{\Rightarrow} -iy^*Ax + ix^*Ay = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} y^*Ax = x^*Ay = 0
\end{aligned}$$

چون تنها برداری که بر هر بردار عمود است بردار صفر می باشد لذا $Ax = 0$. در حالتی که ماتریس A نیم‌معین منفی باشد، برهان مشابه حالت اخیر خواهد بود با این تفاوت که $0 \geq (x+ty)^* A (x+ty)$

□

قضیه ۲.۱.۲ در نظر بگیرید که A به صورت (۱.۲) باشد. فرض کنید A_1 و A_2 ماتریس‌های نیم‌معینی باشند. در این صورت $\mathrm{num}(A) \leq 2$.

اثبات :

فرض کنید $x = x_1 \oplus x_2$ بردار یکه‌ای باشد که $x^*Ax = x_1^*A_1x_1 + ix_2^*A_2x_2 \in V^2(A)$؛ می‌دانیم $\sigma(A) = V(A) \subset V^2(A)$ بنابراین کافی است ثابت کنیم که $x^*Ax \in \sigma(A)$.

مشاهده می کنیم که

$$\begin{cases}
(x^*Ax)^2 = \left(\left(x_1^* \oplus x_2^*\right)(A_1 \oplus iA_2)(x_1 \oplus x_2)\right)^2 = \left(x_1^*A_1x_1 + ix_2^*A_2x_2\right)^2 \\
= \left(x_1^*A_1x_1\right)^2 - \left(x_2^*A_2x_2\right)^2 + 2i\left(x_1^*A_1x_1\right)\left(x_2^*A_2x_2\right), \\
\\
\left(x^*A^2x\right) = \left(x_1^* \oplus x_2^*\right)(A_1 \oplus iA_2)^2 (x_1 \oplus x_2) \\
= \left(x_1^* \oplus x_2^*\right)\left(A_1^2 \oplus \left(-A_2^2\right)\right)(x_1 \oplus x_2) = \\
= x_1^*A_1^2x_1 + x_2^*\left(-A_2^2\right)x_2 = \left(x_1^*A_1^2x_1\right) - \left(x_2^*A_2^2x_2\right)
\end{cases} \tag{۲.۲}$$

و بنابراین

$$x^*Ax \in V^2(A) \Rightarrow x^*A^2x = (x^*Ax)^2 \overset{(2.2)}{\Rightarrow}$$
$$\left(x_1^*A_1^2x_1\right) - \left(x_2^*A_2^2x_2\right) = \left(x_1^*A_1x_1\right)^2 - \left(x_2^*A_2x_2\right)^2 + 2i\left(x_1^*A_1x_1\right)\left(x_2^*A_2x_2\right)$$

اما با توجه به هرمیتی بودن ماتریس‌های A_1 و A_2 اعداد

$x_2^*A_2^2x_2 = x_2^*A_2^*A_2x_2 = (A_2x_2)^*(A_2x_2)$ و $x_1^*A_1^2x_1 = x_1^*A_1^*A_1x_1 = (A_1x_1)^*(A_1x_1)$

حقیقی اند از طرفی چون A_1 و A_2 ماتریس‌هایی نیم‌معین اند باید $\left(x_1^*A_1x_1\right)^2$ و $\left(x_2^*A_2x_2\right)^2$ نیز اعدادی حقیقی باشند و بدین‌ترتیب باید $\left(x_1^*A_1x_1\right)\left(x_2^*A_2x_2\right) = 0$.

دقت می‌کنیم که اگر $x_1^*A_1x_1 = x_2^*A_2x_2 = 0$ می‌توانیم با توجه به روابط (۲.۲) نتیجه بگیریم که $x^*Ax = 0$ و در این صورت گزاره ۱.۱.۲ نتیجه می‌دهد که $Ax = A_1x_1 \oplus A_2x_2 = 0$ و آن‌چه می‌خواستیم بدست آمده است، اما حالتی که $x_1^*A_1x_1 \neq 0 = x_2^*A_2x_2$ مشابه با حالت $x_2^*A_2x_2 \neq 0 = x_1^*A_1x_1$ بررسی می‌شود بدین ترتیب بدون کاستن از کلیت فرض می کنیم که $x_2^*A_2x_2 = 0 \neq x_1^*A_1x_1$. در این صورت گزاره ۱.۱.۲ نشان می‌دهد که $A_2x_2 = 0$. این نکته به همراه روابط (۲.۲) نتیجه می‌دهد که $\left(x_1^*A_1x_1\right)^2 = x_1^*A_1^2x_1 = \|A_1x_1\|^2$. با توجه به نامساوی کوشی‌ـشوارتز

$$\left(x_1^*A_1x_1\right)^2 \overset{A_1 \text{ is semidefinite}}{=} \left|x_1^*A_1x_1\right|^2 = |\langle A_1x_1, x_1\rangle|^2 \leq \langle A_1x_1, A_1x_1\rangle \langle x_1, x_1\rangle$$
$$= \|A_1x_1\|^2 \|x_1\|^2$$

اما $\left(x_1^*A_1x_1\right)^2 = \|A_1x_1\|^2$ بنابراین یا هر دو طرف نامساوی کوشی‌ـشوارتز صفر اند و یا باید $\|x_1\| \leq 1$ از طرفی $x = x_1 \oplus x_2$ و $\|x\| = 1$ پس باید $\|x_1\| \leq \|x\| = 1$ باشد؛ بدین‌ترتیب $\|x_1\| = 1$ پس در هر حال دو طرف نامساوی کوشی‌ـشوارتز با هم مساوی می‌شوند و درنتیجه می‌توان $\lambda \in \mathbb{C}$ را به گونه‌ای یافت که $A_1x_1 = \lambda x_1$. حال با توجه به $A = A_1 \oplus iA_2$، $x_2^*A_2x_2 = 0 \neq x_1^*A_1x_1$ و $\|x_1\| = 1$ نتیجه می‌گیریم که

$x^*Ax = x_1^* A_1 x_1 = \lambda \in \sigma(A_1) \subset \sigma(A)$ و اثبات کامل شده است.

□

قضیه ۳.۱.۲ اگر A به صورت (۱.۲) و A_2 ماتریس نیم‌معین مثبتی باشد، آن‌گاه

$$V^2(A) \subseteq \sigma(A_1) \cup i[0, r(A_2)].$$

اثبات :

در نظر بگیرید $x = x_1 \oplus x_2$ بردار یکه‌ای باشد که $x^*Ax = x_1^* A_1 x_1 + i x_2^* A_2 x_2 \in V^2(A)$.
چون $(x^*Ax)^2 = x^*A^2x$ بنابه روابط (۲.۲)، $\left(x_1^* A_1 x_1\right)\left(x_2^* A_2 x_2\right) = 0$. اگر $x_2^* A_2 x_2 = 0 \neq x_1^* A_1 x_1$، آن‌گاه به کمک روشی مشابه با روند برهان قضیه‌ی قبل بدست می‌آوریم که $x^*Ax = x_1^* A_1 x_1 \in \sigma(A_1)$.اما اگر $x_1^* A_1 x_1 = 0$ آن‌گاه $x^*Ax = i x_2^* A_2 x_2$ و باتوجه به نیم‌معین مثبت بودن A_2 برای تکمیل برهان کافی است نشان دهیم $x_2^* A_2 x_2 \leq r(A_2)$:

از آن‌جا که هر ماتریس نرمال، به طور یکانی قطری شدنی است، با فرض این‌که $\sigma(A_2) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ می توان ماتریس یکانی U را به گونه‌ای یافت که $A_2 = U^* \Lambda U$ که در آن $\Lambda = diag(\sigma(A_2))$ در این صورت

$$\begin{aligned}
x_2^* A_2 x_2 &= (Ux_2)^* \Lambda (Ux_2) = \lambda_1 (Ux_2)_1^2 + \lambda_2 (Ux_2)_2^2 + \cdots + \lambda_n (Ux_2)_n^2 \\
&\leq r(A_2)\left[(Ux_2)_1^2 + (Ux_2)_2^2 + \cdots + (Ux_2)_n^2\right] = r(A_2)\|Ux_2\|^2 \\
&\leq r(A_2)\|U\|^2 \|x_2\|^2 \leq r(A_2)\|U\|^2 \|x\|^2 = r(A_2)\|U\|^2 = r(A_2)
\end{aligned}$$

که در آن منظور از $(Ux_2)_j$ درایه‌ی j ام از بردار Ux_2 می‌باشد.

□