بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه علوم کامپیوتر

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

علوم کامپیوتر

جریان بیشینه در گراف‌های مسطح

استاد راهنما:

دکتر محمد فرشی

استاد مشاور:

دکتر مهدیه هاشمی‌نژاد

پژوهش‌گر:

احسان جوکار

مهر ۱۳۹۱

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به

مادر عزیزم

و پدر، خواهر و برادرانم.

سپاس‌گزاری

خدای متعال را سپاس که به من توانایی داد تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم. به رسم ادب بر خود لازم می‌دانم تا از زحمات کسانی که در انجام این کار به من یاری رسانده‌اند تشکر نمایم. پیش از همه، لازم می‌دانم از زحمات استاد ارجمند و بزرگوار، دکتر محمد فرشی که نه تنها مرا در به نتیجه رسیدن این پایان‌نامه، بلکه در تمام مراحل تحصیل یاری و مساعدت نمودند، تشکر و قدردانی نمایم. از زحمات سرکار خانم دکتر مهدیه هاشمی‌نژاد نیز که به عنوان استاد مشاور، یاور من در طی مراحل انجام این پایان‌نامه بودند، نهایت سپاس‌گزاری را دارم.

چکیده

در مسئله‌ی جریان بیشینه، ما به دنبال ارسال بیشترین مقدار جریان از یک رأس مبدأ به یک رأس مقصد در یک گراف هستیم، با در نظر گرفتن این محدودیت که جریان در هیچ کمانی نمی‌تواند از ظرفیت آن کمان فراتر رود. در این پایان‌نامه، مسئله‌ی جریان بیشینه را در گراف‌های مسطح بررسی می‌کنیم. برای این منظور، الگوریتمی مورد مطالعه قرار می‌گیرد که این مسئله را در زمان $O(n \log n)$ حل می‌کند. ما همچنین الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ برای یافتن یک جریان بیشینه در یک گراف مسطح را بررسی می‌کنیم که در آن علاوه بر کمان‌ها، رئوس نیز دارای ظرفیت می‌باشند.

پیشگفتار

مسئله‌ی یافتن یک جریان بیشینه در یک گراف یا یک شبکه، مسئله‌ای شناخته شده با کاربردهایی در زمینه‌های متعدد مانند تعیین جریان بیشینه‌ی محصولات نفتی در یک شبکه‌ی لوله‌ای، خودروها در یک شبکه‌ی جاده‌ای، پیام‌ها در یک شبکه‌ی ارتباطاتی و برق در یک شبکه‌ی الکتریکی است [۲].

در کاربردهای زیادی از قبیل ترافیک جاده‌ای و یا طراحی مدارهای VLSI[۱] با کلاس خاصی از گراف‌ها یعنی گراف‌های مسطح (گراف‌هایی بدون یال‌های متقاطع در صفحه) مواجه می‌شویم، که مسئله‌ی جریان بیشینه برای این کلاس از گراف‌ها قابل بررسی و مطالعه است، چرا که ساختار ویژه‌ی گراف‌های مسطح به ما اجازه می دهد که الگوریتم‌هایی ساده‌تر و کاراتر برای مسئله‌ی جریان بیشینه و مسائل مرتبط بیابیم.

در مسئله‌ی جریان بیشینه به هر کمان ظرفیتی نسبت داده می‌شود که جریان عبوری از آن را محدود می‌کند و ما در جستجوی راهی برای ارسال بیشترین میزان جریان از یک گره مبدأ s به یک گره مقصد t با در نظر گرفتن این محدودیت‌ها هستیم.

در بعضی از شبکه‌ها با حالتی از مسئله روبرو هستیم که در آن علاوه بر کمان‌ها، رئوس شبکه نیز دارای ظرفیت هستند، یعنی میزان جریانی که می‌تواند به هر رأس وارد شود دارای محدودیت است. این حالت برای نمونه در هنگام محاسبه‌ی مسیرهای مجزا در گراف‌ها (یافتن مسیرهایی بین یک مبدأ و مقصد مشخص به گونه‌ای که این مسیرها به جز مبدأ و مقصد، رأس مشترکی نداشته باشند)، و یا در مسئله‌های دیگری که رئوس، مدلی از اشیای دارای ظرفیت هستند پدیدار می‌شود. یکی از کاربردهایی که در آن رئوس دارای ظرفیت نقش مهمی را ایفا می‌کنند در پیکربندی مجدد آرایه‌های VLSI/WSI می‌باشد [۳۷] و [۳۸].

در فصل اول این پایان‌نامه، مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در ادامه‌ی پایان‌نامه معرفی می‌گردند. در فصل دوم، مسئله‌ی جریان بیشینه و همچنین دوگان آن یعنی مسئله‌ی برش کمینه تعریف شده و الگوریتم‌های کلی برای حل مسئله‌ی جریان بیشینه معرفی می‌شوند. در فصل سوم، مسئله‌ی جریان بیشینه در گراف‌های مسطح مورد

---

[۱] Very Large Scale Integrated circuits

بررسی قرار می‌گیرد و ضمن بیان تاریخچه‌ای از این مسئله در گراف‌های مسطح، جدیدترین و کاراترین الگوریتم شناخته شده برای این مسئله مطالعه می‌شود. در فصل چهارم، الگوریتمی از مرتبه‌ی زمانی $O(n \log n)$ برای حل مسئله‌ی جریان بیشینه در گراف‌های مسطح دارای ظرفیت رأس بررسی شده و کاربردهایی از آن نیز بیان می‌گردد. در پایان در فصل پنجم، نتایج به دست آمده جمع‌بندی شده و مسائل مورد توجهی برای کارهای آینده نیز مطرح می‌شوند.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش تعاریف مورد نیاز در این تحقیق بیان می‌گردد. همچنین برخی قضایا و ویژگی‌های مرتبط مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۱ گراف‌ها

تعریف ۱.۱.۱ یک مجموعه را یک مجموعه‌ی چندگانه[۱] گوییم اگر اعضای آن بتوانند بیش از یک بار ظاهر شوند؛ پس هر عضو در یک مجموعه‌ی چندگانه یک نرخ تکرار[۲] دارد.

تعریف ۲.۱.۱ زوج $G = (V, E)$ که در آن V مجموعه‌ای متناهی است و E مجموعه‌ی چندگانه‌ای از زیرمجموعه‌های دوعضوی مجموعه‌ی V است را گراف G گویند.

مجموعه‌ی V را مجموعه‌ی رئوس و اعضای آن را رئوس گراف G گویند و مجموعه‌ی E را مجموعه‌ی یال‌ها و اعضای آن را یال‌های گراف G گویند.

تعریف ۳.۱.۱ زوج $G = (V, A)$ که در آن V مجموعه‌ای متناهی است و A مجموعه‌ی چندگانه‌ای از زوج‌های مرتب از اعضای مجموعه‌ی V است را گراف جهت‌دار G گویند.

مجموعه‌ی V را مجموعه‌ی رئوس و اعضای آن را رئوس گراف جهت‌دار G گویند و مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی کمان‌ها و اعضای آن را کمان‌های گراف جهت‌دار G گویند.

از نماد n برای نمایش تعداد رئوس یک گراف و از نماد m برای نمایش تعداد کمان‌های گراف استفاده می‌کنیم؛ یعنی داریم $n = |V|, m = |A|$.

فرض کنید G یک گراف جهت‌دار با مجموعه‌ی کمان‌های A باشد. به ازای هر کمان $a \in A$، دو "پیکان"[۳] جهت‌دار خلاف جهت هم، یکی در همان جهت a و دیگری در جهت مخالف تعریف می‌شود. پیکان هم‌جهت با a را با $< a, 1 >$ (گاهی به اختصار با a) و پیکان دیگر را با $< a, -1 >$ نمایش می‌دهیم. تابع $rev(.)$ را تابعی تعریف می‌کنیم که هر پیکان را به پیکان متناظرش در جهت مخالف انتقال می‌دهد. به عبارت دیگر،

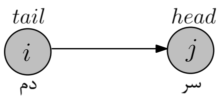
[۱] multi-set

[۲] multiplicity

[۳] dart

مجموعه‌ی پیکان‌ها $A \times \{\pm۱\}$ بوده و برای تابع معکوس نیز داریم: $rev(<a,i>) = <a,-i>$.

سر[۴] و دُم[۵] یک پیکان d در یک گراف G (که به صورت $head_G(d)$ و $tail_G(d)$ نوشته می‌شوند) به گونه‌ای هستند که جهت پیکان از دُم به سر می‌باشد (در مواقعی که حذف زیرنویس G باعث ابهام نمی‌شود می‌توان آن را حذف کرد). همچنین می‌توانیم پیکان d را به صورت (i,j) نشان دهیم که در آن $i = tail(d)$ و $j = head(d)$ می‌باشد، البته در صورتی که وجود پیکان‌های موازی ابهامی ایجاد نکند؛ دو پیکان را موازی گوییم اگر دُم آن‌ها یکسان و سر آن‌ها نیز یکسان باشد. همچنین یک پیکان را یک حلقه[۶] گوییم اگر سر و دم آن یک رأس باشد.



تعریف ۴.۱.۱ گراف G را ساده گوییم اگر کمان‌های موازی و حلقه نداشته باشد.

۱.۱.۱ گشت‌ها، مسیرها و دورها

تعریف ۵.۱.۱ یک گشت[۷] ناتهی از رأس x به رأس y، دنباله‌ای ناتهی از پیکان‌های $d_۱, \ldots, d_k$ است به گونه‌ای که $head_G(d_k) = y$ و $tail_G(d_۱) = x$ و به ازای $i = ۲, ..., k$ داشته باشیم $head_G(d_{i-۱}) = tail_G(d_i)$.

گوییم یک گشت شامل یک رأس است اگر آن رأس، سر یا دُم یکی از پیکان‌های تشکیل دهنده‌ی آن گشت باشد. رأس آغازین گشت، همان دُم $d_۱$ و رأس پایانی، همان سر d_k است. رئوس آغازین و پایانی گشت W را به ترتیب با $start(W)$ و $end(W)$ نشان می‌دهیم. یک گشت تهی W نیز توسط تک رأس v مشخص می‌شود به گونه‌ای که $start(W) = end(W) = v$.

تعریف ۶.۱.۱ گشتی که در آن هیچ پیکانی بیش از یک بار ظاهر نشود را یک مسیر[۸] گوییم. اگر علاوه بر این

[۴] head

[۵] tail

[۶] loop

[۷] walk

[۸] path