وزارت علوم تحقیقات وفناوری

دانشگاه دامغان

دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی(تحقیق در عملیات)

حل عددی رده‌ای از مسائل کنترل بهینه با قیود معادلات انتگرالی فردهلم

توسط

محمود سنچولی

استاد راهنما

دکتر امید سلیمانی فرد

استاد مشاور

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی

شهریور ۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

یا اَعلی مَحمودٍ حُمَد

وزارت علوم تحقیقات و فن‌آوری
دانشگاه دامغان
دانشکدهٔ ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی(تحقیق در عملیات)

حل عددی رده‌ای از مسائل کنترل بهینه با قیود معادلات انتگرالی فردهلم

توسط

محمود سنچولی

استاد راهنما

دکتر امید سلیمانی فرد

استاد مشاور

دکتر اکبر هاشمی برزآبادی

شهریور ۸۹

تقدیم به همهٔ عزیزانم

شهریار کوچولو گفت: اهلی کردن یعنی چی؟
روباه گفت: یک چیزی است که پاک فراموش شده، معنیش ایجاد علاقه کردن است.
شهریار کوچولو گفت: خیلی دلم می خواهد اهلیت کنم، ولی وقت چندانی ندارم، باید بروم دوست پیدا کنم.
روباه گفت: آدم ها همه چیز را حاضر آماده از دکان می خرند ولی چون دکانی نیست که دوست معامله کند، آدم ها مانده اند بی دوست...
و روباه ادامه داد: رازی که می گویم بسیار ساده است.
جز با دل هیچی را چنان که باید، نمی شود دید. نهاد و گوهر را چشم سر نمی بیند.
ارزش گل تو به قدر عمری است که به پایش صرف کرده ای.
انسان ها این حقیقت را فراموش کرده اند، ولی تو نباید فراموشش کنی. تو تا زنده ای نسبت به چیزی که اهلی کرده ای مسئولی، تو مسئول گُلِتی...

سپاس و ستایش یکایک گل های زندگیم را

محمود سیچولی

چکیده

حل عددی رده‌ای از مسائل کنترل بهینه با قیود معادلات انتگرالی فردهلم

توسط
محمود سنچولی

در این پایان‌نامه، با رده‌ای از مسائل کنترل بهینه تحت قیود معادلات انتگرالی فردهلم کار می‌کنیم. یک روش مستقیم بر اساس بسط تیلور و پارامتری‌سازی برای محاسبهٔ جواب تخمینی–تحلیلی مساله، به همراه اثبات همگرایی آن، با جزئیات کامل ارائه می‌شود. بر اساس این روش، الگوریتمی کارا و در عین حال ساده برای حل این رده از مسائل پیشنهاد می‌شود. در پایان، دقت و کارایی روش، با ارائه چند مثال نشان داده می‌شود.

فهرست

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل ها

فصل ۱

پیشینه پژوهش و تعاریف مقدماتی

مقدمه

نظریهٔ کنترل در دهه‌های اخیر به عنوان یک ابزار قدرتمند برای توصیف فرآیندهای اقتصادی، صنعتی و علوم زیستی و به‌دست آوردن جواب بهینه در مدل‌های ریاضی توسعه یافته است. از طرفی برای مدل‌بندی بسیاری از مسائل، هم چون مسائل مقدار مرزی در فیزیک و دینامیک سیالات از معادلات انتگرالی استفاده می‌شود. بنابراین مسائل کنترل بهینه تحت معادلات انتگرالی و بویژه معادلات انتگرالی فردهلم از اهمیت زیادی برخور دارند. از سوی دیگر، چون حل تحلیلی این‌گونه مسائل نیازمند محاسبات پیچیدهٔ ریاضی هستند، روش‌های عددی همواره برای حل این مسائل مورد استفاده قرار گرفته‌اند.
در این فصل، به بیانی مقدماتی و ساده از کنترل بهینه پرداخته و پس از روشن شدن مطلب به توضیح و شرح معادلات انتگرالی می‌پردازیم.

۱.۱ کنترل بهینه

ایدهٔ ماشینی که به طور خودکار به هدف از پیش تعیین شده‌ای می‌رسد، امروزه پیش‌پا افتاده است[۲]. ترموستات و تایمر به ترتیب دیگ‌های حرارتی مرکزی و ماشین‌های لباسشویی را کنترل می‌کنند. رانندهٔ یک اتومبیل، مسیر وسیلهٔ نقلیه را با استفاده از پدال‌های پایی و فرمان اتومبیل کنترل می‌کند. چنین دستگاه‌هایی می‌توانند طوری ساخته شوند که روش کارشان را تغییر دهند. ما همواره ابزارهایی را برای کنترل آنها در اختیار داریم. این به آن معنی است قوانینی که رفتار آنها را معین می‌کنند باید شامل متغیرهایی باشند که مقادیر این متغیرها می‌توانند به وسیلهٔ کسی خارج و مستقل از خود دستگاه تغییر داده شوند. تصمیم می‌گیریم که در عوض اعمال فشار بر پدال گاز، روی پدال ترمز فشار وارد کنیم

و دستگاه با آهسته شدن واکنش نشان می‌دهد. بنابراین متغیرهایی داریم که متغیرهای کنترل نامیده می‌شوند و می‌توانند برای اصلاح نتایج حاصل شده از رفتار دستگاه مورد استفاده قرار گیرند.
روش‌های متعارف مختلف طراحی سیستم‌های کنترل، معمولاً روش‌های سعی و خطا می‌باشند[۲]، که در آنها برای تعیین پارامترهای طراحی یک سیستم مورد قبول، روش‌های مختلف تحلیلی–تکراری مورد استفاده قرار می‌گیرند. نحوهٔ عملکرد قابل قبول سیستم، معمولاً بر مشخصه‌های زمانی نظیر زمان صعود، زمان قرار، حداکثر جهش و یا بر حسب مشخصه‌های فرکانسی نظیر حد فاز، حد دامنه و پهنای باند بیان می‌شوند. لیکن با این روش، در مورد سیستم‌هایی با چند ورودی و چند خروجی که نیازهای تکنولوژیکی امروزه را برآورده می‌نمایند، باید معیارها یا نحوهٔ عملکردهای گوناگونی صادق باشند. بعنوان مثال، طرح سیستم کنترل موقعیت هواپیما که مصرف سوخت را نیز حداقل کند، با استفاده از روش‌های متعارف امکان‌پذیر نیست. روش جدید و مستقیم طرح چنین سیستم‌های پیچیده‌ای که کنترل بهینه نامیده می‌شود، با توسعهٔ کامپیوترهای دیجیتالی، امکان‌پذیر شده‌است.
هدف سیستم کنترل بهینه، تعیین سیگنال‌های کنترل است بطوری که در محدودیت‌ها یا قیود فیزیکی صدق کرده و در ضمن، نحوهٔ عملکرد یا معیار معینی را حداقل یا حداکثر نماید.[۳]

ارکان یک سیستم کنترل

در یک مسالهٔ کنترلی، چیزی که در ابتدا به نظر می‌رسد و مهم جلوه می‌کند، تنظیم صورت مساله است و جملهٔ معروف "تنظیم خوب مساله، نصف حل آن است!" هرچند کمی اغراق آمیز است، لیکن بدون شک منظور مناسبی را دنبال می‌کند. [۳]
برای تنظیم صورت هر مسالهٔ کنترل، به موارد زیر نیاز داریم:

یک) بیان ریاضی یا مدل سیستمی که باید کنترل شود.

دو) بیان محدودیت‌های فیزیکی.

سه) تعیین نحوهٔ عملکرد سیستم.

رکن اصلی هر مسالهٔ کنترلی، مدل‌سازی آن است. هدف، به‌دست آوردن ساده‌ترین بیان ریاضی است که پاسخ سیستم فیزیکی را به تمام ورودی‌های مورد نظر بطور مناسب پیش‌بینی کند.
فرض کنید که سیستم توسط معادلهٔ زیر برای $t \in [t_\circ, t_f]$ بیان شده باشد

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۱.۱. [۳] تاریخچه یا سابقهٔ مقادیر سیگنال کنترل در مدت $[t_\circ, t_f]$ توسط u نشان داده شده و آنرا سابقهٔ کنترل و یا به طور ساده کنترل می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. [۳] تاریخچه یا سابقهٔ مقادیر وضعیت در فاصلهٔ $[t_\circ, t_f]$ به نام سابقهٔ وضعیت یا منحنی وضعیت نامیده شده و توسط x نشان داده می‌شود.

پس از انتخاب مدل ریاضی سیستم، باید محدودیت‌های فیزیکی بر روی وضعیت‌ها و کنترل‌ها را تعریف نمود.

تعریف ۳.۱.۱. [۳] سیگنال کنترلی که در تمام مدت $[t_\circ, t_f]$ در محدودیت‌های کنترل صدق نماید به کنترل قابل قبول معروف می‌باشد.

مجموعهٔ کنترل‌های قابل قبول به وسیلهٔ U مشخص شده و $u \in U$ به معنی این است که منحنی u قابل قبول می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۱. [۳] منحنی مسیر متغیر وضعیت که در مدت زمان $[t_\circ, t_f]$ در محدودیت‌های متغیر وضعیت صدق نماید، منحنی مسیر قابل قبول نامیده می‌شود.

مجموعه مسیر متغیرهای وضعیت قابل قبول توسط X نشان داده شده و $x \in X$ به این معنی است که منحنی x قابل قبول می‌باشد.
یکی از مفاهیم مهم در نظریه کنترل بهینه، مجموعهٔ قابل قبول است، زیرا مقادیری که متغیرهای وضعیت و یا کنترل‌ها می‌توانند بپذیرند را در محدودهٔ کوچکتری قرار می‌دهد و به جای در نظر گرفتن تمام متغیرهای وضعیت و کنترل‌ها و انتخاب بهترین حالت، فقط متغیرهای وضعیت و کنترل‌هایی را در نظر می‌گیریم که قابل قبول هستند.
در ادامه برای ارزیابی عملکرد یک سیستم، طراح باید نحوهٔ ارزیابی عملکرد را انتخاب نماید. یک سیستم بهینه، سیستمی است که این نحوهٔ ارزیابی عملکرد یا تابعی معیار را حداکثر یا حداقل نماید. تعیین این تابعی معیار در بعضی موارد بسیار ساده بوده و در پاره‌ای دیگر، انتخاب آن به سادگی ممکن

نیست. به طور مثال، در انتقال سیستم از نقطهٔ A به B با حداکثر سرعت ممکن، مشخص است که زمان عمل باید حداقل شود. در مثال دیگری، "قرار دادن موقعیت و سرعت سیستم نزدیک صفر با صرف انرژی کنترلی کم" بلافاصله یک تابعی معیار خاصی را تعیین نمی‌کند.

تعریف ۱.۱.۵. [۳] مسالهٔ کنترل بهینه عبارت است از، پیدا کردن کنترل u^* به طوریکه باعث شود سیستم

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \tag{۱.۱}$$

مسیر $x^* \in X$ را که باعث حداقل شدن تابعی معیار زیر می‌شود، تعقیب کند

$$J = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt. \tag{۲.۱}$$

در ادامه توجهات زیر الزامی می‌نماید.

تذکر ۱. [۳] ممکن است قبلاً اطلاع از وجود کنترل بهینه نداشته باشیم، به عبارتی کنترلی نداشته باشیم که قابل قبول باشد و باعث پیمودن مسیر مطلوبی توسط سیستم شود. در نتیجه با استفاده از تئوری وجود جواب، اغلب پیدا کردن کنترل بهینه ساده‌تر از اثبات وجود جواب خواهد بود.

تذکر ۲. [۳] اگر کنترل بهینه‌ای وجود داشته باشد، ممکن است جواب منحصر بفرد نباشد. هرچند منحصر بفرد نبودن باعث بزور اشکال در روش‌های محاسباتی می‌شود، لیکن به طراح این اجازه را می‌دهد که با در نظر گرفتن پارامترهای دیگری نظیر قیمت، اندازه و غیره که در تابعی معیار در نظر گرفته نشده است، انتخاب خود را انجام دهد.

تذکر ۳. [۳] وقتی می‌گوئیم u^* باعث حداقل شدن تابعی معیار می‌شود، منظور این است که برای تمام $u \in U$ و $x \in X$ داریم

$$J^* = \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t)dt \leq \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t)dt$$

این رابطه بیان می‌کند که کنترل بهینه باعث کوچک شدن تابعی معیار نسبت به هر کنترل قابل قبول دیگر و هر مسیر قابل قبول دیگری می‌شود.

۲.۱ اصل بیشینه پونتریاگین

دستگاه کنترلی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t)$$

فرض کنید می‌خواهیم دستگاه را از وضعیت $x_۰$ در زمان $t = t_۰$، به وضعیت $x_۱$، در زمان غیر مشخص $t_۱$ و با استفاده از کنترل‌های قابل قبول $u(t)$ که قطعه قطعه پیوسته و کراندار هستند، هدایت کنیم. به طوری که تابعی معیار

$$J = \int_{t_۰}^{t_۱} g(x(t), u(t), t)dt$$

را نیز کمینه کند.
در اینجا باید رفتار تابع عددی

$$H = \psi_۰ g(x, u) + \psi_۱ a(x, u)$$

را مورد بررسی قرار دهیم، به طوری که ψ_i ها در معادلات زیر صدق می‌کنند

$$\psi_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = ۰, ۱. \tag{۳.۱}$$

قضیه ۱.۲.۱. اصل بیشینه پونتریاگین فرض می‌کنیم $u^*(t)$ یک کنترل قابل قبول باشد و مسیر متناظر آن نیز $x^*(t)$ باشد، که دستگاه را از وضعیت $x_۰$ در زمان $t = t_۰$ به وضعیت $x_۱$ در زمان غیر مشخص $t = t_۱$ هدایت می‌کند. برای اینکه u^* و x^* بهینه باشند، یعنی J را کمینه کنند، لازم است که بردار غیر صفر $\psi = (\psi_۰, \psi_۱)^T$ که در رابطهٔ (۳.۱) صدق می‌کند و نیز تابع عددی

$$H = (\psi, x, u) = \psi_۰ g(x, u) + \psi_۱ a(x, u)$$

موجود باشند، به طوری که

الف) به ازای هر $t_۰ \leq t \leq t_۱$ ، H به بیشینهٔ خود نسبت به u در $u = u^*(t)$ برسد.

ب) $H(\psi^*, x^*, u^*) = ۰$ و در $t = t_۱$، $\psi_۰ \leq ۰$ که $\psi^*(t)$ جواب معادلهٔ (۳.۱) به ازای $u = u^*(t)$ می‌باشد.

به علاوه می‌توان نشان داد که، عدد ثابت= $H(\psi^*(t), x^*(t), u^*(t))$ ، و نیز، عدد ثابت= $\psi_۰(t)$. بنابراین به ازای هر نقطه روی مسیر بهینه، $H = ۰$ و $\psi_۰(t) \leq ۰$.

برهان . برای اثبات به مرجع [۲] رجوع شود. ■

۳.۱ حل مساله کنترل به روش پارامتری سازی

معادلهٔ زیر را در نظر می‌گیریم [۱۰]

$$u(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I^\circ. \tag{۴.۱}$$

که $I = [۰, ۱]$ بازه زمانی است، $x(.) : I \to \mathbb{R}$ تابع حالت و $u(.) : I \to \mathbb{R}$ تابع کنترل است و f تابعی حقیقی مقدار و نسبت به متغیرهایش پیوسته مشتق‌پذیر است. اکنون مسالهٔ کنترل بهینه نامقید یافتن یک تابع کنترل بهینه است به طوری که تابعی زیر را کمینه کند،

$$J(u, x) = \int_۰^۱ g(t, x(t), u(t))dt \tag{۵.۱}$$

و تابع وضعیت $x(t)$ از معادلهٔ (۴.۱) در شرایط مرزی زیر صدق کنند

$$x(۰) = x_۰, \quad x(۱) = x_۱ \tag{۶.۱}$$

که $x_۰$ و $x_۱$ وضعیت‌های داده شده در $\mathbb{R}$ هستند. در این روش فرض کنیم Q زیرمجموعه‌ای از $C^۱(I)$ و شامل همه تابع‌هایی باشد که از $(۰, x_۰)$ و $(۱, x_۱)$ می‌گذرد. با توجه به معادلات (۴.۱) ، (۵.۱) تابعی هزینه بر حسب $x(.)$ بیان می‌شود، یعنی $J(x(.))$. بنابراین مسالهٔ کنترل بهینه بالا کمینه‌سازی J روی مجموعهٔ Q است. چون به آسانی نمی‌توان مقدار کمینه J روی Q را به دست آورد، بنابراین کمینه‌سازی J را روی زیردنبالهٔ مجموعه ای همگرای چگال در Q مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنیم Q_n زیرمجموعه‌ای از Q بوده و شامل همه چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n باشد، یعنی داشته باشیم

$$x_n(t) = \sum_{i=۱}^{n} a_i t^i. \quad n = ۱, ۲, ...$$

اکنون کمینه‌سازی J را روی Q_n با توجه به اینکه $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ مقادیری مجهول هستند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این به وضوح یک مسالهٔ بهینه‌سازی در یک فضای $n+1$ بعدی زیر است

$$\{(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : a_0 = x_0, \sum_{i=0}^{n} a_i = x_1\}.$$

و $J(x_n)$ را به عنوان تابع $J(a_0, a_1, ..., a_n)$ بررسی می‌کنیم.
اگر $x_n^*(.)$ جواب حاصل از کمینه سازی J روی Q_n برای $n = 1, 2, ...$ باشد، آنگاه $\{x_n^*\}$ یک دنباله کمینه برای مسالهٔ اصلی است.

قضیه ۱.۳.۱. اگر $\alpha_n = \inf_{Q_n} J$ برای $n = 1, 2, ...$ باشد، آنگاه

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

که $\alpha = \inf_Q J$.

برهان . برای اثبات به مرجع [۱۲] رجوع شود. ■

۴.۱ معادلات انتگرالی

۱.۴.۱ مقدمه

تمامی مطالب بخش معادلات انتگرالی از منبع [۴]، آورده شده‌است.
در این بخش، به معرفی انواع خاصی از معادلات انتگرالی می‌پردازیم. نوع اول، معادلات انتگرالی ولترا[۱] هستند که حد بالای انتگرال گیری آنها متغیر است. از طرف دیگر، اگر حد بالای انتگرال‌گیری یک مقدار ثابت باشد، یک معادلهٔ انتگرالی فردهلم[۲] داریم. همچنین بین نوع اول معادلات انتگرالی، که تابع مجهول تنها تحت علامت انتگرال ظاهر می‌شود، و نوع دوم معادلات انتگرالی، که تابع مجهول در بیرون علامت انتگرال هم ظاهر می‌شود، نیز تمایز قائل می‌شویم.
صورت کلی معادلات انتگرالی فردهلم به صورت زیر است:

$$x(t) = y(t) + \int_a^b k(t, s, x(s))ds, \qquad a \le t \le b, \tag{۷.۱}$$

[۱] Volterra
[۲] Fredholm

به طوری که هستهٔ $k(t,s,x(s))$ بر حسب هر سه متغیر خود پیوسته است و $x(t)$ تابع مجهول است، همچنین هستهٔ $k(t,s,x(s))$ و $y(t)$ توابع معلوم هستند.

دسته‌هایی از روش‌هایی که برای حل عددی معادلات انتگرالی فردهلم، کاربرد دارند، بعضاً شامل این روش‌ها هستند: روش‌های هم ارز سازی هسته، به نحوی که هستهٔ $k(t,s)$ بر حسب مجموعی از ضرایب توابعی از s , t، مورد بررسی قرار می گیرد. روش‌های گالرکین[۳]، روش‌های هم محل[۴] [۷، ۸] و هم محل تکرار شده[۵] [۶]، روش‌های بر پایهٔ استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف[۶] و تیلور[۷][۱۳].

۲.۴.۱ دسته بندی معادلات انتگرالی

صورت کلی معادلات انتگرالی نوع دوم خطی به صورت زیر است

$$x(t) = y(t) + \int k(t,s)x(s)ds, \tag{۸.۱}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، تابع مجهول تحت علامت انتگرال ظاهر شده‌است. همچنین تابع $k(t,s)$ هستهٔ معادلهٔ انتگرالی، تابعی از دو متغییر s , t است.

معادلات انتگرالی را می‌توان به دو روش بیان نمود، با حدود انتگرالی متغیر، به صورت

$$x(t) = y(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds \tag{۹.۱}$$

و با حدود ثابت انتگرالگیری به صورت

$$x(t) = y(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)ds. \tag{۱۰.۱}$$

همان طور که قبلاً ذکر شد، معادلات انتگرالی با حدود متغییر، معادلات انتگرالی ولترا و معادلات با حدود ثابت انتگرال گیری، معادلات انتگرالی فردهلم خوانده می‌شوند.

معادلات انتگرالی ولترا و فردهلم را همگن می‌خوانیم اگر $y(t) = 0$. همچنین یک معادلهٔ انتگرالی نسبت به $x(t)$ خطی خوانده می‌شود اگر زمانی که $x_1(t)$ و $x_2(t)$ جواب‌هایی برای $x(t)$ باشند، آنگاه

[۳] Galerkin
[۴] Collocation Methods
[۵] Iterated Collocation Methods
[۶] Chebyshev
[۷] Taylor

ترکیب خطی $x_1(t)$ و $x_2(t)$، یعنی $cx_1(t) + dx_2(t)$ نیز جواب باشد. در نهایت، معادلهٔ انتگرالی را منفرد می‌خوانیم اگر بازهٔ انتگرال‌گیری بینهایت باشد یا هستهٔ آن $k(t,s)$ در بازهٔ انتگرال‌گیری بینهایت شود.

از آنجایی که در فصل سوم، معادلات انتگرالی ولترا–فردهلم نیز مورد استفاده قرار گرفته است، در این بخش، شکل کلی این دسته از معادلات را نیز بیان می‌کنیم.

حال به توضیح هر دسته از معادلات انتگرالی می‌پردازیم.

معادلات انتگرالی ولترا نوع دوم

شکل کلی این دسته از معادلات، به صورت زیر می‌باشد

$$x(t) = y(t) + \int_a^t k(t,s,x(s))ds, \qquad t \geq a. \tag{۱۱.۱}$$

که در آن، $k(t,s,x(s))$ و $y(t)$ توابعی معلوم هستند و $x(t)$ تابعی مجهول است. معادلهٔ (۱۱.۱)، یک معادلهٔ انتگرالی غیرخطی است. چنین معادلاتی می‌توانند در دسته بندی زیر، به عنوان مسالهٔ مقدار اولیه[۸] برای معادلات دیفرانسیل معمولی[۹]، نیز در نظر گرفته شوند

$$x'(t) = f(t,x(t)), \qquad t \geq a, \qquad x(a) = y \tag{۱۲.۱}$$

این معادله، هم ارز معادلهٔ انتگرالی زیر است

$$x(t) = y + \int_a^t f(s,x(s))ds, \qquad t \geq a$$

که نوع خاصی از (۱۱.۱) است.

روش‌های عددی ارائه شده برای حل (۱۱.۱) در بسیاری موارد، روشی‌های مناسبی برای حل مسالهٔ مقدار اولیهٔ (۱۲.۱) هستند.

معادلات انتگرالی ولترا از نوع اول

صورت کلی معادلات انتگرالی ولترا غیرخطی نوع اول به صورت

$$x(t) = \int_a^t k(t,s,x(s))ds, \qquad t \geq a \tag{۱۳.۱}$$

[۸] Initial Value Problem

[۹] Ordinary Diﬀerential Equation

می‌باشد. توابع $k(t,s,x(s))$ و $y(t)$ داده شده و $x(t)$ یک تابع مجهول می‌باشد.
همچنین صورت کلی معادلات انتگرالی ولترا خطی نوع اول به فرم

$$x(t)=\int_a^t k(t,s)x(s)ds, \qquad t\geq a \tag{۱۴.۱}$$

است. برای معادلات انتگرالی ولترا نوع اول، معادلهٔ خطی، موردی است که بیشتر مورد توجه بوده است.

معادلات انتگرالی فردهلم نوع دوم

فرم کلی این معادلات به صورت

$$\lambda x(t)=y(t)+\int_a^b k(t,s)x(s)ds, \qquad t\in D \tag{۱۵.۱}$$

می‌باشد. که D یک مجموعهٔ بستهٔ کراندار در $\mathbb{R}^m$ برای $m\geq 1$ است. تابع هستهٔ $k(t,s)$، تابعی مطلقاً انتگرال‌پذیر در نظر گرفته می‌شود. همچنین فرض می‌شود که دیگر خواص مورد نیاز برای قضیهٔ جایگزین فردهلم[۱۰] (۵.۵.۱) را نیز داشته باشد. برای این مساله دو حالت می‌توان در نظر گرفت

۱ زمانی که $y\neq 0$ ، در این حالت با فرض معلوم بودن λ و y، مساله یافتن جواب x است.

۲ زمانی که $y=0$، در این حالت مساله به یک مسالهٔ مقدار ویژه[۱۱] تبدیل شده و یافتن مقادیر ویژهٔ λ و تابع ویژهٔ x، مطلوب است.

معادلات انتگرالی فردهلم نوع اول

این معادلات به فرم

$$y(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds, \qquad t\in D \tag{۱۶.۱}$$

که در آن، $k(t,s)$ و D همان مفروضات معادلهٔ انتگرالی (۱۵.۱) هستند. چنین معادلاتی اغلب در دستهٔ معادلات بدوضع قرار می‌گیرند، به این دلیل که جواب آنها به تغییرات کوچکی از y حساس است. برای موارد خاص، اغلب این مسائل را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دستهٔ اول، حالتی است که در آن، $k(t,s)$ یک تابع هموار باشد، در این صورت جواب $x(s)$ از (۱۶.۱) اکیداً به کوچکترین تغییرات y

[۱۰] Fredholm Alternative Theorem
[۱۱] Eigenvalue Problem