دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی،
گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

پایداری نگاشتهای جمعی در فضاهای نرمدار فازی غیرارشمیدسی

استاد راهنما:

دکتر بیاض دارابی

استاد مشاور:

دکتر سهراب بزم

پـژوهشگر:

طیبه دیندارلو اینالو

مرداد ۹۲

تقدیم به

به پدر و مادر عزیزم

که از نگاهشان صلابت،

از رفتارشان محبت،

و از صبرشان ایستادگی را آموختم.

ستایش...

پروردگارا. به من یقینی نیکو عطا فرما که با آن از رنج طلب بیاسایم. به یقینی بس عمیق که با آن بر تو تکیه نمایم و اطمینانی خالص که با آن دشواری کارها را از اندیشه‌ام دور نمایم. مرا آسودگی بخش تا دل به این جهان مسپارم و سلامتی عنایت کن تا بندگی‌ات نمایم. یاریم فرما و با بخشش، راهِ اعتدال را به من بنمای. چون تنها تو راهنمای بی قید و شرطی.

خدایا. من آن نیستم که همه می‌پندارند. تنها تو آگاهی و من، که به راستی درونِ من چیست. خدایا تو مرا نزد همگان خوب و شایسته جلوه دادی و من بهتر از هر کس میدانم که شایسته آن نامهای نیکو نبودم. اما با دریای لطف تو چه می‌توان کرد؟ گر تو مرا اینگونه می‌خواهی ناچیز ترین سپاسم در برابر تو سکوت من است. شکر.

پروردگارا. تو را می‌خوانم آن زمان که دیگر پاسخی نمی‌شنوم. و با تو می‌مانم آن زمان که دیگری نمانده. یاریم کن تا آن زمان که پاسخ هم می‌شنوم باز تنها تو را بخوانم و در آن هنگام که دیگران با من می‌مانند من با تو بمانم. زیرا تو مرا کفایت می‌کنی.

پروردگارا. من آن بنده رو سیاهی هستم که بهترین شبهایت را نیز به غفلت گذراندم. تنها تو صدایم را می‌شنوی آن زمان که می‌خوانمت. خدای خوبم! مرا به عقوبتِ غفلتم دچار مکن و سرنوشتم را به لطف و برکت خویش آن گونه نما که با آن به تو نزدیکتر شوم. قبول آنچه خیر و صلاح من در آن است را برایم آسان فرما و قدرت فهم معرفت و حکمت آن را به من عطا کن. آمین ای مهربانترین مهربانان.

خدایا. کمکم کن تا در خواستن این خواسته‌ها همواره امیدوار باشم و در لحظه لحظه آن به تو توکل کنم. کمکم کن که به یاری تو در این مسیر، ایمان قلبی داشته باشم و با یقین به آن بیاندیشم. و کمکم کن که در ابتدای خواستنم و در میان آن و در انتهای آن بر محمد و خاندان پاکش درود فرستم و آنان را زیباترین واسطه‌ها برای روا شدن حاجتم قرار دهم.

سپاس‌گزاری...

امید است خدا مرا در پناه سایه‌ی گرم خویش پناه دهد و جاده‌ی سرسبز خویش را برایم مهیا؛ تا توانم حق زحمات و کرامات استادان گرامی خویش را در باغ پر از الطاف الهی به جا آورم، که نتوانم؛ چرا که اگر حضور استوار و سحر هدایتشان نبود، مرا چه بود حضور در چنین جایگاهی.

صبوری، علم و بزرگواری آنان که دشت سبز بی‌کران بودند و کوه‌های محکم و پابرجا، خصوصا جناب آقای دکتر بیاض دارابی، استاد محترم راهنما، که با تلاش ایشان توانستم تا حدودی قوای این داشته باشم که بار سنگین حضور در جامعه‌ی علمی را به این عرصه برسانم. دکتر سهراب بزم، استاد محترم مشاور، که حضورشان روشنایی بخش و محکم کننده قدم‌های لرزانم در این راه بود. استاد بزرگوار و پر مایه‌ام جناب آقای دکتر اصغر رحیمی که از محضر پر فیض تدریسشان بهره‌ها برده‌ام و زحمت مطالعه و داوری این پایان‌نامه را نیز به عهده داشتند.

و تشکر و قدردانی فراوان از پدر و مادر عزیزم،

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

طیبه دیندارلو اینالو

مرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی: دیندارلو اینالو نام: طیبه

عنوان پایان‌نامه: **پایداری نگاشت‌های جمعی در فضاهای نرم‌دار فازی غیرارشمیدسی**

استاد راهنما: دکتر بیاض دارابی استاد مشاور: دکتر سهراب بزم

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی
گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مرداد ۱۳۹۲ تعداد صفحه:۸۰

کلیدواژه‌ها: پایداری فازی، معادله کوشی، معادله ینسن، نرم فازی، فضای نرمدار فازی غیرارشمیدسی.

چکیده: در این پایان‌نامه، مفهومی از یک نرم فازی غیرارشمیدسی را معرفی کرده و پایداری معادله کوشی در متون فضاهای فازی غیرارشمیدسی هایرز-اولام-راسیاس-گاوراتا مورد مطالعه قرار می‌گیرد و به عنوان یک نتیجه، پایداری معادله ینسن، مورد بحث قرار می‌گیرد. در واقع یک رابطه بین نظریه فضاهای فازی، نظریه فضاهای غیرارشمیدسی و نظریه معادلات تابعی ارایه می‌شود.

فهرست مطالب

مقدمه

به طور کلی مفهوم پایداری [1] در بسیاری از پدیده‌ها مورد توجه است و مطالعه‌ی پایداری آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. می‌توان گفت هنگامی‌که تغییرات مختصری در یک المان(عنصر) از یک سیستم، باعث بهم خوردن سیستم نشده و خطای محدود (قابل قبول) را ایجاد نماید، آن سیستم پایدار است. بنابراین روشن است که بررسی پایداری جایگاه ویژه‌ای در مطالعه این سیستم خواهد داشت. در حالت خاص بررسی پایداری در بسیاری از معادلات مربوط به ریاضی و فیزیک از قبیل حل معادلات دیفرانسیل، دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی، سیستم‌های دینامیکی و... یکی از بخش‌های اساسی و لازم در مطالعه این گونه مسایل به شمار می‌رود. روشن است که در حل هر کدام از مسایل فوق، جواب حاصل برای مساله بایستی چنان باشد که خطای حاصل کران‌دار بوده و از مقدار قابل قبولی (با توجه به شرایط مساله) تجاوز نکند. در چنین حالتی معمولا گفته می‌شود این مساله پایدار است.

مساله پایداری معادلات، نخستین بار توسط اولام [2] در سال ۱۹۴۰ درباره هomomorفیسم گروه‌ها با این سوال مطرح شد:

[1] Stability
[2] Ulam

تابع $f: G_1 \longrightarrow G_2$ را در نظر بگیرید که در آن G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ باشد. آیا برای $\epsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای پیدا کرد به گونه‌ای که اگر برای $x, y \in G_1$، داشته باشیم:

$$d\big(f(xy), f(x)f(y)\big) < \delta,$$

آنگاه یک همریختی $h: G_1 \longrightarrow G_2$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d\big(h(x), f(x)\big) < \epsilon?$$

به عبارت دیگر اگر یک نگاشت تقریبا همومورفیسم باشد، آیا می‌توان یک همومورفیسم حتی المقدور نزدیک آن پیدا کرد؟

یک سال بعد هایرز [1] در حالتی که G_1 یک فضای نرم‌دار و G_2 یک فضای باناخ بود، به سوال اولام جواب داد. در سال ۱۹۵۰ ، آئوکی [2] وجود نگاشت جمعی منحصر به فرد را ثابت کرد و همچنین مدعی شد که وجود نگاشت خطی منحصر به فرد، امکان پذیر نیست.

مساله اولام و جواب هایرز تا سال ۱۹۷۸ باقی ماند تا این که در این سال راسیاس [3] تعمیمی از قضیه هایرز را بیان کرد که در این تعمیم، تفاضل کوشی $f(x+y) - f(x) - f(y)$ بی کران بود. کرانی که راسیاس برای تفاضل کوشی در نظر گرفت به صورت $\epsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ بود که در آن p عدد ثابتی است و $0 < p < 1$. در سال ۱۹۹۴، گاوراتا [4] تعمیم کلی‌تری از قضیه راسیاس را فراهم کرد که در آن، تفاضل کوشی، تابع کنترلی $\varphi(x, y)$ بود.

[1] Hyers
[2] Aoki
[3] Rassias
[4] Gavruta

مساله پایداری چندین معادله تابعی از قبیل معادله تابعی کوشی [۱]، معادله ینسن [۲]، معادله درجه دوم [۳]، معادله درجه سوم [۴]، همریختی‌ها، مشتق گیری‌ها و نتایج پکسیدر شده [۵] با دامنه و برد کلی توسط ریاضی‌دانان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است.

اولین نتیجه در پایداری معادله ینسن توسط کومینک [۶] بدست آمد و اولین کسی که مساله پایداری روی دامنه‌ی محدود را بررسی کرد، اسکوف [۷] بود. پایداری معادله ینسن توسط ریاضی‌دانان زیادی تعمیم داده شده است.

به طور کلی پایداری معادلات تابعی [۸] در فضاهای مختلف مورد توجه بوده است، که در این زمینه به عنوان نمونه به فضای غیرارشمیدسی [۹]، فضای نرم‌دار فازی [۱۰]، فضای نرم‌دار فازی غیرارشمیدسی [۱۱] می‌توان اشاره کرد.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است:

در فصل اول مفاهیم مقدماتی پایداری معادلات تابعی کوشی و ینسن را بیان می‌کنیم و هم‌چنین با تعریف فضای غیرارشمیدسی و ویژگی‌های آن، پایداری معادله تابعی کوشی را در این فضا اثبات می‌کنیم. در فصل دوم با استفاده از تعریف فضای نرم‌دار فازی، پایداری معادلات تابعی کوشی و ینسن در مفهوم فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم در مورد پایداری این دو معادله در فضای نرم‌دار فازی غیرارشمیدسی و نتایج پکسیدر

[۱] Cauchy function
[۲] Jensen equation
[۳] Quadratic equation
[۴] Cubic equation
[۵] Pexiderized
[۶] Kominek
[۷] Skof
[۸] Functional equations
[۹] Non-Archimedean space
[۱۰] Fuzzy normed space
[۱۱] Non-Archimedean fuzzy normed space

شده آن‌ها بحث می‌کنیم.

شایان ذکر است کارهای این پایان‌نامه بر اساس مقاله

A. K. Mirmostafaee, M. S. Moslehian, Stability of additive mappings in non-Archimedean fuzzy normed spaces, Fuzzy Sets System 160 (2009) 1643-1652.

نوشته شده است.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

این فصل از پایان‌نامه، مروری بر منابع ذکر شده و بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌باشد. بنابراین در ابتدا چارچوب بحث را مشخص کرده و سپس مفاهیم مرتبط را تعریف می‌کنیم. مفاهیم و قضایای اولیه بدون اثبات بیان خواهند شد چرا که هدف، یادآوری مفاهیم است.

۱.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری یا فضای خطی، مجموعه‌ای مانند V است، که عناصرش را بردار نامند و در آن دو عمل جمع و ضرب اسکالر با ویژگی‌های زیر تعریف شده‌اند :

۱) به هر جفت بردار x و y بردار $x+y$ چنان نظیر است که $x+y=y+x$ و $x+(y+z)=(x+y)+z$؛

V شامل بردار منحصر به فرد صفر است به طوری که برای هر $x \in V$، $x+0=x$؛ و به هر $x \in V$ بردار منحصر به فرد $-x$ چنان نظیر است که $x+(-x)=0$.

۲) به هر جفت (α, x) که $x \in V$ و α اسکالر است، بردار αx چنان نظیر است که $1x=x$

و $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ و دو قانون بخش‌پذیری $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ و $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ برقرارند.

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری حقیقی یا مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار گوییم هرگاه به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$، چنان مربوط شده باشد که:

۱) به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\|x+y\| \leqq \|x\| + \|y\|.$$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد آنگاه:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

۳) $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

تعریف ۳.۱.۱. فضای نرم‌دار X را فضای باناخ [۱] گوییم، هرگاه نسبت به متر تولید شده توسط نرم، کامل باشد. به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱. تابع $F : \overline{\mathbb{R}} \to [۰, ۱]$ که یکنوای صعودی و پیوسته چپ روی $\mathbb{R}$ باشد و هم‌چنین $F(-\infty) = ۰$ و $F(+\infty) = ۱$ را تابع توزیع [۲] گوییم. مجموعه‌ی همه توابع توزیع را با Δ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱. زیر مجموعه‌ای از توابع توزیع که $F(۰) = ۰$ باشد را تابع توزیع مسافت [۳] گوییم و با Δ^+ نشان

[۱] Banach space
[۲] Distribution function
[۳] Distance distribution function

می‌دهیم. عضو ماکسیمال Δ^+ را برای $x \in \mathbb{R}$ به صورت

$$\epsilon_0(x) := \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

می‌باشد.

تعریف ۶.۱.۱. تابع مثلث [۱] $\tau : \Delta^+ \times \Delta^+ \to \Delta^+$ عمل دوتایی روی Δ^+ است، که شرکت‌پذیر، جابجایی پذیر، یکنوای صعودی باشد و ε_0 را به عنوان بردار یکه داشته باشد. بنابراین برای هر $F, G, H \in \Delta^+$،

۱) $\tau\big(\tau(F,G), H\big) = \tau\big(F, \tau(G,H)\big)$.

۲) $\tau(F,G) = \tau(G,F)$.

۳) اگر $F \leqslant G$ آنگاه $\tau(F,H) \leqslant \tau(G,H)$.

۴) $\tau(F, \varepsilon_0) = F$.

تعریف ۷.۱.۱. فضای نرم‌دار احتمالی [۲] ، سه تایی (V, N, τ) می‌باشد، که V فضای برداری، τ تابع مثلث پیوسته و N نرم احتمالی، $N : V \to \Delta^+$ است که

(N_1) $N(p) = \varepsilon_0$ اگر و تنها اگر $p = \theta$ و θ بردار صفر در V می‌باشد،

(N_2) $N(-p) = N(p)$ برای $p \in V$,

(N_3) $N(p+q) \geq \tau\{(N(p), N(q)\}$ برای $p, q \in V$.

[۱] Triangle function
[۲] Probabilistic normed space

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم X و Y فضای برداری باشند، نگاشت $A : X \longrightarrow Y$ جمعی نامیده می‌شود اگر برای $x_1, x_2 \in X$ در معادله تابعی جمعی،

$$A(x_1 + x_2) - A(x_1) - A(x_2) = 0, \qquad (1.1)$$

صدق کند. معادله تابعی جمعی (۱.۱) برای $x = x_1 + x_2$ و $y = x_1 - x_2$ با معادله‌ی،

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(A(x) + A(y)),$$

معادل است.

۲.۱ پایداری معادلات تابعی

در سال‌های اخیر، بررسی پایداری معادلات تابعی یکی از موضوعات به روز و مورد توجه بوده است و به دلیل کاربرد فراوان آن در بسیاری از علوم از جمله تئوری اقتصاد، فیزیک و علوم اجتماعی و رفتاری، بسیاری از ریاضی‌دانان به مطالعه و تحقیق در این زمینه گرایش پیدا کرده‌اند. هم‌چنین در این زمینه چندین کتاب [۱۰، ۱۳] نوشته شده است، که می‌تواند منبع مناسبی برای تحقیق و پژوهش باشد.

در این بخش به اختصار مطالبی راجع به معادلات تابعی بیان می‌کنیم و سیر تحولات را در این زمینه مورد بررسی قرار می‌دهیم. هم‌چنین به بیان قضایای مهم و اساسی مطرح شده در زمینه معادلات تابعی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید S و B به ترتیب نیم‌گروه و فضای باناخ و $f : S \to B$ تابع باشد. معادله

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (2.1)$$

برای زوج (S,B) پایدار است؛ هرگاه خاصیت زیر برقرار باشد:

برای هر $\epsilon > 0$، $\delta \geqslant 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که اگر برای هر $x,y \in S$،

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leqslant \delta \qquad (x,y \in S), \tag{۳.۱}$$

آنگاه جواب A از معادله (۲.۱) موجود باشد به طوری که برای هر $x \in S$ داشته باشیم:

$$\|f(x)-A(x)\| \leqslant \epsilon. \tag{۴.۱}$$

تنها خاصیت B که مورد استفاده قرار می‌گیرد خاصیت کامل بودن آن است. به طور دقیق‌تر اگر B_1 و B_2 فضاهای باناخ باشند، آنگاه معادله (۳.۱) برای (S,B_1) پایدار است اگر و تنها اگر برای (S,B_2) پایدار باشد. بنابراین به طور خلاصه معادله (۳.۱) برای هر نیم گروه S پایدار می‌باشد.

نقطه شروع مسئله پایداری معادلات تابعی به سوال اولام در مورد پایداری همریختی‌های گروه برمی‌گردد. در سال ۱۹۴۰ اولام در یک سخنرانی در دانشگاه ویسکانسین [1] در مورد تعدادی مسائل مهم حل نشده بحث کرد. در بین آن‌ها سوال زیر، در مورد پایداری همریختی‌ها به چشم می‌خورد:

تابع $f: G_1 \longrightarrow G_2$ را در نظر بگیرید که در آن G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ باشد. آیا برای $\epsilon > 0$ می‌توان $\delta > 0$ ای پیدا کرد به گونه‌ای که اگر برای $x,y \in G_1$، داشته باشیم:

$$d\big(f(xy), f(x)f(y)\big) < \delta,$$

[1] Wisconsin

آنگاه یک همریختی $h : G_1 \longrightarrow G_2$ وجود داشته باشد به طوری که

$$d\big(h(x), f(x)\big) < \epsilon?$$

به عبارت دیگر اگر یک نگاشت تقریبا هومومورفیسم باشد، آیا می‌توان یک هومومورفیسم حتی‌المقدور نزدیک به آن پیدا کرد؟

در صورت مثبت بودن جواب، معادله $h(x, y) = h(x).h(y)$ همریختی پایدار خواهد بود.

۱.۲.۱ معادله تابعی کوشی

تعریف ۲.۲.۱. معادله تابعی $f(x + y) = f(x) + f(y)$ را معادله کوشی [۱] یا جمعی و هر جواب این معادله را نگاشت جمعی [۲] می‌نامیم. واضح است تابع حقیقی $f(x) = x$، یک جواب این معادله می‌باشد.

معادله کوشی مهم‌ترین معادله در مطالعه پایداری معادلات تابعی است و می‌توان گفت سابقه‌ای برابر سابقه‌ی مسئله پایداری هایرز -اولام-راسیاس معادلات تابعی دارد و هر تحولی در رابطه با پایداری، تقریبا اولین بار در مورد این معادله اتفاق می‌افتد. به همین دلیل سیر تحولی پایداری معادلات تابعی را از طریق معادله کوشی بیان می‌کنیم:

همان‌طور که قبلا اشاره شد هایرز [۳] اولین کسی بود که پایداری معادله کوشی را ثابت کرد. قضیه‌ی وی به این صورت می‌باشد:

[۱] Cauchy equation
[۲] Additive mapping
[۳] Hyers

قضیه ۳.۲.۱. (هایرز) فرض کنیم $E_۱$ و $E_۲$ به ترتیب فضاهای نرمدار و باناخ و δ مقداری مثبت باشد. هم‌چنین نگاشت $f : E_۱ \longrightarrow E_۲$ برای هر $x, y \in E_۱$ در رابطه (تفاضل کوشی)،

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| < \delta,$$

صدق کند. در این صورت حد

$$\alpha(x) = \lim_{n\to\infty} ۲^{-n} f(۲^n x),$$

وجود دارد و $\alpha : E_۱ \longrightarrow E_۲$ تنها تابع جمعی است که برای هر $x \in E_۱$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\big\|f(x) - \alpha(x)\big\| < \delta.$$

علاوه بر این اگر نگاشت $f(tx)$ برای هر $x \in E_۱$ در t پیوسته باشد آنگاه α نگاشت خطی است.

برهان. به مرجع [۹] مراجعه شود. □

سوال اولام و نتیجه هایرز پایه‌ای برای معرفی نظریه پایداری معادلات تابعی به مفهوم هایرز-اولام شد. با توجه به قضیه‌ی قبل، معادله $f(x+y) = f(x) + f(y)$ در $(E_۱, E_۲)$ پایداری هایرز-اولام دارد، هرگاه برای هر $f : E_۱ \longrightarrow E_۲$ که در نامساوی

$$\big\|f(x+y) - f(x) - f(y)\big\| < \delta,$$

صدق می‌کند، نگاشت جمعی $\alpha : E_۱ \longrightarrow E_۲$ چنان موجود باشد که $f - \alpha$ روی $E_۱$ کران‌دار باشد.

درسال ۱۹۵۰، آئوکی وجود عملگر جمعی منحصر به فرد را ثابت کرد و هم‌چنین مدعی شد که وجود نگاشت

خطی منحصر به فرد، امکان پذیر نیست.

در سال ۱۹۷۸، راسیاس مفهوم تفاضل کوشی نامتناهی را معرفی کرد و قضیه‌ی هایرز را در چارچوبی کلی‌تر تعمیم داد. این کار تاثیر شگرفی در نظریه پایداری معادلات تابعی داشت و سبب تعریف مفهوم جدیدی به نام پایداری هایرز-اولام-راسیاس شد. قضیه راسیاس به صورت زیر می‌باشد:

قضیه ۴.۲.۱. (راسیاس) فرض کنید $\delta \geqslant 0$ و $0 \leqslant p < 1$ مقادیر ثابتی باشند، هم‌چنین $f : E_1 \longrightarrow E_2$ که E_1 و E_2 فضاهای باناخ هستند، به ازای هر $x, y \in E_1$ در رابطه (تفاضل کوشی نامتناهی)،

$$\left\|f(x+y) - f(x) - f(y)\right\| \leqslant \delta(\|x\|^p + \|y\|^p),$$

صدق کند. در این صورت $T : E_1 \longrightarrow E_2$ نگاشت جمعی منحصر به فردی است که برای هر $x \in E_1$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\left\|f(x) - T(x)\right\| \leqslant \frac{2\delta}{2 - 2^p}\|x\|^p.$$

علاوه بر این اگر $f(tx)$ برای هر $x \in E_1$ در t پیوسته باشد آنگاه T خطی است.

برهان. به مرجع [۳۵] مراجعه شود. $\square$

در سال ۱۹۹۴ گاوراتا تعمیم دیگری از قضیه راسیاس را فراهم کرد که در آن تفاضل کوشی، تابع کنترلی $\varphi(x, y)$ بود. قضیه‌ی گاوراتا به شکل زیر است: