دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان‌نامه:

روش‌های عددی برای حل مسایل دیفرانسیل جزیی تأخیری از نوع سهموی

پایان‌نامه برای دریافت کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

نگارش:

معصوم فرهادی

استاد راهنما:

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور:

دکتر فهیمه سلطانیان

3 تیرماه **1393**

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

شماره: ....
تاریخ: ....
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور
دانشگاه پیام نور استان تهران

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری
مرکز تهران شرق

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع ازپایان نامه کارشناسی ارشد: *خانم معصوم فرهادی*

دانشجوی رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی: ۹۰۰۱۰۶۸۳۸

تحت عنوان:

روش های عددی برای حل مسایل دیفرانسیل جزئی تاخیری از نوع سهموی

جلسه دفاع با حضور داوران نامبرده ذیل در روز : سه شنبه مورخ : ۱۳۹۳/۰۴/۰۳ ساعت: ۱۴-۱۳ محل مرکز تهران شرق برگزار شد. و پس از بررسی پایان‌نامه مذکور با نمره به عدد.......۱۸ به حروف هیجده...... و با درجه ارزشیابی بسیار خوب......مورد قبول واقع شد ☑ نشد ☐

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه/ موسسه	امضاء
۱	دکتر علي ذاکري	استاد راهنما	استاديار	دانشگاه خواجه نصير طوسي	
۲	دکتر فهیمه سلطانیان	استاد مشاور	استاديار	پیام نور	
۳	دکترعظیم امین عطایي	استاد داور	دانشيار	دانشگاه خواجه نصير طوسي	
۴	دکترخدیجه احمدي آملي	نماینده علمي گروه/ نماینده تحصیلات تکمیلي	استاديار	پیام نور	

تهران ، حکیمه (سازمان آب)، بلوار شهید بابائیان، پانزده متری شیرازی ، پلاک۳ ، دانشگاه پیام نور استان تهران ، مرکز تهران شرق
تلفن : ۷۷۳۱۱۲۸۶
دورنگار: ۷۷۳۱۲۷۱۶
Tshargh.Tpnu.ac.ir
Tshargh@Tpnu.ac.ir

نیایش

خدایا! تویی سزاوار ستایش‌های نیکو، و بسیار و بی‌شمار تو را ستودن، اگر تو را آرزو کنند پس بهترین آرزویی، و اگر به تو امید بندند، بهترین امیدی.

خدایا! درهای نعمت بر من گشودی که زبان به مدح غیر تو نگشایم، و بر این نعمت‌ها غیر از تو را ستایش نکنم، و زبان را در مدح نومیدکنندگان، و آنان که مورد اعتماد نیستند باز نکنم. خداوندا ! هر ثناگویی از سوی ستایش شده پاداشی دارد، به تو امید بستم که مرا به سوی ذخائر رحمت و گنج‌های آمرزش آشنا کنی.

خدایا! این بنده‌ی توست که تو را یگانه می‌خواند، و توحید و یگانگی تو را سزاست، و جز تو کسی را سزاوار این ستایش‌ها نمی‌داند.

خدایا ! مرا به درگاه تو نیازی است که جز فضل تو جبران نکند، و آن نیازمندی را جز عطا و بخشش تو مبدل نگرداند، پس در این مقام رضای خود را به ما عطا فرما، و دست نیاز ما را از دامن غیر خود کوتاه گردان، که ""**تو بر هر چیز توانایی**""

نهج‌البلاغه- خطبه **91**

سپاس‌گذاری ...

سپاس خداوندی را سزاست که از شباهت داشتن به پدیده‌ها، برتر و از توصیف وصف کنندگان، والاتر است. با تدبیر شگفتی آورش، بر همه‌ی بینندگان آشکار، و با بزرگی عزتش، بر همه‌ی فکرهای اندیشمندان پنهان است.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم، از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر علی ذاکری کمال تشکر را داشته باشم.

از مشاور محترم سرکار خانم دکتر فهیمه سلطانیان، مدیر گروه گرامی سرکار خانم دکتر خدیجه احمدی آملی و داور ارجمند جناب آقای دکتر عظیم امین عطایی قدر دانی می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا به بیان صورت کلی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی پرداخته (ر.ک. [**1**و**2**]) و شرایط وجود و یکتایی جواب برای آنها را بیان می‌کنیم. سپس انواع معادلات دیفرانسیل تأخیری معرفی شده (ر.ک. [**3**]) و برخی روش‌های عددی حل آنها از قبیل روش‌های تک گامی رونگه – کوتا و روش‌های چندگامی مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از آن معادلات دیفرانسیل جزیی غیرخطی تأخیری از نوع سهموی (ر.ک. [**6**]) ارائه می‌گردد.

در بخش اول برای اثبات وجود [**8**]، معادله‌ی دیفرانسیل را به یک معادله تابعی معمولی به صورت $\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + F(u_t)$ تبدیل می‌کنیم، به قسمی که $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ به عنـــوان عملگر بی‌نهایت کوچک A از نیم‌گروه قویاً پیوسته از عملگرهای خطی $T(t)$ ، $t \geq 0$ در فضای باناخ X در نظر گرفته می‌شود و جمله منبع به فرم فشرده F تبدیل می‌گردد. لذا در بخش دوم با استفاده از روش تابع پایه شعاعی مبادرت به حل معادله دیفرانسیل سهموی تأخیری مورد نظر می‌پردازیم. در فصل آخر نتایج عددی با استفاده از برنامه‌نویسی رایانه‌ای ارائه و مقادیر خروجی با جواب واقعی مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

کلیدواژه:

معادلات دیفرانسیل جزیی تأخیری از نوع سهموی، معادلات دیفرانسیل تابعی معمولی و جزیی، معادلات دیفرانسیل تأخیری، نیم‌گروه‌ها، روش رونگه -کوتا، روش چندگامی، روش تابع پایه شعاعی و روش کانسا.

فهرست مطالب

۱

مبانی معادلات دیفرانسیل تأخیری

۱-۱ معادلات دیفرانسیل معمولی[۱]

اغلب موضوعاتی که در زندگی روزانه با آن سروکار داریم از جمله فیزیک، زیست شناسی، پزشکی و... نمونه‌هایی از مسئله‌ی مقدار اولیه هستند. یک مسئله‌ی مقدار اولیه در فضای یک بعدی به همراه شرط اولیه در زیر ارائه می‌گردد:

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_\circ) = \mathbf{x}_\circ \end{cases} \tag{۱-۱}$$

فرض کنید $\mathbf{f}$ و $\mathbf{x}$ توابع پیوسته باشند، به طوری‌که $\mathbf{f}$ بر مجموعه‌ی $D = \{ (t, \mathbf{x}(t)) \mid t \in (\alpha_1, \beta_1), x(t) \in (\gamma_1, \delta_1) \}$ تعریف می‌شود. آنگاه $\mathbf{x}$ یک جواب از مسئله‌ی (۱-۱) در $J = (\alpha_1, \beta_1)$ خواهد بود، اگر و فقط اگر در معادله انتگرال زیر صدق کند:

[۱] Ordinary differential equations

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_{\circ}+\int_{t_{\circ}}^{t}\mathbf{f}\big(s,\mathbf{x}(s)\big)\,ds. \qquad (۲-۱)$$

معادله‌ی (۱-۱) **اسکالر**[۲] نامیده می‌شود، اگر تابع $\mathbf{f}$ شامل یک تابع مجهول باشد.

نماد گذاری برای نمایش مشتق روی عناصر t و ξ در معادله اسکالر $\mathbf{f}(t,\xi)$ از عبارت D_1 و D_2 استفاده می‌گردد. D_1 و D_2 به ترتیب نشان دهنده‌ی مشتق نسبت به مؤلفه‌ی اول t و مشتق نسبت به مؤلفه‌ی دوم ξ می‌باشد. به عنوان مثال

$$D_2\mathbf{f}(t,\xi)=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\xi}(t,\xi)$$

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنید $A\subset\mathbb{R}^2$ باشد، آنگاه تابع $\mathbf{f}$ در شرط لیپشیتز روی A صدق می‌کند هرگاه ثابتی مانند $k>\circ$ وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای $(t,\xi),(t,\tilde{\xi})\in A$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left|\mathbf{f}(\mathrm{t},\xi)-\mathbf{f}(\mathrm{t},\tilde{\xi})\right|\le \mathrm{K}\left|\xi-\tilde{\xi}\right| \qquad (۳-۱)$$

که در آن K به عنوان ثابت لیپشیتز[۳] معرفی می‌گردد.

تعریف ۱-۱-۲ یک مسئله را خوش‌وضع گوییم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

الف) دارای جواب[۴] باشد.

[۲] Scalar equations

[۳] Lipschitz Constant

[۴] Existence

ب) جواب آن یکتا[۵] باشد.

ج) جواب روی داده‌ها پایدار[۶] باشد.

اگر حداقل یکی از شرایط فوق برقرار نباشدآنگاه مسئله را بدوضع گوییم.

۱-۲ دستگاه معادلات[۷]

یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی شامل n-معادله‌ی مرتبه اول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1' &= \mathbf{f}_1\left(t,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\right),\\ &\vdots\\ \mathbf{x}_n' &= \mathbf{f}_n\left(t,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\right),\end{aligned}$$

که هر یک از این معادلات شامل n-تابع مجهول $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ می‌باشد.

صورت کلی دستگاه معادلات شامل n- معادله‌ی مرتبه اول به صورت فوق را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{f}_i\left(t,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n\right),\quad i=1,\ldots,n, \tag{۱-۴}$$

$\mathbf{f}_i$ ها به ازای $i=1,\ldots,n$؛ تابعی حقیقی مقدار می‌باشد که مرتبط با مجموعه‌ی باز $D\subset\mathbb{R}^{1+n}$ است.

مجموعه‌ی باز D به صورت مستطیل باز $D=(\alpha,\beta)\times(\gamma_1,\delta_1)\times\ldots\times(\gamma_n,\delta_n)$ در نظر گرفته می‌شود.

---

[۵] Uniqueness

[۶] Stable

[۷] System of equations

و n– تا شرط اولیه به صورت زیر معرفی می گردد:

$$\mathbf{x}_i\left(t_\circ\right)=\mathbf{x}_{\circ i}, \quad i=1,\ldots,n, \tag{۱–۵}$$

به طوری که $\left(t_\circ, \mathbf{x}_{\circ 1},\ldots,\mathbf{x}_{\circ n}\right)$ یک نقطه در مجموعه‌ی D می‌باشد.

اکنون با استفاده از نمادگذاری برداری در (ر.ک.[۱و۲])، دستگاه (۱–۴) به صورت فشرده

$$\mathbf{x}'=\mathbf{f}\left(t,\mathbf{x}\right). \tag{۱–۶}$$

و شرط اولیه (۱–۵) به صورت زیر تبدیل می گردد:

$$\mathbf{x}\left(t_\circ\right)=\mathbf{x}_\circ. \tag{۱–۷}$$

کـه در آن توابـع $\mathbf{x}_\circ$ ، $\mathbf{x}(t)$ ، $\mathbf{x}'(t)$ و $\mathbf{f}\,(t,\mathbf{x})$ مـرتبط بـا بردارهـای سـتونی در $\mathbb{R}^n$ خواهنـد بـود، بـه طوری که:

$$\mathbf{x}_\circ=\left(\mathbf{x}_{\circ 1},\ldots,\mathbf{x}_{\circ n}\right)^T.$$

$$\mathbf{x}(t)=\left(\mathbf{x}_1\left(t_\circ\right),\ldots,\mathbf{x}_n\left(t_\circ\right)\right)^T.$$

$$\mathbf{x}'(t)=\left(\mathbf{x}_1{}',\ldots,\mathbf{x}_n{}'\right)^T.$$

$$\mathbf{f}_i(t,\xi)=\left(\mathbf{f}_1(t,\xi),\ldots,\mathbf{f}_n(t,\xi)\right)^T, \quad \xi=\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right), \quad i=1,\ldots,n.$$

در ایـن صـورت $\mathbf{x}$ یـک جـواب از معادلـه‌ی (۱–۶) و (۱–۷) خواهـد بـود، اگـر و فقـط اگـر در معادلـه انتگـرال زیر صدق کند:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\circ + \int_{t_\circ}^{t} \mathbf{f}\left(s,\mathbf{x}(s)\right)ds \tag{۱–۸}$$

قضیه ۱-۲-۱ فرض کنید دنباله تابع پیوسته $g_L : J = (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ به طور یکنواخت به تابع $g : J \to \mathbb{R}$ همگرا باشد. در این صورت:

۱) g در J پیوسته است.

۲) اگر $J = [\alpha, \beta]$ ، آنگاه $\int_\alpha^\beta g(t)\, dt = \lim_{L \to \infty} \int_\alpha^\beta g_L(t)\, dt$.

قضیه ۱-۲-۲ فرض کنید A یک مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}^n$ و تابع پیوسته $\mathbf{f} : A \to \mathbb{R}$ مفروض باشد. در این صورت $\mathbf{f}$ در مجموعه A کراندار و به طور یکنواخت پیوسته خواهد بود.

لم ۱-۲-۱ اگر ξ یک بردار در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه نرم ξ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\| \xi \| = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i| = |\xi_1| + \ldots + |\xi_n|. \qquad (۱-۹)$$

تعریف ۱-۲-۱ تابع $\mathbf{f} : J \times D^m \to \mathbb{R}^n$ ($D, J = (\alpha, \beta)$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد) **لیپشیتز موضعی**[۸] گفته می‌شود، اگر به ازای $(t, \boldsymbol{\eta}_{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{(m)}) \in J \times D^m$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$A_j = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : \| \xi - \boldsymbol{\eta}_{(j)} \| \le b \right\}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

که در آن $a > ۰$، $b > ۰$ و A_j به عنوان زیر مجموعه‌ای از D مفروض‌اند. در این صورت $\mathbf{f}$ در مجموعه‌ی $([t-a, t+a] \cap J) \times A_1 \times \ldots \times A_m$ لیپشیتز می‌باشد.

قضیه ۱-۲-۳ اگر $\mathbf{x}$ یک تابع برداری روی $[a, b]$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:

---
۸ Local Lipschitz

$$\left\| \int_a^b x(s)ds \right\| \leq \int_a^b \| x(s) \| ds. \tag{۱۰-۱}$$

اثبات با استفاده از لم (۱-۲-۱) خواهیم داشت:

$$\left\| \int_a^b x(s)\ ds \right\| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int_a^b x_i(s)ds \right| \leq$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left| x_i(s)ds \right| = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left| x_i(s) \right| = \int_a^b x_i(s)ds. \ \square$$

لـم ۱-۲-۲ فـرض کنیـد $A \subset \mathbb{R}^{1+n}$ باشـد. آنگـاه فـرم فشـرده $\mathbf{f}$ در شـرط لیپشـیتز روی A صـدق مـی‌کنـد، هرگـاه ثـابتیماننـد $K > ۰$ وجـود داشـته باشـد بـه‌طـوری‌کـه بـه ازای هـر $(t,\tilde{\xi}),(t,\xi) \in A$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left\| \mathbf{f}(t,\xi) - \mathbf{f}(t,\tilde{\xi}) \right\| \leq K \left\| \xi - \tilde{\xi} \right\|. \tag{۱۱-۱}$$

اثبات فـرض کنیـد A یـک مسـتطیل $(n+1)-$ بعـدی کرانـدار بسته باشـد کـه بـه صـورت زیـر معرفـی مـی‌گردد:

$$\left(A = \left[\bar{\alpha}, \bar{\beta} \right] \times \left[\bar{\gamma}_1, \bar{\delta}_1 \right] \times \ldots \times \left[\bar{\gamma}_n, \bar{\delta}_n \right] \right) \subset D$$

با استفاده از قضیه‌ی مقدار میانگین رابطه زیر برقرار است:

$$\mathbf{f}_i(t,\xi) - \mathbf{f}_i(t,\tilde{\xi}) = \sum_{j=1}^{n} \left(D_{1+j} \mathbf{f}_i \right)(t,\theta) \left(\xi_j - \tilde{\xi}_j \right).$$

به طوری که $(t,\tilde{\xi}),(t,\xi) \in A$ و $(t,\theta) \in A$ در نظر گرفته می‌شود.

بـا اسـتفاده از قضـیه (۱-۲-۲) کـران دار بـودن توابـع پیوسـته $\left(D_{1+j}\,\mathbf{f_i}\right)$ روی مجموعـه A نتیجـه مـی-شود. لذا B به عنوان بزرگترین کران $\left|D_{1+j}\,\mathbf{f}_i\right|$ به‌ازای $i,j=1,\ldots,n$ ؛ معرفی می‌گردد:

$$\left|\mathbf{f}_i(t,\xi)-\mathbf{f}_i\left(t,\tilde{\xi}\right)\right|\le\sum_{j=1}^{n}B\left|\xi_j-\tilde{\xi}_j\right|=B\left\|\xi-\tilde{\xi}\right\|.$$

و در آخر

$$\left\|\mathbf{f}(t,\xi)-\mathbf{f}\left(t,\tilde{\xi}\right)\right\|\le nB\left\|\xi-\tilde{\xi}\right\|.$$

با فرض $K=nB$ رابطه (۱-۱۱) حاصل می‌گردد (ر.ک.[۱]) .

لم ۱-۲-۳ رابطه‌ی زیر

$$\left|\mathbf{x}(t)-\tilde{\mathbf{x}}(t)\right|\le K\left|\int_{t_\circ}^{t}\left|\mathbf{x}(s)-\tilde{\mathbf{x}}(s)\right|\right|. \qquad (۱-۱۲)$$

به ازای $t\in\left(\alpha_1,\beta_1\right)$ مفروض است. در این صورت $\mathbf{x}(t)=\tilde{\mathbf{x}}(t)$ نتیجه می‌شود.

اثبات

الـف: فـرض کنیـد $\mathbf{Q}(t)=K\int_{t_\circ}^{t}\left|\mathbf{x}(s)-\tilde{\mathbf{x}}(s)\right|ds$ بـه ازای $t_\circ\le t<\beta_1$ مفـروض باشـد. در این صورت نامساوی (۱-۱۲) به نامساوی زیر تبدیل می‌گردد:

$$\mathbf{Q}'(t)=K\left|\mathbf{x}(t)-\tilde{\mathbf{x}}(t)\right|\le K\,\mathbf{Q}(t). \qquad (۱-۱۳)$$

بـه طـوری کـه $\mathbf{Q}(t_\circ)=\circ$ اسـت. بـا حـل نامعادلـه دیفرانسـیل مرتبـه اول (۱-۱۳) و ضـرب فـاکتور انتگرال‌گیری e^{-Kt} رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{Q}(t)e^{-Kt}\right] \leq \circ. \qquad (۱۴-۱)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۱۴) در بازه‌ی $t_\circ$ تا t خواهیم داشت:

$$\mathbf{Q}(t)\, e^{-Kt} - \mathbf{Q}(t_\circ)\, e^{-Kt_\circ} \leq \circ. \qquad (۱۵-۱)$$

با اعمال $\mathbf{Q}(t_\circ) = \circ$ و $\mathbf{Q}(t) \geq \circ$ عبارت $\mathbf{Q}(t) = \circ$ نتیجه می‌شود. با جایگذاری مقدار به دست آمده برای $\mathbf{Q}(t)$ در نامساوی (۱-۱۲) خواهیم داشت:

$$\left|\,\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\right| \leq \mathbf{Q}(t) = \circ, \quad t_\circ \leq t < \beta_1,$$

در این صورت عبارت $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$ به ازای $t_\circ \leq t < \beta_1$ حاصل می‌گردد.

ب: تساوی $\mathbf{Q}(t) = K\int_{t_\circ}^{t}\left|\,\mathbf{x}(s) - \tilde{\mathbf{x}}(s)\right|\, ds$ به ازای $\alpha_1 \leq t < t_\circ$ مفروض است. در این صورت نامساوی (۱-۱۲) به نامساوی زیر تبدیل می‌گردد:

$$\mathbf{Q}'(t) = K\left|\,\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)\right| \leq -K\,\mathbf{Q}(t)\ . \qquad (۱۶-۱)$$

به طوری که $\mathbf{Q}(t_\circ) = \circ$ است. با حل نامعادله دیفرانسیل مرتبه اول (۱-۱۶) و ضرب فاکتور انتگرال‌ساز e^{Kt} رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{Q}(t)\, e^{Kt}\right] \leq \circ\ . \qquad (۱۷-۱)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۱-۱۷) در بازه‌ی $t_\circ$ تا t خواهیم داشت:

$$\mathbf{Q}(t_\circ)e^{Kt_\circ} - \mathbf{Q}(t)e^{Kt} \leq \circ\ . \qquad (۱۸-۱)$$

بـا اعمـال $\mathbf{Q}(t_\circ)=\circ$ و $\mathbf{Q}(t)\le\circ$ عبـارت $\mathbf{Q}(t)=\circ$ نتیجـه مـی‌شـود. بـا جایگـذاری مقـدار بـه دسـت آمده برای $\mathbf{Q}(t)$ در نامساوی (۱-۱۲) خواهیم داشت:

$$\left|\mathbf{x}(t)-\tilde{\mathbf{x}}(t)\right|\le \mathbf{Q}(t)=\circ,\quad \alpha_1\le t<t_\circ,$$

در این صورت عبارت $\mathbf{x}(t)=\tilde{\mathbf{x}}(t)$ به ازای $\alpha_1\le t<t_\circ$ حاصل می گردد (ر.ک. [۱]) .

لـم ۱-۲-۴ (لـم ریـد[۹]) تـابع پیوسـته $\mathbf{V}$ تحـت نگاشـت $J\to[\circ,\infty)$، تـابع پیوسـته نـامنفی K در فاصـله J و ثابت C مفروض است. در این صورت اگر

$$\mathbf{V}(t)\le C+\left|\int_{t_\circ}^{t}K(s)\mathbf{V}(s)dV\right|,\quad t\in J \tag{۱-۱۹}$$

برقرار باشد، آنگاه از (۱-۱۹) رابطه زیر نتیجه خواهد شد:

$$\mathbf{V}(t)\le Ce^{\left|\int_{t_\circ}^{t}K(s)ds\right|},\quad t\in J$$

تذکر با انتخاب $C=\circ$، $K(s)=K$ و $\mathbf{V}(t)=\left|\mathbf{x}(t)-\tilde{\mathbf{x}}(t)\right|$ نامساوی (۱-۱۲) و نامساوی (۱-۱۹) هم ارزند (ر.ک. [۱]) .

قضـیه ۱-۲-۴ (یکتـایی) فـرض کنیـد تـابع $\mathbf{f}$ در مجموعـه‌ی D پیوسـته و در مسـتطیل $(n+1)-$ بعـدی بسـته و کرانـدار A در D لیپشـیتز باشـد. آنگـاه معادلـه‌ی (۱-۶) بـه همـراه شـرط اولیـه (۱-۷) در $D\ni(t_\circ,x_\circ)$ و به ازای $t_\circ\in J$ جواب یکتا دارد.

---

[۹] Reid Lemma

اثبات برهان خلف، فرض کنید معادله (۱-۶) در بازه‌ی $\left(t_\circ,\beta_1\right)$ دارای دو جواب پیوسته $\mathbf{x}$ و $\tilde{\mathbf{x}}$ باشد، به طوری که $\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}$ (اثبات برای $\left(\alpha_1,t_\circ\right)$ کاملا مشابه است). نقطه t_1 را به ازای $t_\circ<t<\beta_1$ در زیر تعریف می‌کنیم:

$$t_1=\inf\left\{t\in\left(t_\circ,\beta_1\right):\mathbf{x}(t)\neq\tilde{\mathbf{x}}(t)\right\}.$$

در این صورت با فرض پیوستگی $\mathbf{x}$ و $\tilde{\mathbf{x}}$ نقطه‌ی $\mathbf{x}\left(t_1\right)=\tilde{\mathbf{x}}\left(t_1\right)=\mathbf{x}$ در $t_1<\beta$ معرفی می‌گردد.

مستطیل $(n+1)$–بعدی کراندار بسته A به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\left(A=\left[t_1-a,t_1+a\right]\times\prod_{i=1}^{n}\left[x_{1i}-b,x_{1i}+b\right]\right)\subset D$$

مجموعه باز D_* روی مجموعه‌ی بسته‌ی A به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D_*=\left(t_1-a,t_1+a\right)\times\prod_{i=1}^{n}\left(\mathbf{x}_{1i}-b,\mathbf{x}_{1i}+b\right).$$

فرض کنید $\mathbf{x}$ و $\tilde{\mathbf{x}}$ هر دو جواب‌هایی باشند که از معادله (۱-۸) به دست آمده‌اند. در این صورت معادله‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_1+\int_{t_1}^{t}\mathbf{f}\left(s,\mathbf{x}(s)\right)ds. \qquad (۲۰-۱)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{x}_1+\int_{t_1}^{t}\mathbf{f}\left(s,\tilde{\mathbf{x}}(s)\right)ds. \qquad (۲۱-۱)$$

با تفاضل معادله‌های (۱-۲۰) و (۱-۲۱) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\mathbf{x}(t)-\tilde{\mathbf{x}}(t)=\int_{t_1}^{t}\left[\mathbf{f}\left(s,\mathbf{x}(s)\right)-\mathbf{f}\left(s,\tilde{\mathbf{x}}(s)\right)\right]ds. \qquad (۲۲-۱)$$

با استفاده از قضیه (۱-۲-۳) و لم (۱-۲-۲) به ازای $a > \circ$ $t \in J_* = \left(t_1 - a, t_1 + a\right)$ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) \right\| &\le \left| \int_{t_1}^{t} \left\| \mathbf{f}\left(s, \mathbf{x}(s)\right) - \mathbf{f}\left(s, \tilde{\mathbf{x}}(s)\right) \right\| ds \right| \\ &\le K \left| \int_{t_1}^{t} \left\| \mathbf{x}(s) - \tilde{\mathbf{x}}(s) \right\| ds \right|. \end{aligned} \tag{۱-۲۳}$$

اکنون از لم (۱-۲-۳) به ازای $t \in J_*$ نتیجه می‌شود $\left\| \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) \right\| = \circ$ یا $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t)$، که با تعریف t_1 تناقض دارد و از آن می‌توان یکتا بودن جواب را نتیجه گرفت (ر.ک. [۱]) .

قضیه ۱-۲-۵ (وجود) فرض کنید $\mathbf{f} : J \times D \to \mathbb{R}^n$ $(D, J = (\alpha, \beta))$ مجموعه‌ای باز در $\mathbb{R}^n$ است) تابعی پیوسته باشد و در شرط لیپشیتز موضعی صدق کند، آنگاه به ازای هر $\left(t_\circ, \mathbf{x}_\circ\right) \in J \times D$ وجود دارد $\Delta > \circ$ به‌طوری که معادله‌های (۱-۶) و(۱-۷) در بازه‌ی $\left(t_\circ - \Delta, t_\circ + \Delta\right)$ جواب یکتا دارد.

اثبات مجموعه‌ی بسته و کراندار $J_1 \times A$ به طوری که $\left(J_1 = \left[t_1 - a\, ,\, t_1 + a\right]\right) \in J$ و $\left(A = \left\{\xi \in \mathbb{R}^n : \left\| \xi - x_\circ \right\| \le b\right\}\right) \subseteq D$ مفروض‌اند. آنگاه تابع $\mathbf{f}$ در مجموعه‌ی $J_1 \times A$ در شرط لیپشیتز صدق می‌کند، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد:

$$\left\| \mathbf{f}\left(t, \xi\right) - \mathbf{f}\left(t, \tilde{\xi}\right) \right\| \le K \left\| \xi - \tilde{\xi} \right\|, \qquad \left(t, \xi\right), \left(t, \tilde{\xi}\right) \in J_1 \times A,$$

که در آن K ثابت لیپشیتز است.