بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شیراز

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

یک عملگر انتقال دو سویه طولپا که فرادوری ضعیف است.

توسط

زهرا بنی طالبی دهکردی

استاد راهنما

دکتر کریم هدایتیان

بهمن ماه ۱۳۸۷

به نام خدا

اظهار نامه

اینجانب زهرا بنی طالبی دهکردی (۸۵۰۴۰۹) دانشجوی رشته ی ریاضی محض گرایش آنالیز دانشکده علوم اظهارمی کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام . همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آیین نامه فکری و معنوی متعلق با دانشگاه شیراز است .

نام و نام خانوادگی : زهرا بنی طالبی دهکردی

تاریخ و امضا: ۱۳۸۸/۳/۱۳

به نام خدا

یک عملگر انتقال دو سویه طولپا که فرادوری ضعیف است.

به وسیله ی:

زهرا بنی طالبی دهکردی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی
از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:
ریاضی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر کریم هدایتیان، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر بهمن یوسفی، استاد ریاضی دانشگاه پیام نور شیراز..............................

دکترغلامحسین اسلام زاده، دانشیار بخش ریاضی ....

بهمن ماه ۱۳۸۷

تقدیم به

پدر و مادرم

سپاسگزاری

بر خود لازم می دانم از استاد عزیزم، دکتر هدایتیان بخاطر کمک‌های بی‌دریغ و راهنمایی‌های ارزشمندشان صمیمانه تشکر کنم.

از خانواده عزیزم، خصوصاً پدر و مادرم که در تمام مراحل زندگیم و تحصیل همواره یاریگر و مشوق من بوده‌اند نیز کمال تشکر را دارم.

از دکتر احمدی بخاطر درک مشکلات دانشجویان بخش ریاضی و حل آنها در حد توان، از پروفسور یوسفی و دکتر اسلام زاده بخاطر تشویق دانشجویان در کارهای علمی و از همه دوستان و عزیزانی که به هر نحو مرا در تکمیل این پایان‌نامه یاری رسانده‌اند صادقانه تشکر می‌کنم و آرزوی موفقیت روزافروزشان را از خداوند متعال خواستارم.

چکیده

یک عملگر انتقال دوسویه طولپا که فرادوری ضعیف است.

بوسیله‌ی:

زهرا بنی‌طالبی دهکردی

هدف از این رساله بررسی عملگری طولپا و فرادوری ضعیف است که در سال ۲۰۰۵ توسط ربکا سندرس در مقاله [۲۰] معرفی شد.

در فصل یک مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز آورده شده است. در فصل دوم که از مقاله [۶] گرفته شده است، نشان می دهیم هر عملگر ابردوری روی فضای هیلبرت شامل منیفلد خطی پایا و چگال است که عناصر ناصفرش ابردوری می‌باشند. به علاوه اگر تمام بردارهای ناصفر در فضای هیلبرت برای عملگر T ابردوری باشند آنگاه عملگر T زیرمجموعه پایای بسته و نابدیهی ندارد.

پس از معرفی عملگرهای ابردوری، ایده شرط کافی برای آن به ذهن می رسد. در فصل سوم که از مقاله [۱۲] گرفته شده است، محک ابردوری مهمترین ابزار برای کشف عملگرهای ابردوری و شرایط هم ارز آن آمده است.

فصل چهارم به بررسی عملگری طولپا و فرادوری ضعیف اختصاص دارد و از مقاله [۲۰] استفاده شده است.

فهرست

عنوان — صفحه

فصل ۱

آشنایی

۱ــآشنایی

در این فصل تعریف ها و قضیه‌هایی که در فصل‌های دیگر مورد نیاز است بیان می کنیم و از مراجع [۷]، [۱۴]، [۱۷] و [۱۸] استفاده شده است.

۱ــ۱ مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم، هر گاه به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که

آ) به ازای هر x, y در X، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$؛

پ) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب نماید.

بنابر (آ)، نامساوی مثلثی برقرار است :

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-x\| (x, y, z \in X)$$

این در تلفیق با (ب) (فرض $\alpha = -1, \alpha = 0$) و (پ) نشان می دهد که هر فضای خطی نرمدار را می توان یک فضای متری گرفت؛ فاصله بین x, y مساوی $\|x-y\|$ است.

تعریف ۲.۱. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرمدار است که با متر تعریف شده به وسیلهٔ نرمش تام باشد.

تعریف ۳.۱. فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی نامیم، اگر به هر جفت مرتب از بردارهای x, y در H یک عدد مختلط مانند $< x, y >$ به نام «حاصل ضرب داخلی» x, y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشند :

آ) اگر $x, y \in H$ و α, β اسکالر باشد، $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > +\beta < y, z >$؛

ب) اگر $x, y, z \in H$ و α, β اسکالر باشد، $< x, \alpha y + \beta z >= \overline{\alpha} < x, y > +\overline{\beta} < x, z >$؛

پ) $< x, x >\geq 0$؛

ت) $< y, x >= \overline{< x, y >}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است.)؛

ث) اگر $< x, x >= 0$ آنگاه $x = 0$.

اگر H فضای ضرب داخلی باشد می توان $||x||$، یعنی نرم بردار $x \in H$، را ریشه نامنفی $< x, x >$ تعریف کرد. لذا

$$||x|| = \langle x; x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

نامساوی شوارتز. اگر H فضای ضرب داخلی باشد آنگاه برای هر $x, y \in H$،

$$| < x, y > | \leq ||x||||y||.$$

اثبات: برای دیدن برهان به مرجع [۱۷] رجوع شود.■

نامساوی مثلثی. اگر H فضای ضرب داخلی باشد آنگاه برای هر $x, y \in H$،

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

اثبات: برای دیدن برهان به مرجع [۱۷] رجوع شود.■

تعریف ۴.۱. فرض کنید H فضای ضرب داخلی باشد، از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود که

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| (x,y,z \in H)$$

اگر فاصله بین x,y را مساوی $\|x-y\|$ تعریف کنیم، تمام اصول موضوع یک فضای متری برقرارند. لذا H یک فضای متری است. هر گاه این فضای متری تام باشد یعنی هر دنباله کشی در H در آن همگرا باشد، آنگاه H یک فضای هیلبرت نام دارد.

تعریف ۵.۱. تبدیل خطی $A : H \to K$ که H, K فضای هیلبرت هستند را کراندار گوییم هر گاه

$$\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in H, \|h\| \leq ۱\}$$

متناهی باشد. مجموعه چنین توابعی را با $B(H,K)$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $H=K$ آن را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم.

قرارداد: فرض کنید H فضای هیلبرت باشد. زیرفضای خطی بسته H مانند M را با نماد $M \leq H$ نمایش می‌دهیم و هر زیرفضای خطی H را منیفلد خطی می‌نامیم.

تعریف ۶.۱. اگر به ازای x,y در فضای هیلبرت H داشته باشیم $< x,y >= ۰$، گوییم x متعامد به y است و گاهی می‌نویسیم $y \perp x$. چون $< x,y >= ۰$ تساوی $< y,x >= ۰$ را ایجاب می‌کند، رابطه $\perp$ متقارن است. اگر M زیرفضایی از H باشد، $M^\perp$ مجموعه تمام $y \in H$ هایی می‌گیریم که به هر $x \in M$ متعامد است یعنی اگر $M \subseteq H$ آنگاه

$$M^\perp \equiv \{f \in H : f \perp g : \text{برای تمام } g \in M\}.$$

قضیه بئر. اگر X یک فضای متری تام باشد، اشتراک هر گردایه شمارشپذیر از زیرمجموعه های باز و چگال X در X چگال است.

اثبات: برای دیدن برهان به مرجع [۱۷] رجوع شود.■

نتیجه ۷.۱. در یک فضای متری تام، اشتراک هر گردایه شمارشپذیر از G_δهای چگال مجدداً یک G_δ چگال است که هر G_δ اشتراک گردایه شمارشپذیری از مجموعهِ های باز است.

گاهی اوقات قضیه بئر را به دلیل زیر قضیه رسته‌ای می‌نامند.

مجموعه $E \subset X$ را هیچ جا چگال گوییم اگر بستش $\overline{E}$ شامل زیرمجموعه باز ناتهی از X نباشد. هر اجتماع شمارشپذیر از مجموعه‌های هیچ جا چگال را یک مجموعه از رسته اول می‌نامند. سایر زیرمجموعه‌های X از رسته دوم می‌باشند. (اصطلاحات بئر) قضیه بئر هم ارز حکم زیر است: هیچ فضای متری تام از رسته اول نیست.

تعریف ۸.۱. تبدیل خطی از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y را در نظر گرفته و نرم آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X \leq ۱, x \in X\}$$

که منظور از $\|x\|_X, \|Ax\|_Y$ به ترتیب نرم x, Ax در فضای نرمدار X, Y می‌باشد. هر گاه $\|A\| < \infty$، آنگاه A را یک تبدیل خطی کراندار نامند.

تعریف ۹.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار و X^* گردایه تمام تابعهای خطی کراندار بر X باشد. اگر جمع و ضرب اسکالر تابعهای خطی را تعریف کنیم، X^* یک فضای خطی نرمدار است. X^* را فضای دوگان X می‌نامیم.

لم ۱.۱۰. ثابت کنید $c_\circ(Z)^* = l^1(Z)$.

اثبات: کافی است نشان دهیم یک طولپایی یک به یک و پوشا بین $c_\circ(Z)^*$ و $l^1(Z)$ وجود دارد. فرض کنید $\phi \in l^1(Z)$، تابع $\hat{\phi} : c_\circ(Z) \longrightarrow C$ را باضابطه $\hat{\phi}(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(n) f(n)$ تعریف می‌کنیم. در ابتدا داریم :

$$|\hat{\phi}(f)| = |\sum_{-\infty}^{\infty} \phi(n) f(n)| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |\phi(n)||f(n)| \leq \|f\|_\infty \sum_{-\infty}^{\infty} |\phi(n)| = \|f\|_\infty \|\phi\|_1 < \infty.$$

همچنین $\hat{\phi}$ خطی است لذا $\hat{\phi} \in c_\circ(Z)^*$، $\|\hat{\phi}\| \leq \|\phi\|_1$ و نگاشت $\alpha : l^1(Z) \longrightarrow c_\circ(Z)^*$ با ضابطه $\alpha(\phi) = \hat{\phi}$ خوشتعریف است.

همچنین α پوشا است زیرا فرض کنید $L \in c_\circ(Z)^*$، $\phi_L : Z \longrightarrow C$ با ضابطه $\phi_L(n) = L(e_n)$ که $e_n \in c_\circ(Z)$ به طوری که مولفه nام برابر یک و بقیه صفر می‌باشند. اکنون نشان می دهیم که $\hat{\phi_L} = L$ و $\|\phi_L\|_1 \leq \|L\|$.

برای هر $N \in Z$، $f_N = \sum_{n=-N}^{N} \frac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} e_n$ که $f_N \in c_\circ(Z)$. زیرا $e_n \in c_\circ(Z)$ و $c_\circ(Z)$ فضای برداری است.(جایی که $\frac{\circ}{\circ}$ پدید آید، آن عضو را صفر در نظر می‌گیریم.)

$$\begin{aligned} \|f_N\|_\infty &= \sup\{|f_N(m)| : m \in Z\} \\ &= \sup\{|\sum_{n=-N}^{N} \frac{\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} e_n(m)| : m \in Z\} \\ &\leq \sup\{\frac{|\overline{L(e_m)}|}{|L(e_m)|} : m \in Z\} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{۱-۱}$$

از ۱-۱،

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} |\phi_L(n)| &= \sum_{n=-N}^{N} |L(e_n)| = \sum_{n=-N}^{N} \frac{|L(e_n)|^2}{|L(e_n)|} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{L(e_n)\overline{L(e_n)}}{|L(e_n)|} \end{aligned}$$

$$= |L(f_N)| \leq \|L\| \|f_N\|_\infty \leq \|L\|.$$

بنابراین $\phi_L \in l^1(Z)$ و $\|\phi_L\|_1 \leq \|L\|$. نگاشت $\beta : c_\circ(Z)^* \longrightarrow l^1(Z)$ با ضابطه $\beta(L) = \phi_L$ خوشتعریف است بعلاوه اگر $L \in c_\circ(Z)^*$ و $g \in c_\circ(Z)$ آنگاه $\lim_{n \longrightarrow \infty} g(n) = \circ$ ودر نتیجه $\lim_{N \longrightarrow \infty} \|g - \sum_{n=-N}^{N} g(n)e_n\|_\infty = \circ$ و چون L پیوسته است آنگاه،

$$L(g) = \lim \sum_{n=-N}^{N} g(n)L(e_n) = \lim \sum_{n=-N}^{N} g(n)\phi_L(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} g(n)\phi_L(n) = \hat{\phi_L}(g).$$

بنابراین روی $c_\circ(Z)^*$، $\alpha o \beta = I$ که I تابع همانی است. چون $\|\phi_L\|_1 \leq \|L\|$ و $\|\hat{\phi}\| \geq \|\phi\|_1$ پس برای هر $\phi \in l^1(Z)$، $\|\phi\| = \|\hat{\phi}\|$ زیرا برای $L \in c_\circ(Z)^*$، $\|\phi_L\| \leq \|L\|$. لذا کافی است به جای L، $\hat{\phi} \in c_\circ(Z)^*$ قرار دهیم آنگاه

$$\phi_{\hat{\phi}}(n) = \hat{\phi}(e_n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \phi(n)e_n(n) = \phi(n).$$

بنابراین $\|\phi_{\hat{\phi}}\|_1 = \|\phi\|_1 \leq \|\hat{\phi}\|$.

لذا $\hat{\phi} = \circ$، $\phi = \circ$ را نتیجه می دهد و α یک به یک می‌باشد. پس α طولپایی ایزومورفیسم از $l^1(Z)$ به $c_\circ(Z)^*$ است.■

تعریف ۱.۱۱. گوییم فضای باناخ A یک جبر باناخ است اگر در آن یک ضرب چنان تعریف شده باشد که نامساوی

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in A) \qquad (۱-۲)$$

قانون شرکت پذیری $x(yz) = (xy)z$، قوانین پخشپذیری

$$(y+z)x = yx + zx, x(y+z) = xy + xz \qquad (x, y, z \in A) \qquad (۱-۳)$$

و رابطه

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

به ازای هر اسکالر α برقرار باشند.

۱—۲ توپولوژی متری

تعریف ۱.۱۲. یک توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\emptyset, X$ به τ تعلق دارند.

۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه τ به τ تعلق دارد.

۳) اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی τ به τ تعلق دارد.

مجموعه X را که برای آن توپولوژی مانند τ مشخص شده است فضای توپولوژیک می‌نامیم. اگر X فضایی توپولوژیک با توپولوژیک τ باشد، زیرمجموعه U از X را یک مجموعه باز خوانیم هر گاه U متعلق به τ باشد.

اگر X مجموعه دل خواهی باشد، گردایه همه زیرمجموعه‌های آن تشکیل توپولوژی در X می دهد که به توپولوژی گسسته موسوم است.

فرض کنید τ, τ' دو توپولوژی در مجموعه مفروض X باشند. اگر $\tau \subset \tau'$، می‌گوییم τ' از τ ظریفتر است؛ اگر τ' اکیداً حاوی τ باشد، می‌گوییم τ' از τ اکیداً ظریفتر است.

تعریف ۱.۱۳. فرض کنید X مجموعه‌ای باشد، یک پایه توپولوژی در X گردایه‌ای است از زیرمجموعه های X (موسوم به اعضای پایه) به طوری که :

۱) به ازای هر $x \in X$، دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود است.

۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_1, B_2 باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به طوری که $x \in B_3, B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

تعریف ۱۴.۱. اگر β پایه توپولوژی در X باشد آنگاه τ، توپولوژی تولید شده به وسیله β، چنین تعریف می‌شود:

زیرمجموعه U از X را در X باز گوییم (یعنی عضوی از τ است.) اگر به ازای هر $x \in U$، عضوی از پایه مانند $B \in \beta$ وجود داشته باشد به طوری که $B \subset U$.

اگر d متریکی در مجموعه X باشد آنگاه گردایه همه ϵ—گویهای $B_d(x, \epsilon)$، به ازای $x \in X, \epsilon > 0$، پایه‌ای برای یک توپولوژی در X است که به توپولوژی متری القا شده به وسیله d موسوم است.

تور.

رابطه‌ای مانند $\leq$ را در مجموعه A یک ترتیب جزئی گوییم در صورتی که در شرایط ذیل صدق کند :

۱) به ازای هر α، $\alpha \leq \alpha$.

۲) اگر $\alpha \leq \beta, \beta \leq \alpha$ آنگاه $\alpha = \beta$.

۳) اگر $\alpha \leq \beta, \beta \leq \gamma$ آنگاه $\alpha \leq \gamma$.

یک مجموعه جهت دار مانند J مجموعه‌ای است با یک ترتیب جزئی، مانند $\leq$ به طوری که به ازای هر زوج α, β از اعضای J، عضوی از J مانند γ موجود باشد با این خاصیت که $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. یک تور در X تابعی است مانند f از مجموعه جهت داری مانند J به توی X. اگر $\alpha \in J$، معمولاً، $f(\alpha)$ را با x_α نمایش

مي دهیم. تور f را با نماد $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ و یا اگر مجموعه اندیس از سیاق مطلب فهمیده شود، منحصراً با (x_α) نمایش می دهند.

تور (x_α) را همگرا به نقطه x از X گوییم (و چنین می‌نویسیم : $x_\alpha \longrightarrow x$) هر گاه به ازای هر همسایگی U از x، α یی موجود باشد که اگر $\alpha \leq \beta$ آنگاه $x_\beta \in U$.

۱–۳ جمع مستقیم فضاهای هیلبرت

برای هر فضای برداری X, Y، $X \oplus Y$ یعنی ضرب دکارتی $X \times Y$ که عملهای تعریف شده روی آن مولفه به مولفه تعریف می‌شود. یعنی اگر

$$X \bigoplus Y = \{x \oplus y : x \in X, y \in Y\}$$

آنگاه

$$\alpha(x_۱ \oplus y_۱) \equiv \alpha x_۱ \oplus \alpha y_۱, (x_۱ \oplus y_۱) + (x_۲ \oplus y_۲) \equiv (x_۱ + x_۲) \oplus (y_۱ + y_۲).$$

تعریف ۱.۱٦. اگر H, K فضاهای هیلبرت باشند،

$$H \bigoplus K = \{h \oplus k : h \in H, k \in K\}, < h_۱ \oplus k_۱, h_۲ \oplus k_۲ > \equiv < h_۱, h_۲ > + < k_۱, k_۲ >$$

که ضرب داخلی روی $H \oplus K$ می‌باشد و $H \oplus K$ فضای هیلبرت است.

۱–۴ الحاق یک عملگر

تعریف ۱.۱۷. اگر H, K فضای هیلبرت باشند تابع $u : H \times K \to F$ را یک و نیم خطی گوییم هر گاه برای $h, g \in H$، $k, f \in K$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم؛

آ) $u(\alpha h + \beta g, k) = \alpha u(h, k) + \beta u(g, k)$.

ب) $u(h, \alpha k + \beta f) = \overline{\alpha} u(h, k) + \overline{\beta} u(h, f)$.

یک و نیم خطی u را کراندار گوییم هر گاه ثابت M وجود داشته باشد به طوری که برای تمام $h \in H$ و $k \in K$، $|u(h, k)| \leq M\|h\|\|k\|$. ثابت M را یک باند برای u می‌نامیم.

اگر $A \in B(H, K)$ آنگاه $u(h, k) \equiv < Ah, k >$ یک و نیم خطی کراندار است. همچنین اگر $B \in B(H, K)$ آنگاه $u(h, k) \equiv < h, Bk >$ را یک و نیم خطی کراندار گوییم.

قضیه ۱.۱۸. اگر $u : H \times K \to F$ یک نیم خطی کراندار با باند M باشد آنگاه وجود دارد عملگر یکتای $A \in B(H, K)$ و $B \in B(K, H)$ به طوری که برای تمام $h \in H$ و $k \in K$

$$u(h, k) = < Ah, k > = < h, Bk > \qquad (۱-۴)$$

و $\|A\|, \|B\| \leq M$.

اثبات: برای دیدن برهان به مرجع [۷] رجوع شود.■

تعریف ۱.۱۹. اگر $A \in B(H, K)$ آنگاه عملگر یکتای B در $B(K, H)$ که در ۴—۱ صدق می‌کند، الحاق A نامیده و با نماد $B = A^*$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱.۲۰. اگر X, Y فضای باناخ باشند، X^*, Y^* مجموعه همه تابعک های خطی کراندار به ترتیب روی X, Y گوییم. فرض کنید $T : X \to Y$ کراندار باشد آنگاه $T^* : Y^* \to X^*$ را الحاق T می‌نامیم به طوری که برای هر $y^* \in Y^*$ و $x \in X$، $(T^* y^*)(x) = y^*(Tx)$ و با نماد $< T^* y^*, x > = < y^*, Tx >$ نمایش می دهیم.