بسم الله الرحمن الرحیم

١٤٨٩٠٧

دانشگاه ارومیه

انقباض یک عضو از یک هم‌دور

مژگان تقی‌دوست لسکوکلایه

مرکز آموزش‌های نیمه‌حضوری
گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

مهر ۱۳۸۹

شماره ۳۰۶-۳

به تاریخ ۱۳۸۹/۷/۱۴

[پ]ایان نامه خانم : مژگان تقی دوست

[م]ورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ (به حروف هیجده)

[ق]رار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران : دکتر حبیب اذانچیلر

۲- داور خارجی : دکتر قدرت اله آزادی

۳- داور داخلی : دکتر بهمن رضایی

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر کریم اکبری

۸۹/۷/۱۸

تقدیم به پسرم آریا

قدردانی و تشکر

خداوند یکتا را شکر می‌گویم که فرصتی دوباره برای آموختن دانستنیهای نو در دانش ریاضیات به من عطا فرمود، تا بتوانم قطره‌ای دیگر از اقیانوس بی‌انتهای دانش او را بشناسم و بیش از پیش، ستایشگر آن ذات مقتدر و شکرگزار خلقت باشکوه او باشم.

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر اذانچیلر که از بنیان‌گذاران متروید در ایران می‌باشند و تکمیل این پایان‌نامه بدون راهنماییهای ایشان ممکن نبود، سپاسگزارم.

همچنین از داوران محترم آقایان دکتر آزادی و دکتر رضایی که افتخار شاگردی‌شان را نیز داشته‌ام، سپاسگزارم.

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم را به‌خاطر تمام زحمات بی‌منت‌شان سپاس می‌گویم و همواره و تا ابد مدیون محبت‌های بی‌دریغ این عزیزان هستم.

از همسر صبور و تکیه‌گاهم و پسر عزیزم که لطف و محبت خالصانه‌شان همواره مشوق من در کسب موفقیت‌هایم بوده‌است، نهایت سپاس و تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنیم M و N متروید‌هایی ۳-همبند باشند به‌طوری‌که $|E(N)| \geq ۴$ و C^* یک هم‌دور M باشد با این ویژگی که برای برخی $x_\circ \in C^*$ ، $M/x_\circ$ دارای یک N-مینور باشد. در نتایج این پایان‌نامه نشان می‌دهیم عضوی مانند $x \in C^*$ وجود دارد که $si(M/x)$ یا $co(M/x)$ ، ۳-همبند و دارای یک N-مینور باشد، یا یک فن چهارعضوی از M وجود دارد که شامل دوعضو C^* و نیز عضو x است به‌طوری‌که $si(M/x)$ ، ۳-همبند و دارای یک N-مینور باشد.

پیشگفتار

در نظریه ماترویید ابزارهایی وجود دارند که به ما می‌گویند چه زمانی می‌توان عضو یا اعضایی از مجموعه زمینه‌ی یک ماترویید را حذف نمود به‌طوری‌که وجود یک مینور و نیز نوع معینی از همبندی باقی بماند.

برخی نتایج جدید از این نوع می‌باشند، اما محدودیتی که در این زمینه وجود دارد این است که این عضو یا اعضاء باید رابطه‌ی معینی با یک زیرساخت داده شده در ماترویید داشته باشند.

آکسلی[1]، سمپل[2] و وایتل[3] در مرجع [8] ، یک پایه را در ماترویید ثابت نگه داشته و دو حالت زیر را درنظرگرفته‌اند :

الف— اعضاء منقبض شده در پایه باشند.

ب— اعضاء حذف شده در پایه نباشند.

هال[4] در مرجع [2] این موضوع را که چه زمانی انقباض یک عضو از یک ابرصفحه در یک ماترویید ۳—همبند مشروط بر باقی‌ماندن ۳—همبندی (درحد زوج‌های موازی) ممکن می‌باشد، مورد بررسی قرار داده است.

این پایان‌نامه با بررسی شرایطی که تحت آن‌ها می‌توان یک عضو از یک هم‌دور را منقبض

---

[1] Oxley
[2] Semple
[3] Whittle
[4] Hall

نمود به‌طوری‌که ۳–همبندی (درحد زوج‌های موازی) باقی بماند و همچنین مطالعه‌ی ساختارهایی که مانع انجام این کار می‌شوند، به این دسته از ابزارها کمک بسیاری خواهدنمود.

این پایان‌نامه براساس مقاله‌ی :

R.Hall, D.Mayhew, **Contracting an element from a cocircuit,**

Journal of Advances in Applied Mathematics, 41 (2008) 510 – 529.

تنظیم شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل به برخی از تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد نیاز از نظریه گراف، نظریه ماترویید و همچنین مبحث همبندی ماتروییدها اشاره می‌کنیم و برای خلاصه گویی، از ارائه اثبات گزاره‌ها، لم‌ها و قضایا در این فصل صرف‌نظر می‌کنیم. مفاهیم اولیه نظریه گراف از مرجع [۱۰] و مفاهیم اولیه نظریه ماترویید و همبندی ماتروییدها از مرجع [۵] مورد استفاده قرار گرفته است.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۱ گراف G [۱] سه‌تایی است متشکل از یک مجموعه‌ی متناهی و غیرخالی $V(G)$ که اعضای آن رأس‌های گراف [۲] و یک مجموعه‌ی متناهی $E(G)$ که اعضای آن یال‌های گراف [۳] نامیده می‌شوند و یک رابطه که به هرعضو $E(G)$ دوعضو (نه لزوماً متمایز) از اعضای $V(G)$ را وابسته می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱ دوعضو u و v از $V(G)$ را مجاور گویند هرگاه $uv \in E(G)$ ، درغیراین صورت این دوعضو را نامجاور گویند.

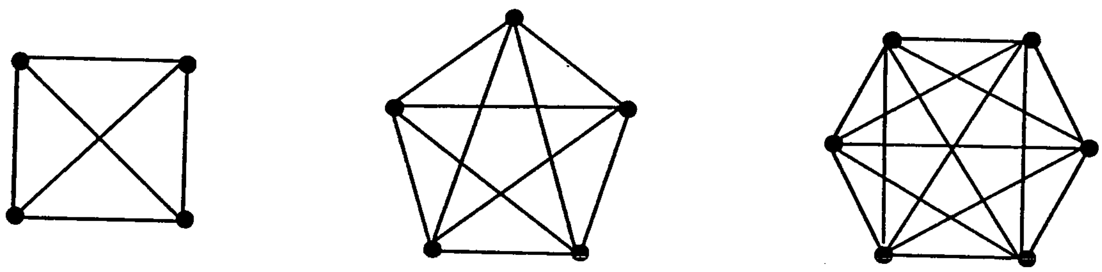
---

[۱] Graph
[۲] Vertex set
[۳] Edge set

تعریف ۳.۱.۱ هرگاه نقاط انتهایی یک یال بر هم منطبق باشند، آن را یک طوقه[۴] گویند و اگر نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آنها را یال‌های موازی یا چندگانه[۵] گویند و گراف G را که فاقد طوقه و یال موازی باشد، گراف ساده[۶] گویند.

تعریف ۴.۱.۱ گراف ساده‌ای را که در آن هر دو رأس متمایز با یک یال به یکدیگر وصل شوند، گراف کامل[۷] می‌نامند. گراف کامل با n رأس را با K_n نمایش می‌دهیم.

مثال ۵.۱.۱ در شکل زیر، گراف‌های کامل K_4 ، K_5 و K_6 نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۱

تعریف ۶.۱.۱ دو گراف ساده‌ی G و H را یکریخت گویند هرگاه نگاشت دوسویی $f : V(G) \to V(H)$ موجود باشد به‌طوری‌که مجاورت رئوس حفظ شود. یعنی :

$$uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$$

Loop[۴]
Multiple[۵]
Simple graph[۶]
Complete graph[۷]

تعریف ۷.۱.۱ دو گراف G و H را یکریخت [۸] گوییم هرگاه نگاشت‌های دوسویی $\psi : V(G) \longrightarrow V(H)$ و $\theta : E(G) \longrightarrow E(H)$ چنان موجود باشند که رأس v از گراف G روی یال e ازگراف G باشد اگر و تنها اگر $\psi(v)$ روی یال $\theta(e)$ باشد. یکریختی دو گراف G و H را با نماد $G \cong H$ نمایش می‌دهیم.

هرگاه $G \cong H$ ، تساوی‌های زیر برقرارند :

$$|V(G)| = |V(H)| \qquad \text{و} \qquad |E(G)| = |E(H)|$$

تعریف ۸.۱.۱ برای هررأس $v \in V(G)$ درجه [۹] آن رأس را تعداد یال‌های واقع بر آن رأس تعریف کرده و آن را با $d(v)$ نشان می‌دهیم.

رأسی که هیچ یالی بر آن واقع نباشد (رأس با درجه صفر) را رأس تنها [۱۰] گوییم.

کمترین و بیشترین درجه‌ی رأس‌های G را به‌ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ یک گشت [۱۱] در گراف G دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G مانند $v_0e_1v_1...e_kv_{k+1}$ است که در آن برای هر $0 \leq i \leq k+1$ ، v_{i-1} و v_i نقاط انتهایی یال e_i هستند.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر هیچ یالی در گشت تکرار نشود، آنگاه آن گشت را یک گذر [۱۲] گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر هیچ رأسی در گذر تکرار نشود، آنگاه آن گذر را یک مسیر [۱۳] می‌نامیم.

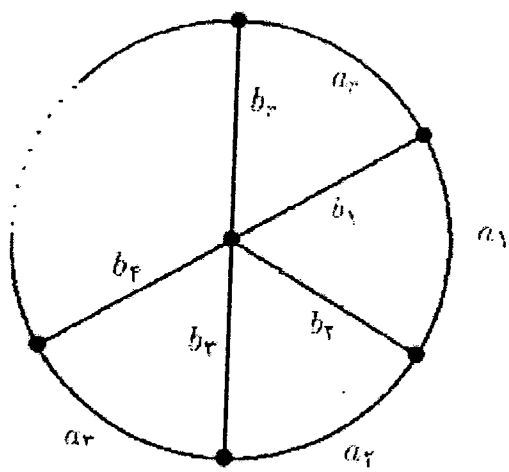
تعریف ۱۲.۱.۱ مسیر $v_0e_1v_1...e_nv_n$ را که درآن رابطه $v_0=v_n$ برقرار باشد، دور [۱۴] گوییم.

---

[۸] *Isomorphic*
[۹] Degree
[۱۰] Isolated vertex
[۱۱] Walk
[۱۲] Trail
[۱۳] Path
[۱۴] Circuit

تعریف ۱۳.۱.۱ گراف چرخ[۱۵] گرافی با n رأس است که $n - ۱$ رأس آن، رأس‌های یک دور و یک رأس در میان آن دور قرار دارد که به آن رأس مرکزی گویند به‌طوری‌که همه‌ی $n - ۱$ رأس پیرامون به رأس مرکزی وصل هستند. یال‌هایی که متعلق به محیط چرخ هستند، اعضای محیطی یا لبه[۱۶] چرخ و یال‌هایی که رأس مرکزی را به رأس‌های اطراف وصل می‌کنند، پره‌های[۱۷] چرخ نامیده می‌شوند.

مثال ۱۴.۱.۱ برای $r \geq ۲$ ، گراف چرخ W_r در شکل زیر نشان داده شده‌است.



گراف W_r

شکل ۲.۱

مجموعه‌ی $\{a_۱, a_۲, ..., a_r\}$ لبه چرخ و $\{b_۱, b_۲, ..., b_r\}$ پره‌های چرخ هستند.

تعریف ۱۵.۱.۱ در یک گراف دارای دور، طول کوتاهترین دور را کمر[۱۸] گراف می نامند.

---
[۱۵] Wheel
[۱۶] Rim
[۱۷] Spockes
[۱۸] Girth

تعریف ۱۶.۱.۱ گراف G را همبند[۱۹] گوییم هرگاه برای هر دو رأس v , u از آن، یک مسیر بین آنها وجود داشته باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ همبندی G که آن را با $\kappa(G)$ نشان می‌دهیم عبارت است از کمترین تعداد رأس‌های ممکن که با حذف آنها، یک گراف ناهمبند یا یک رأس تنها حاصل می‌شود. گراف G را k-همبند گوییم هرگاه $\kappa(G) \geq k$. یک گراف با حداقل دو رأس ۲-همبند است اگر و تنها اگر همبند باشد.

گزاره ۱۸.۱.۱ اگر G یک گراف بی‌طوقه و فاقد رأس تنها بوده و حداقل سه رأس داشته باشد، آنگاه G، ۲-همبند است اگر و تنها اگر برای هر دو یال متمایز G، دوری از G شامل این دو یال وجود داشته باشد.

مرجع [۵] گزاره ۱.۱.۴. ■

تعریف ۱۹.۱.۱ اگر v رأسی از گراف H باشد و حذف v و تمام یال‌های واقع بر آن، تعداد مؤلفه‌های همبند H را افزایش دهد، آنگاه v یک رأس برشی[۲۰] H نامیده می‌شود.

تعریف ۲۰.۱.۱ اگر حذف یالی از گراف، تعداد مؤلفه‌های همبند را یک واحد افزایش دهد، آن یال را یک پل[۲۱] یا یال برشی[۲۲] نامند.

قضیه ۲۱.۱.۱ یک یال، یال برشی است اگر و تنها اگر قسمتی از یک دور نباشد.

برهان : مرجع [۱۰] قضیه ۱۴.۲.۱ . ■

---
[۱۹] Connected
[۲۰] Cut-vertex
[۲۱] Bridge
[۲۲] Cut-edge

تعریف ۲۲.۱.۱ گراف G مسطح[۲۳] است هرگاه بتوان G را در صفحه طوری ترسیم کرد که هیچ دو یال G یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از رأس قطع نکنند.

تعریف ۲۳.۱.۱ یک ناحیه[۲۴] از یک گراف، مجموعه باز U است که برای هر $u,v \in U$، مسیری از u به v در U وجود داشته باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱ وجه‌های[۲۵] یک گراف مسطح عبارتند از ناحیه‌های ماکسیمال از صفحه که شامل هیچ رأسی از گراف نیستند.

تعریف ۲۵.۱.۱ گراف دوگان[۲۶] گراف مسطح G، گراف مسطح G^* است که رأسهای آن متناظر با وجه‌های G و یال‌های آن نیز متناظر با یال‌های G هستند، که در آن اگر e یالی از G و مرز بین وجه X و وجه Y از آن باشد، آنگاه یال e^*، متناظر با یال e، رأسهای x^* و y^* از G^*، متناظر با وجه‌های X و Y از G را به هم وصل می‌کند.

هریال برشی از G متناظر با یک طوقه در G^* است، زیرا وجوه دوطرف یک پل، یکسان هستند. اگر دو وجه متفاوت G بیش از یک یال مرزی داشته باشند، آنگاه یال‌های موازی در G^* متناظر خواهند کرد.

روشی ساده که G^* را در صفحه بنشانیم، این است که هر رأس x^* را درون وجه متناظر X از G قرار می‌دهیم و سپس یال e^* را به طریقی رسم می‌کنیم که یال متناظر e از G را دقیقاً یک‌بار قطع کند (هیچ دو یال از G را قطع نکند). G^* را که به این طریق رسم شده است، دوگان هندسی گراف G گویند.

[۲۳] Planar
[۲۴] Region
[۲۵] Face
[۲۶] Dual

تعریف ۲۶.۱.۱ یال e از گراف G را منقبض شده گوییم هرگاه آن یال حذف شده و دوسر آن روی هم قرارگیرند. گراف حاصل از انقباض [۲۷] یال e را با $G.\, e$ نمایش می‌دهیم.

[۲۷] Contraction

۲.۱ مفاهیم مقدماتی از نظریه ماترویید

تعریف ۱.۲.۱ یک ماترویید[۲۸] مثل M زوج مرتب $M = (E, \mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه‌ی متناهی و $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در سه‌شرط زیر صدق می‌کند :

(I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I2) اگر $I \in \mathcal{I}$ و $I' \subseteq I$ ، آنگاه $I' \in \mathcal{I}$.

(I3) اگر $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ و $|I_2| > |I_1|$ ، آنگاه عضوی مانند $e \in I_2 - I_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

اگر $M = (E, \mathcal{I})$ یک ماترویید باشد، آنگاه M را مادروییدی روی مجموعهٔ E و E را مجموعه‌ی زمینه[۲۹] ماترویید M گوییم.

هرعضو گردایه $\mathcal{I}$ را یک مجموعه مستقل[۳۰] ماترویید M می‌نامیم.

زیرمجموعه‌هایی از E را که در $\mathcal{I}$ نیستند، مجموعه‌های وابسته[۳۱] گوییم.

تعریف ۲.۲.۱ هر زیرمجموعه وابسته مینیمال ماترویید M را یک دور[۳۲] گوییم و مجموعه‌ی تمامی دورهای ماترویید M را با $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ و یا به‌اختصار با $\mathcal{C}$ نشان می‌دهیم.

یک دور M را که شامل n عضو باشد یک n–دور[۳۳] می‌نامیم.

بنابراین با معلوم بودن عناصر $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ می‌توان اعضای $\mathcal{I}(M)$ را مشخص کرد، چون عناصر آن دقیقاً آن زیرمجموعه‌هایی از E هستند که شامل هیچ عضوی از $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ نیستند.

[۲۸] Matroid
[۲۹] Ground set
[۳۰] Independent set
[۳۱] Dependent set
[۳۲] Circuit
[۳۳] n-circuit

لم ۳.۲.۱ گردایه دورهای یک ماترویید دارای خواص زیر است :

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$.

(C2) اگر $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ و $C_1 \subseteq C_2$ ، آنگاه $C_1 = C_2$.

(C3) اگر C_1 و C_2 دو عضو متمایز $\mathcal{C}$ باشند و $e \in C_1 \cap C_2$ ، آنگاه عضوی مثل C_3 از $\mathcal{C}$ وجود دارد به‌طوری‌که $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

برهان : مرجع [۵] لم ۳.۱.۱ . ■

قضیه ۴.۲.۱ فرض کنیم E یک مجموعه و $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد که در سه‌خاصیت (C1) ، (C2) و (C3) صدق می‌کنند. همچنین فرض کنیم $\mathcal{I}$ گردایه تمامی زیرمجموعه‌های E باشد که شامل هیچ عضو $\mathcal{C}$ نیستند. در این صورت $(E,\mathcal{I})$ یک ماترویید روی E است که $\mathcal{C}$ گردایه دورهای آن می‌باشد.

برهان : مرجع [۵] قضیه ۴.۱.۱ . ■

گزاره ۵.۲.۱ فرض کنیم E مجموعه یال‌های گراف G و $\mathcal{C}$ گردایه تمام دورهای G باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ مجموعه‌ی دورهای یک ماترویید روی مجموعه E است. این ماترویید را ماترویید دوری[۳۴] گراف G گوییم و آن را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم.

برهان : مرجع [۵] گزاره ۷.۱.۱ . ■

تعریف ۶.۲.۱ دو ماترویید M_1, M_2 را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $M_1 \cong M_2$ ، هرگاه تناظر یک به یک $\psi : E(M_1) \to E(M_2)$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $X \in E(M_1)$ ، $\psi(X)$ یک مجموعه مستقل در M_2 است اگر و تنها اگر X یک مجموعه مستقل در M_1 باشد.

[۳۴] Cycle matroid