دانشکده علوم ریاضی

عنوان پایان نامه

زیرگروه های جابه جایی پذیر در گروه ها

ارائه شده جهت اخذ درجه ی کارشناسی ارشد

در رشته ی ریاضی گرایش محض

استاد راهنما

دکتر احمد عرفانیان

استاد مشاور

دکتر کاظم چیتی

نگارنده

علی عظیمی

بهمن ۸۷

پیشگفتار

دو زیرگروه A و B ازیک گروه G که با یکدیگر جابه جا می شوند یعنی $AB = BA$ نقش مهمی در نظریه ی گروهها ایفا می کنند . در این راستا مسائل زیادی را می توان مطرح نمود که از جمله ی آن ها این است که اگر A و B دارای خاصیتی باشند آیا این خاصیت به گروه $G = AB$ منتقل می شود و در حالت کلی تر اینکه اگر A و B دارای خاصیتی باشندگروه $G = AB$ دارای چه خاصیتی مرتبط با خاصیتهای A و B خواهد بود . در این رابطه می توان به برخی نتایج بدست آمده اشاره نمود به عنوان مثال اگر A و B آبلی باشند و $G = AB$ آنگاه G گروهی حل پذیر با طول سری مشتق حداکثر ۲ خواهد بود.(قضیه ی ۳. ۲. ۱ را ملاحظه کنید) .

نتیجه ی دیگری که توسط ویلانت[1] در [14] و کگل[2] در[8] بیان شده ، این است که اگر Aو B متناهی و پوچ توان باشند آنگاه گروه $G = AB$ حل پذیر خواهد بود. همچنین می توان به حالت خاصی از این قضیه که به نام قضیه ی فیتینگ[3] معروف می باشد اشاره کرد که اگر A و Bزیرگروههای نرمال و پوچ توان باشند آنگاه AB نیز پوچ توان خواهد بود .(قضیه ی ۱. ۴. ۳ را ملاحظه کنید) . در مقابل این قضایا می توان به موارد استثنا و نقض نیز اشاره داشت که اگر Aو B دارای خاصیتی باشند لزومی ندارد که AB واجد آن خاصیت باشد به طور مثال اگر Aو B زیرگروههایی نرمال و ابرحل پذیر باشند در [6]نشان داده شده است که AB لزوما ابرحل پذیر نیست ، حتی در حالت متناهی.

نتایج فوق همگی در راستای این مسئله در نظریه ی گروهها می باشد که اگر $G = AB$ باشد و یک سری فرضیات مشخص برای Aو B داشته باشیم آنگاه در مورد G چه می توان گفت؟

از جمله نتایجی که در این رابطه بدست آمده است پیرامون خاصیت F – جابه جاپذیری و تماماً F – جابه جاپذیری می باشد که در آن F یک تابعگون[4] است که به هر گروه G خانواده ای از زیرگروههای آن را نسبت می دهد به طوری که به ازای هر همریختی $\alpha : G \to G$ داشته باشیم $F(\alpha(G)) = \alpha(F(G))$

[1] Wielandt
[2] Kegel
[3] Fitting
[4] Functor

در این رساله این خاصیت را روی زیرگروههای A و B فرض کرده بدنبال این هستیم که چنان چه A و B علاوه براین خاصیت دارای خاصیت دیگری باشند آیا گروه $G = AB$ نیز دارای آن خاصیت خواهد بود.
در این رساله به ارائه ی برخی نتایج بدست آمده توسط کاروکا[1] در [4] و اسد و شالن[2] در [2] ونیز هاینیکن و بیدلمن [3] در [3] می پردازیم .

[1] Carocca
[2] Assad and Shaalan
[3] Heineken and Beibleman

مقدمه

هدف از این رساله معرفی زیرگروه های دوبه دوجا به جا پذیر و تماماً جابه جاپذیر در گروهها و بررسی برخی خواص اساسی و مهم آنها می باشد در این راستا ضمن ارائه برخی پیش نیازها به بررسی این نوع از زیرگروهها در گروههای ابرحل پذیر خواهیم پرداخت .

این رساله مشتمل بر چهار فصل است . در فصل اول به تعاریف و قضایایی پرداخته ایم که در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت . همچنین گروههای حل پذیر ، پوچ توان ، زیرگروههای فراتینی و فیتینگ و گروههای چند دوری و نتایج اساسی آنها را به طور مختصر در این فصل بیان کرده ایم . در فصل دوم به معرفی گروههای ابرحل پذیر پرداخته و روشهای مرتب سازی سریهای ابر حل پذیر را عنوان نموده ایم . همچنین به معرفی مفهومی به نام برج سیلو پرداخته شده است . در فصل سوم ویژگیهای گروههای تجزیه پذیر را مورد بررسی قرار داده ایم .

فصل چهارم که قسمت اصلی این رساله می باشد به معرفی زیرگروههای دوبه دو F- جابه جا پذیر و زیرگروههای تماماً دوبه دو F- جابه جا پذیر می پردازد . دراین فصل به سه قضیه مهم اشاره خواهیم کرد به عنوان مثال نشان می دهیم چنانچه χ یک ρ-کلاس باشد و $G=HK$ حاصلضربی از دو χ- زیرگروه H و K باشد و همچنین d_K, d_H به ترتیب طول سری مشتق زیرگروههای H و K باشند. اگر H و K دوبه دو S_n- جابه جا پذیر و $I=H\bigcap K$ زیرگروه زیرنرمالی از H با $def_H I=n$ باشد آن گاه G یک χ- گروه با طول سری مشتق حداکثر $2nd_H d_K + d_K$ خواهد بود. همچنین ثابت خواهیم کرد که چنانچه $G=HK$ حاصلضربی از دو زیرگروه Hو K باشد و H و K تماماً S- جابه جا پذیر وابرحل پذیر باشندآن گاه G نیز ابرحل پذیر است .

فهرست

فصل اول
پیش نیاز ها

۱. ۱ تعاریف و نتایج مقدماتی

در این قسمت به برخی از تعاریف و نتایج مقدماتی که در فصول بعد مورد استفاده قرار خواهد گرفت می پردازیم .

تعریف ۱. ۱. ۱

فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از G باشد *نرمالساز*[1] و *مرکزساز*[2] H در G را به ترتیب به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$N_G(H)=\{x\in G \mid xHx^{-1}=H\} \quad \text{و} \quad C_G(H)=\{x\in G \mid xhx^{-1}=h.\forall h\in H\}$$

قضیه ۱. ۱. ۲

فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد . در این صورت :

$\dfrac{N_G(H)}{C_G(H)}\cong$ زیرگروهی از $Aut(H)$

برهان : رجوع شود به [12] .

قضیه ۱. ۱. ۳

گروه خودریختیهای یک گروه دوری ،گروهی آبلی و متناهی می باشد . همچنین $|Aut(Z)|=2$ و $|Aut(C_p)|=p-1$ ،که p عددی اول است .

برهان : رجوع شود به [12].

تعریف ۱. ۱. ٤

فرض کنید G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد . در این صورت *درون*[3] H را به صورت زیر تعریف می کنیم و با نماد H_G نمایش می دهیم :

$$H_G=\bigcap_{g\in G}H^g$$

[1] Normalizer
[2] Centralizer
[3] Core

می توان به سادگی ملاحظه نمود که H_G بزرگترین زیر گروه نرمال Gاست که مشمول در H می باشد .

تعریف ۱. ۱. ۵

فرض کنید G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد . در این صورت *بستار نرمال* H [1] را به صورت زیر تعریف می کنیم و با نماد H^G نمایش می دهیم :

$$H^G =< h^g \mid h \in H, g \in G >$$

توجه داریم که H^G کوچکترین زیر گروه نرمال G است که شامل H می باشد .

تعریف ۱. ۱. ٦

فرض کنید G یک گروه و $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_n = 1$ یک سری از زیرگروههای G باشد این سری ،سری زیر نرمال[2] نامیده می شود هر گاه هر H_i در H_{i-1} نرمال باشد.سری را سری نرمال نامند هر گاه هر H_i در G نرمال باشد.

قضیه۱. ۱. ۷ (قضیه شرایر)

هر دو سری زیر نرمال از گروه G دارای تظریفهایی هستند که با هم معادل می باشند.

برهان : رجوع شود به [12] .

تعریف ۱. ۱. ۸

زیرگروه H از گروه G را زیر گروه زیر نرمال[3] G می نامیم ، هرگاه سری زیر نرمالی به صورت زیر داشته باشیم:

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_n = G$$

در این حالت می نویسیم $H \text{ sn } G$. کمترین طول این سری را *نقصان* H در G می نامیم وبا $def_G(H)$ نمایش می دهیم.

---

[1] Normal closure
[2] Subnormal series
[3] Subnormal subgroup

تعریف ۱. ۱. ۹

فرض کنید G یک گروه باشد، کوچکترین مضرب مشترک مرتبه ی تمام اعضای G را *نمای* [۱] G می نامند و با نماد $\exp(G)$ نمایش می دهند.

تعریف ۱. ۱. ۱۰

گروه G را یک p -گروه آبلی مقدماتی گوییم هر گاه G یک گروه آبلی باشد که مرتبه هر عضو غیر همانی آن p باشد .به عبارت دیگر $\exp(G) = p$.

تعریف ۱. ۱. ۱۱

فرض کنید G یک گروه و H زیر گروهی از آن باشد.در این صورت H را یک زیرگروه مشخصه ی [۲] G می نامیم اگر برای هر $\alpha \in Aut(G)$، داشته باشیم $H^{\alpha} = H$.زیر گروه مشخصه H از G را با نماد $H \overset{c}{\lhd} G$ نمایش می دهیم . به عنوان مثال به ازای هر گروه G، $Z(G)$ زیرگروه مشخصه ی G است.

قضیه ۱. ۱. ۱۲

فرض کنید G یک گروه باشد . در این صورت:

(الف) اگر $K \overset{c}{\lhd} G, H \overset{c}{\lhd} K$ آنگاه $H \overset{c}{\lhd} G$ (ب) اگر $K \lhd G, H \overset{c}{\lhd} K$ آنگاه $H \lhd G$

برهان : رجوع شود به [11] .

تعریف ۱. ۱. ۱۳

فرض کنید G گروهی متناهی و $|G| = p^k \cdot m$ که p عددی اول و $(p,m) = 1$. در این صورت هر زیر گروه G از مرتبه ی p^k را یک p-زیرگروه سیلوی [۳] G نامند. مجموعه ی تمام p - زیرگروههای سیلوی G را با نماد $Syl_p(G)$ نمایش می دهیم.

[1] Exponent
[2] Characteristic subgroup
[3] Sylow p- subgroup

قضیه (قضایای سیلو)۱. ۱. ۱٤

فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه ی $p^k \cdot m$ باشد و $(p,m)=1$ در این صورت :

(الف) به ازای هر $0 \le r \le k$ ، G دارای زیر گروهی از مرتبه ی p^r است.

(ب) هر دو p – زیر گروه سیلوی G با هم مزدوج هستند .

(ج) اگر $n_p(G)$ تعداد p – زیرگروههای سیلوی G باشد آنگاه $n_p(G) \mid |G|$ و $n_p(G) \equiv 1(\bmod p)$.

برهان : رجوع شود به [12] .

قضیه ۱. ۱. ۱٥

اگر G یک p –گروه متناهی و غیر همانی باشد آنگاه $|Z(G)| > 1$.

برهان : رجوع شود به [12] .

قضیه ۱. ۱. ۱٦

فرض کنید G یک گروه ، $H \lhd G$ و $n_p(H)$ متناهی باشد و $P \in Sly_p(H)$ در این صورت داریم :

$G = HN_G(P)$.

برهان : فرض کنید $g \in G$ بنابراین $P^g \subset H^g = H$. چون $n_p(H)$ متناهی است لذا x ی در H وجود دارد به طوری که $P^{gx} = P$ در نتیجه $gx \in N(P)$ پس $g \in N_G(P)H = HN_G(P)$ لذا $G = HN_G(P)$.

تعریف ۱. ۱. ۱۷

فرض کنید $G \ge H \rhd N$ و K زیرگروهی از G باشد گوییم K یک *مکمل*[1] $\frac{H}{N}$ در G است، اگر $G = HK$ و $H \cap K = N$. در حالت خاص گوییم K یک مکمل از H در G است هرگاه $G = HK$ و $H \cap K = 1$.

اگر $K \lhd G$ در این صورت K را یک مکمل نرمال برای $\frac{H}{N}$ در G می نامیم .

[1] complement

تعریف ۱. ۱. ۱۸

فرض کنید G گروهی متناهی باشد . یک مکمل از p - زیرگروه سیلوی G یک p - مکمل [1] نامیده می شود . بنابراین می توان گفت زیرگروه H از G، p - مکمل است اگر وتنها اگر $|G:H|$ توانی از عدد اول p باشد و p مرتبه ی H را عاد نکند .

تعریف ۱. ۱. ۱۹

فرض کنید π مجموعه ای از اعداد اول باشد و π' مکمل π در مجموعه ی همه ی اعداد اول باشد. در این صورت عدد صحیح n را یک π- *عدد* [2] می نامیم هر گاه تمام مقسوم علیه های اول n متعلق به π باشد .

تعریف ۱. ۱. ۲۰

گروه G را یک π-گروه نامیم هر گاه مرتبه ی هر عضو آن یک π - عدد باشد .

تعریف ۱. ۱. ۲۱

فرض کنید π مجموعه ای از اعداد اول باشد .زیرگروه H از گروه متناهی G را یک *هال* [3] π - زیر گروه می نامیم چنانچه H یک π - زیرگروه و $|G:H|$ یک π' - عدد باشد.

تعریف ۱. ۱. ۲۲

فرض کنید G یک گروه باشد زیرگروه H از گروه G را یک زیرگروه هال می نامیم اگر زیرمجموعه ای از اعداد اول مانند π وجود داشته باشد به طوری که H یک هال π - زیرگروه باشد . توجه داریم که $(\,|H|\,,\,|G:H|\,)=1$.

[1] P- complement
[2] π - Number
[3] Hall

قضیه ۱. ۱. ۲۳

اگر G یک گروه متناهی و A یک زیرگروه نرمال آبلی از G و $(\ |G:H|\ ,\ |A|\ )=1, A\subset H\subset G$ و A دارای مکملی مانند B در H باشد. آنگاه A دارای یک مکمل در G است .

برهان : رجوع شود به [12] .

قضیه ۱. ۱. ۲٤

فرض کنید H زیرگروه هال و نرمال از گروه متناهی G باشد در این صورت H دارای یک مکمل است.

برهان : قضیه را با استقرا روی مرتبه ی G ثابت می کنیم. اگر $|G|=1$ در این صورت حکم بدیهی می باشد حال فرض کنید حکم، برای گروهها با مرتبه ی کمتر ازمرتبه ی G برقرار باشد.

فرض کنید $1\neq Q\in Syl(H)$ بنا به قضیه ی ۱. ۱. ۱۶ داریم : $G=N(Q)H$. حال دو حالت درنظر می گیریم .

(الف) $N(Q)<G$ در این صورت $\frac{G}{H}\cong\frac{N(Q)}{N(Q)\bigcap H}$ پس $N(Q)\bigcap H$ یک زیرگروه هال ونرمال از $N(Q)$ می باشد.لذا بنا به فرض استقرا $N(Q)\bigcap H$ دارای مکملی مانند K در $N(Q)$ می باشد و چون $\left|\frac{G}{H}\right|=|K|$ و $H\bigcap K=1$. در این صورت K مکملی از H در G است.

(ب) $N(Q)=G$ در این صورت $Q\lhd G$ است.حال بنا به قضایای ۱. ۱. ۱۲ و ۱. ۱. ۱۵ داریم که : $A=Z(Q)$ یک زیر گروه نرمال آبلی غیر بدیهی از G است که در H قرار دارد.لذا بنا به فرض استقرا $\frac{H}{A}$ دارای مکملی مانند $\frac{K}{A}$ در $\frac{G}{A}$ می باشد.حال $(\frac{G}{A})\Big/(\frac{H}{A})\cong\frac{G}{H}$ بنابراین A زیرگروه هال ونرمالی از K می باشد.چون A دارای مکمل همانی در A می باشد بنا به قضیه ی۱ . ۱. ۲۳ A دارای مکملی مانند L در K می باشد.چون $|L|=\left|\frac{K}{A}\right|=\left|\frac{G}{H}\right|$ و $H\bigcap L=1$ بنابراین L مکملی از H در G می باشد.

۱. ۲ گروههای حل پذیر[1]

در این قسمت به معرفی گروههای حل پذیر و برخی خواص اساسی آنها می پردازیم .

تعریف ۱. ۲. ۱

گروه G را حل پذیر نامند هر گاه دارای یک سری زیر نرمال به صورت زیر باشد :

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_n = 1$$

به طوری که به ازای هر $i = 0,1,2,\ldots n-1$ ، $\frac{H_i}{H_{i+1}}$ تعویض پذیرند.چنین سری زیر نرمالی یک سری حل پذیر برای G نامیده می شود. توجه داریم اگر G گروهی حل پذیر باشد،آنگاه هر زیرگروه و هر تصویر همریخت آن نیز حل پذیر می باشد. بعلاوه اگر H زیر گروهی نرمال از گروه G باشد. به طوری که H و $\frac{G}{H}$ هر دو حل پذیر باشند. آنگاه G نیز حل پذیر است . (مرجع [۱۲] را ملاحظه کنید)

تعریف ۱. ۲. ۲

فرض کنید G گروهی دلخواه باشد و $a,b \in G$ جابه جاگر a و b عبارت است از عنصر $aba^{-1}b^{-1}$ که با $[a,b]$ نمایش می دهیم.

قرار دهید $A = \{[a,b] : a,b \in G\}$ ، زیرگروه تولیدشده به وسیله ی A را با G' نمایش می دهیم و زیر گروه مشتق[2] G می نامیم .

قضیه ۱. ۲. ۳

فرض کنید a، b و c عناصری دلخواه در گروه G باشند در این صورت داریم :

(الف) $[a,b] = 1 \Leftrightarrow ab = ba$

(ب) $[a,b]^{-1} = [b,a]$

(ج) $a^b = a[a,b]$

(د) $[a,bc] = [a,c][a,b]^c$

---

[1] Solvable
[2] Derived subgroup

(ه) $[ab,c]=[a,c]^b[b,c]$

(ی) $[a,b^{-1},c]^b[b,c^{-1},a]^c[c,a^{-1},b]^a=1$

برهان : رجوع شود به $[12]$.

قضیه ۱. ۲. ٤

فرض کنید H و K زیرگروههایی ازگروه G باشند، در این صورت

(الف) $[H,K]\subset H^G\cap K^G$.

(ب) اگر $H\lhd G$ آنگاه $[H,K]\subset H$، اگر $K\lhd G$ آنگاه $[H,K]\subset K$.

(ج) اگر $H\lhd G, K\lhd G$، آنگاه $[H,K]\lhd G$.

برهان: اگر $b\in K, a\in H$ ، آنگاه $[a,b]=a^{-1}a^b\in H^G$. بنابراین $[H,K]\subset H^G$. به طور مشابه $[H,K]\subset K^G$، پس (الف) ثابت می شود. (ب) به سادگی از (الف) نتیجه می شود.حال فرض کنید $g\in G, b\in K, a\in H$ در این صورت داریم : $[a,b]^g=[a^g,b^g]$ واین (ج) را ثابت می کند.

تعریف ۱. ۲. ۵

فرض کنید G' زیر گروه مشتق گروه G باشد . قرار دهید $G^{(1)}=G'$ و به روش استقرایی تعریف کنید که $G^{(k+1)}={G^{(k)}}'$ زیرگروه مشتق $G^{(k)}$ باشد. به ازای هر عدد صحیح مثبت k، $G^{(k)}$ زیر گروه مشتق k ام G نامیده می شود .

قضیه ۱. ۲. ٦

زیر گروه مشتق G' از گروه G، زیر گروهی نرمال از G است و $\frac{G}{G'}$ آبلی است.

برهان : رجوع شود به $[12]$.

قضیه ۱. ۲. ۷

فرض کنید G' زیر گروه مشتق G و H زیرگروهی از G باشد.در این صورت $G'\subseteq H$ اگر و تنها اگر H زیر گروه نرمال G و $\frac{G}{H}$ آبلی باشد.

برهان : فرض کنید $G' \subseteq H$، $h \in H$ و $a \in G$ در این صورت $aha^{-1}h^{-1} \in G' \subseteq H$. بنابراین $aha^{-1} = (aha^{-1}h^{-1})h \in H$، . از این رو H زیر گروه نرمال G است. حال نشان می دهیم که $\frac{G}{H}$ آبلی است .فرض کنید $aH , bH \in \frac{G}{H}$ در این صورت

$$(aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = aHbHa^{-1}Hb^{-1}H = aba^{-1}b^{-1}H$$

چون $aha^{-1}h^{-1} \in G' \subseteq H$ در نتیجه $(aH)(bH)(aH)^{-1}(bH)^{-1} = H$ بنابراین $aHbH = bHaH$ لذا $\frac{G}{H}$ آبلی است .بالعکس، فرض کنید H در G نرمال و $\frac{G}{H}$ آبلی باشدو $a,b \in G$ در این صورت $(aH)(bH) = (bH)(aH)$ این ایجاب می کند که $a^{-1}b^{-1}ab \in H$. از این رو $G' \subseteq H$.

قضیه ۱. ۲. ۸

فرض کنید G یک گروه باشد .در این صورت G حل پذیر است اگر وتنها اگر عدد صحیح مثبت m ای موجود باشد به طوری که : $G^{(m)} = 1$.

برهان : رجوع شود به [11].

۱. ۳ گروههای پوچ توان[۱]

با توجه به اهمیت گروههای پوچ توان و ارتباط آنها با گروههای حل پذیر در این قسمت به تعریف این گروهها و نتایج اساسی آنها اشاره می کنیم .

تعریف ۱. ۳. ۱

سری $G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n$ از زیرگروههای نرمال گروه G یک سری مرکزی[۲] نامیده می شود هر گاه به ازای هر $i = 0,1,2,\ldots,n-1$، داشته باشیم :

$$G_{i+1}/G_i \subseteq Z(G/G_i)$$

[1] Nilpotent
[2] Central series

تعریف ۱. ۳. ۲

گروه G را پوچ توان نامیم هر گاه G دارای یک سری مرکزی به صورت زیر باشد

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n$$

به طوری که : $G_0 = 1$ و $G_n = G$. به سادگی ملاحظه می شود که هر زیرگروه وهر تصویر همریخت از یک گروه پوچ توان نیز پوچ توان است . و همچنین می دانیم اگر G/N و N پوچ توان باشند، لزوما دلیلی ندارد که G پوچ توان باشد . به عنوان مثال فرض کنید $N = A_3, G = S_3$ ، واضح است که $A_3, S_3/A_3$ پوچ توان هستند ولی S_3 پوچ توان نیست.

تعریف ۱. ۳. ۳

فرض کنید G یک گروه باشد زیرگروههای $\gamma_i(G)$ را به صورت استقرایی زیر تعریف می کنیم :
$\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = [G,G], \dots, \gamma_i(G) = [\gamma_{i-1}(G), G]$ ، $(i \geq 1)$. به آسانی می توان دیدکه سری

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \gamma_3(G) \supseteq \dots$$

یک سری مرکزی است. این سری، سری مرکزی نزولی[1] G نامیده می شود.

قضیه ۱. ۳. ٤

گروه G پوچ توان است اگر وتنها اگر عدد صحیح نامنفی n ای موجود باشد به طوری که : $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

برهان: رجوع شود به [11].

قضیه ۱. ۳. ٥

فرض کنید G گروهی متناهی باشد .در این صورت شرایط زیر معادلند :

(الف) G پوچ توان است.

(ب) هر زیر گروه G یک زیر گروه زیر نرمال G است.

(ج) هر زیر گروه بیشین G یک زیر گروه نرمال G است.

(د) هر زیر گروه سیلوی G یک زیر گروه نرمال G است.

[1] Lower central series

(ه) اگر H زیر گروه سره ی G باشد آنگاه $H \subset N_G(H)$.

(ی) G با حاصل ضرب مستقیم از زیرگروههای سیلویش یکریخت است.

برهان : رجوع شود به [11].

قضیه ۱. ۳. ٦

اگر G یک گروه پوچ توان باشد و $1 \neq H \lhd G$ آنگاه $H \bigcap Z(G) \neq 1$.

برهان: رجوع شود به [12].

۱. ٤ زیرگروههای فراتینی ، فیتینگ و چنددوری

این قسمت اختصاص به معرفی و بیان نتایج مهم و اساسی زیرگروههای فراتینی ، فیتینگ وچنددوری دارد.

تعریف ۱. ٤. ۱

فرض کنید G یک گروه باشد .اشتراک تمام زیرگروههای بیشین G را زیرگروه *فراتینی*[۱] G نامیم و با نماد $\phi(G)$ نشان می دهیم. اگر G شامل هیچ زیر گروه بیشینی نباشد آنگاه تعریف می کنیم $\phi(G) = G$.

تعریف ۱. ٤. ۲

فرض کنید G یک گروه باشد.در این صورت زیرگروه تولید شده به وسیله ی تمام زیرگروههای نرمال پوچ توان آن را زیرگروه *فیتینگ*[۲] گوییم و با $Fit(G)$ یا $F(G)$ نشان می دهیم . اگر G شامل هیچ زیرگروه نرمال پوچ توان غیر بدیهی نباشد آنگاه واضح است که $F(G) = 1$.

قضیه ۱. ٤. ۳

اگر H و K زیرگروههای نرمال و پوچ توانی از گروه G باشند آنگاه HK نیز زیرگروه نرمال و پوچ توانی از G خواهد بود.

[1] Frattini subgroup
[2] Fitting subgroup

برهان : چون H و K زیرگروههای نرمال در G هستند واضح است که HK نیز در G نرمال است. فرض کنید $\gamma_i(HK)=[HK,HK,...,HK]$ ، با استقرار روی i وبا توجه به این که H و K نرمال هستند و با استفاده ازقضیه ی ۱. ۲. ۳ داریم :

$$\gamma_i(HK)=<[A_1,A_2,...,A_i]:A_j=H \text{ یا } K>$$

حال فرض کنید $\gamma_m(K)=1,\gamma_n(H)=1$ باشند .نشان می دهیم که هر مولد $\gamma_{m+n-1}(HK)$ برابر با یک است فرض کنید $[A_1,A_2,...,A_{m+n-1}]$ مولدی از $\gamma_{m+n-1}(HK)$ باشد .در این صورت حداقل n تا از A_i ها برابر با H یا حداقل m تا از A_i ها برابر با K خواهند بود .فرض کنید حداقل n تا از A_i ها برابر با H باشد در این صورت با استفاده ازقضیه ی ۱. ۲. ۴ واین که H و K نرمال هستند، عاملهای K را می توان از مولد حذف کرد. بنابراین داریم : $[A_1,A_2,...,A_{m+n-1}]\subset\gamma_n(H)=1$ پس $\gamma_{m+n-1}(HK)=1$ لذا HK پوچ توان است.

قضیه ۱. ٤. ٤

فرض کنید G یک گروه متناهی و H یک زیرگروه نرمال کمین از G باشد در این صورت $Fit(G)\subset C_G(H)$.

برهان : برای اثبات قضیه دو حالت در نظر می گیریم .

الف) $H\cap Fit(G)=1$

چون H و $Fit(G)$ هر دو زیرگروههای نرمالی از G هستند بنابراین $[H,Fit(G)]\subseteq Fit(G)$ و $[H,Fit(G)]\subseteq H$ لذا $[H,Fit(G)]\subseteq H\cap Fit(G)=1$ بنابراین $[H,Fit(G)]=1$ پس $Fit(G)\subseteq C_G(H)$.

ب) $H\cap Fit(G)\neq 1$

چون H و $Fit(G)$ هر دو زیرگروههای نرمالی از Gهستند لذا $H\cap Fit(G)$ زیرگروه نرمالی از G است حال چون H زیرگروه نرمال کمین بود لذا $H=H\cap Fit(G)$ واین نشان می دهد که $H\subseteq Fit(G)$ حال بنابرقضیه ی ۱. ۳. ۶ داریم : $H\cap Z(Fit(G))\neq 1$ بنابراین $H\subseteq Z(Fit(G))$ لذا $Fit(G)\subset C_G(H)$.

قضیه ۱. ٤. ٥

فرض کنید G یک گروه حل پذیر باشد و H یک زیرگروه بیشین پوچ توان ومشخصه از آن باشد دراین صورت $C_G(H) \subseteq H$.

برهان : فرض کنید طول سری مشتق گروه G برابر با n باشد. در این صورت قضیه را با استقرا روی n ثابت می کنیم.

اگر $n=1$ باشد در این صورت G آبلی است و حکم به وضوح برقرار است.حال فرض کنید قضیه برای تمام گروهها باطول سری مشتق کمتر از n برقرار باشد.

قرار می دهیم $A=G^{(n-1)} \neq 1$ ، A آبلی و زیرگروه مشخصه ای از G می باشد. $C_G(A)$ نیز زیرگروه مشخصه ای از G است. اگر K/A زیرگروه مشخصه و پوچ توانی از $C_G(A)/A$ باشد ، آنگاه $K \overset{c}{\lhd} C_G(A) \overset{c}{\lhd} G$ لذا بنا به قضیه ی۱. ۱. ۱۲ K زیرگروه مشخصه ای از G است و چون $A \subset Z(K)$ ، K پوچ توان است. بنابراین $K \subset H$. این نشان می دهد که اجتماع یک سری از زیرگروههای پوچ توان و مشخصه ی $C_G(A)/A$ دوباره یک زیرگروه پوچ توان ومشخصه از $C_G(A)/A$ می باشد. لذا از لم زورن[1] وقضیه ی۱. ۴. ۳ داریم که : $C_G(A)/A$ دارای یک زیرگروه پوچ توان ومشخصه ی بیشین مانند L/A می باشد. علاوه براین $L \subset H$. حال چون $A \subset L$ است لذا $C_G(L) \subset C_G(A)$. از طرفی چون $C_G(A)/A$ حل پذیر با طول مشتق کمتر از n می باشد ،از فرض استقرا داریم که: $C_{C_G(A)/A}(L/A) \subset L/A$. بنابراین $C_G(L) \subset L$. لذا در پایان داریم : $C_G(H) \subset C_G(L) \subset L \subset H$.

نتیجه ۱. ٤. ٦

اگر G یک گروه متناهی و حل پذیر باشد آنگاه $C_G(Fit(G)) \subseteq Fit(G)$

برهان:از تعریف زیر گروه فیتینگ نتیجه می شود که $Fit(G)$ زیرگروه پوچ توان بیشین از G می باشد، از طرفی زیرگروه مشخصه نیز می باشد لذا بنا به قضیه ی۱. ۴. ۵ حکم برقرار است.

تعریف ۱. ٤. ۷

گروه G را *چند دوری*[2] نامند هر گاه دارای یک سری زیر نرمال به صورت زیر باشد :

---
[1] Zorn lemma
[2] Polycyclic group