وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

رده بندی توپولوژیکی فضاهای توابع $C_p(X)$ با پیچیدگی بورل پایین

توسط:
سمیه هاشمی شهرکی

استاد راهنما:
دکتر محمد ابری

استاد مشاور:
دکتر عباس فخاری

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

رده بندی توپولوژیکی فضاهای توابع $C_p(X)$ با پیچیدگی بورل پایین

توسط:

سمیه هاشمی شهرکی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **خوب**

دکتر محمد ابری استادیار دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر عباس فخاری استادیار دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید علی تقوی استادیار دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر الهه ظهوریان استادیار دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به

بهترین زندگانیم

همسر صبور و فداکارم محمد

سپاسگزاری

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌سار زلال دانش و معرفت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم،**پدر و مادر بزرگوارم** که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

بر خود لازم می‌دانم به پاس زحمات استاد راهنمای گرامی‌ام، **جناب آقای دکتر محمد ابری** که با سعه‌ی صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان‌نامه شدند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از استاد مشاور گرامی‌ام، **جناب آقای دکتر عباس فخاری** که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودند، سپاسگزارم.

از **جناب آقای دکتر علی تقوی** و **جناب آقای دکتر امین اصفهانی** که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، همچنین از خانم دکتر الهه ظهوریان نماینده ی تحصیلات تکمیلی تشکر می‌کنم.

در نهایت، از تمام کسانی که در دوران تحصیل از رهنمودهای ارزشمند ایشان بهرمند شده‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

رده بندی توپولوژیکی فضاهای توابع $C_p(X)$ با پیچیدگی بورل پایین

به وسیله‌ی:
سمیه هاشمی شهرکی

در این پایان نامه ثابت می کنیم که اگر X یک فضای کاملا منظم و غیرگسسته و شمارا باشد به طوری که فضای توابع $C_p(X)$ یک $F_{\sigma\delta}$-مجموعه ی مطلق باشد آنگاه فضای $C_p(X)$ با σ^∞ همسانریخت است.
یکی از کاربردهای این اثبات در این است که مابه چندین مسئله که توسط آرهانگل مطرح شده بود پاسخ منفی دادیم، این کار به وسیله ی مثالهایی از فضاهای کاملا منظم و شمارش پذیر X و Y که X یک b_R-فضا و K-فضا نباشد و همچنین Y نیز یک $\aleph_0$-فضا نباشد در حالی که فضاهای توابع $C_p(X)$ و $C_p(Y)$ با $C_p(N)$ همسانریخت هستند انجام می پذیرد، در جا ئیکه $N = \{0\} \bigcup \{n^{-1} : n = 1, 2, ...\}$.
البته توجه ما در اینجا متمرکز است به حالتی که فضاهای $C_p(X)$ مجموعه های بورل مطلق هستند و رده ی بورلی بالاتر از ۲ ندارند.

واژه های کلیدی: فضای توابع $C_p(X)$ و $C_p^*(X)$ - $F_{\sigma\delta}$مجموعه ها - $G_{\delta\sigma}$مجموعه ها - فیلترهای رسته اول- خاصیت Z_σ فضای توابع $C_p(X)$.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مطالعه ی فضاهای توابع، پیشینه‌ای طولانی دارد. این نظریه هم دارای ریشه‌ی آنالیزی و هم دارای ریشه توپولوژیکی است و مطالعه ی اصولی آن به وسیله ی آرهانگل [۱] آغاز شد.

در آگوست ۱۹۸۵ ریاضیدانانی مانند، دایجکسترا [۲]، گرایلیوت [۳]، لوتزر [۴] و میل [۵] وضعیت بورلی فضای توابع $C_p(X)$ را به عنوان یک زیر مجموعه از فضای حاصل ضربی R^X مورد بررسی قرار دادند. سپس بعد از بررسی پیچیدگی بورلی این فضاها در نوامبر ۱۹۹۱ ریاضیدانان دیگری به نامهای دابرولسکی، [۶] مارسیزوسکی [۷] و مگلسکی [۸] به رده بندی توپولوژیکی این فضاها با پیچیدگی بورل پایین پرداختند.

هدف اصلی ما در این پایان نامه رده بندی فضای توابع $C_p(X)$ با پیچیدگی بورل پایین برای فضای کاملا منظم و شمارای X می باشد. همچنین توجه مان را متمرکز می کنیم به حالتی که این فضاها یک مجموعه بورل مطلق هستند.

برای یک فضای X مجموعه همه ی توابع پیوسته و حقیقی مقدار روی X با توپولوژی همگرایی نقطه وار را با $C_p(X)$ نشان می دهیم، و زیر فضایی از آ ن را که شامل همه ی توابع کراندار است نیز با $C_p^*(X)$ مشخص می کنیم.

[۱] Arhangel' skil

[۲] Dijkstra

[۳] Grilliot

[۴] Lutzer

[۵] Mill

[۶] Dobrowolski

[۷] Marciszewski

[۸] Mogilski

نتیجه ی مهم در این پایان نامه این قضیه است که اگر X یک فضای کاملا منظم و غیرگسسته و شمارا باشد به طوری که فضای توابع $C_p(X)$ یک $F_{\sigma\delta}$-مجموعه ی مطلق باشد آنگاه فضای $C_p(X)$ با σ^∞ همسانریخت است،

جا ئیکه $\sigma = \{(x_i) \in R^\infty : x_i = ۰ ,\ \mathrm{i}$ برای همه به جز تعداد متناهی $\}$.

بنابراین این قضیه رده بندی توپولوژیکی کاملی از فضاهای $C_p(X)$ که رده ی بورلی بالاتر از ۲ ندارند ارائه می دهد.

مرحله اصلی در رده بندی فضاهای $C_p(X)$ حالتی است که فضای شمارای X دقیقا یک نقطه ی غیر تنها داشته باشد. چنین X ای فضای $N_F = \{\infty\} \bigcup \{۰, ۱, ۲, ...\}$ است که توپولوژی آن به وسیله ی مجزا نمودن نقاط $N = \{۰, ۱, ۲, ...\}$ و همچنین استفاده از خانواده ی $\{A \bigcup \{\infty\} : A \in F\}$ به عنوان یک پایه همسایگی در ∞ مشخص می شود، جا ئیکه F یک فیلتر روی N می باشد.

در فصل اول به بیان برخی مفاهیم پایه و مقدماتی از جمله توپولوژی و همچنین خاصیت بئر فضای توابع و وضعیت بورلی فضای توابع $C_p(X)$ در R^X می پردازیم.

در فصل دوم به معرفی فیلتر های رسته اول و خاصیت Z_σ-فضاهای توابع می پردازیم، و ثابت می کنیم که بعضی از فضاهای $C_p(X)$ و زیر فضاهایشان Z_σ-فضا هستند.

نشان می دهیم برای هر فضای شمارا، نامتناهی و کاملا منظم X فضای توابع $C_p^*(X)$ نیز یک Z_σ- فضا است.

در فصل سوم یک رده بندی توپولوژیکی از فضاهای دنباله ای c_F که $F_{\sigma\delta}$-مجموعه های مطلق هستند، و F نیز فیلتر آزاد می باشد، را ارائه می دهیم. همچنین قضیه ی اصلی در باره ی رده بندی توپولوژیکی فضاهای $C_p(X)$ را ثابت می کنیم.

در فصل آخر، با بکار بردن این قضیه ی اصلی به چندین سوال مطرح شده به وسیله ی آ رهانگل پاسخ می دهیم.

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ توپولوژی عمومی

این فصل را به مرور برخی مفاهیم پایه و مقدماتی که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند، اختصاص می‌دهیم. در بخش اول بعضی از مفاهیم ابتدایی توپولوژی عمومی را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. یک توپولوژی در مجموعه‌ی X گردایه‌ای مانند $\mathcal{T}$ از زیر مجموعه‌های X است به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\emptyset$ و X به $\mathcal{T}$ متعلق هستند.
(۲) اجتماع اعضای هر زیر گردایه‌ی $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ است.
(۳) اشتراک اعضای هر زیر گردایه‌ی متناهی $\mathcal{T}$ متعلق به $\mathcal{T}$ است.

مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی $\mathcal{T}$ را فضای توپولوژیک گوییم و آنرا با $(X, \mathcal{T})$ نشان می‌دهیم. هر عضو $\mathcal{T}$ را یک مجموعه‌ی باز در این توپولوژی نامیم.

به عنوان مثال اگر X مجموعه ی دلخواهی باشد، آن گاه گردایه ی همه ی زیر مجموعه های آن تشکیل توپولوژی در X می دهد که به توپولوژی گسسته موسوم است.
همچنین گردایه ای از زیر مجموعه های X که فقط شامل X و $\emptyset$ باشد نیز یک توپولوژی در X است که ما آن را توپولوژی ناگسسته یا توپولوژی بیمایه می گوییم.

تعریف ۲.۱.۱. خانوادهی $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$را یک پایه برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ گوییم هرگاه هر زیر مجموعه ی ناتهی باز X را بتوان به صورت اجتماع زیر خانواده ای از $\mathcal{B}$نمایش داد.

هر پایهی $\mathcal{B}$ دارای ویژگیهای زیر است:

(۱) برای هر $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ و هر $x \in U_1 \bigcap U_2$، مجموعهی $U \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که $x \in U \subset U_1 \bigcap U_2$.

(۲) برای هر $x \in X$ مجموعهی $U \in \mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که$x \in U$.

به عنوان مثال به ازای هر مجموعه ی دلخواه X، گردایه ی همه ی زیر مجموعه های یک عضوی X پایه ای برای توپولوژی گسسته درX است.

به سادگی معلوم است که خانوادهی $\mathcal{B}$ از زیر مجموعههای X یک پایه برای فضای توپولوژیک $(X, \mathcal{T})$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ و برای هر نقطهی $x \in X$ و هر همسایگی $V \subset X$ از x، مجموعهی $U \in \mathcal{B}$ وجود داشته باشد به طوری که $x \in U \subset V$.

همچنین گردایه ζ از زیر مجموعه های X را یک زیر پایه برای یک توپولوژی بر X می نامیم اگر اجتماع اعضای آن برابر X باشد.
در این صورت توپولوژی تولید شده به وسیله ی زیر پایه ζ عبارت است از گردایه ی $\mathcal{T}$ متشکل از همه ی اجتماع های مقاطع متناهی اعضای ζ .

تعریف ۳.۱.۱. اگر برای هر $x \in X$ مجموعهی باز $U \subset X$ وجود داشته باشد که $x \in U$ آنگاه U را همسایگی x گوییم و خانوادهی $\mathcal{B}(x)$ از همسایگی نقطهی x را همسایگی پایهای برای نقطهی x گوییم هرگاه برای هر همسایگی V از x، مجموعهی $U \in \mathcal{B}(x)$ وجود داشته باشد به طوری که :

$$x \in U \subset V$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر X و Y دو فضای توپولوژیک باشند. توپولوژی حاصل ضربی در $X \times Y$ توپولوژی است که پایه ی آن گردایه ی $\mathcal{B}$ متشکل از همه ی مجموعه هایی به صورت$U \times V$ است

که در آن U زیر مجموعه ی بازی از X و V زیر مجموعه ی بازی از Y است.

قضیه ۵.۱.۱. *اگر $\mathcal{B}$ پایه ای برای توپولوژی X و C پایه ای برای توپولوژی Y باشد آنگاه گردایه ی*

$$D = \{b \times c | b \in C, c \in \mathcal{B}\}$$

پایه ای برای توپولوژی $X \times Y$ است.

اثبات. به منبع [۱۳] مراجعه کنید.

□

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $\pi_{۱} : X \times Y \longrightarrow X$ با ضابطه ی

$$\pi_{۱}(x, y) = x$$

و $\pi_{۲} : X \times Y \longrightarrow Y$ با ضابطه ی

$$\pi_{۲}(x, y) = y$$

تعریف شده باشند. نگاشتهای $\pi_{۱}$ و $\pi_{۲}$ به ترتیب نگاشتهای تصویری $X \times Y$ بروی عوامل اول و دوم آن خوانده می شوند.
حال اگر U زیر مجموعه ی بازی از X باشد، آ نگاه $\pi_{۱}^{-۱}(U)$ دقیقا مجموعه ی $U \times Y$ است که در $X \times Y$ باز است. همچنین اگر V در Y باز باشد آنگاه

$$\pi_{۲}^{-۱}(V) = X \times V$$

که این نیز در $X \times Y$ باز است.

قضیه ۷.۱.۱. *گردایه‌ی*

$$\mathcal{S} = \{\pi_{۱}^{-۱}(U) | \text{باز است } X \text{ در } U\} \bigcup \{\pi_{۲}^{-۱}(V) | \text{باز است } Y \text{ در } V\}$$

زیر پایه ی توپولوژی حاصل ضربی در $X \times Y$ است .

اثبات. به منبع [۱۳] مراجعه کنید.

□

قضیه ۸.۱.۱. *اگر A زیر فضایی از X و B زیر فضایی از Y باشد آنگاه توپولوژی حاصل ضربی در $A \times B$ همان توپولوژای است که در $A \times B$ به عنوان یک زیر فضای $X \times Y$ القا می شود.*

اثبات. مجموعه ی $U \times V$ نوعی عضو پایه ای در $X \times Y$ است که در آن U در X و V در Y باز است.

بنابراین مجموعه ی $(U \times V)\bigcap(A \times B)$ نوعی عضو پایه ای در توپولوژی زیر فضایی $A \times B$ است.

حال ملاحظه می کنیم که

$$(U \times V)\bigcap(A \times B) = (U\bigcap A) \times (V\bigcap B)$$

چون $(U\bigcap A)$ و $(V\bigcap B)$ به ترتیب مجموعه های باز توپولوژی های زیر فضایی در A و B هستند، مجموعه ی $(U\bigcap A) \times (V\bigcap B)$ عضو پایه ای در توپولوژی حاصل ضربی $A \times B$ است.

□

در قسمتهای قبلی توپولوژی در حاصل ضرب دو فضای توپولوژیک $X \times Y$را تعریف کردیم حال می خواهیم این تعریف را به حاصل ضرب های دکارتی دلخواه تعمیم دهیم.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{S}_\beta$ نمایش گردایه ی

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) | \text{بازاست } X_\beta \text{ در} U_\beta\}$$

و $\mathcal{S}$ نمایش اجتماع این گردایه ها باشد

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$$

در این صورت توپولوژی تولید شده به وسیله ی زیر پایه ی $\mathcal{S}$ را توپولوژی حاصل ضربی می خوانیم.
در این توپولوژی $\Pi_{\alpha \in J} X_\alpha$ ، رافضای حاصل ضربی می نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنیم در هر فضای X_α توپولوژی ای به وسیله ی پایه ای مانند $\mathcal{B}_\alpha$ داده شده باشد. گردایه همه مجموعه هایی به صورت*

$$\Pi_{\alpha\in J}B_\alpha$$

که در آن به ازای تعدادی متناهی از اندیسهای α ، $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ و به ازای بقیه ی اندیسها $B_\alpha = X_\alpha$ تشکیل پایه ای برای توپولوژی حاصل ضربی در $\Pi_{\alpha\in J}X_\alpha$ می دهد.

مثال ۱۱.۱.۱. اگر فضای n بعدی اقلیدسی R^nرا در نظر بگیریم. همه ی بازه های باز R تشکیل پایه ای برای R می دهند.
بنابراین یک پایه ی توپولوژی R^n از همه ی حاصل ضرب هایی به صورت

$$(a_۱, b_۱) \times (a_۲, b_۲) \times ... \times (a_n, b_n)$$

تشکیل می شود.

حال برخی از مفاهیم اساسی مربوط به فضای توپولوژیک راتعریف می کنیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. مجموعه‌ی $V \subset X$ را یک مجموعه‌ی باز گوییم اگر وتنها اگر برای هر $x \in V$ همسایگی U_x از x وجود داشته باشد به طوری که $V \subset U_x$.

همچنین مجموعه‌ی $F \subset X$ را بسته گوییم هرگاه $X - F$ باز باشد.مجموعه‌ای که هم بسته و هم باز باشد را مجموعه‌ی بسته-باز گوییم.

به طور مثال در صفحه ی $R \times R$ ،مجموعه ی زیر بسته است.

$$\{X \times Y | Y \geq ۰, X \geq ۰\}$$

زیرا متمم آن اجتماع دو مجموعه ی $R \times (-\infty, ۰)$و $(-\infty, ۰) \times R$ است که هریک از آن ها حاصل ضرب مجموعه ها ی بازی از R هستند و در نتیجه در $R^۲$ بازند.
همچنین در توپولوژی گسسته ی مجموعه ی X هر مجموعه باز است، در نتیجه هر مجموعه بسته نیز

است.

واضح است که اگر X یک فضای توپولوژی و C خانواده ای از مجموعه های بسته باشد شرایط زیر برقرار است:

(۱) $X \in C$،$\emptyset \in C$

(۲) اگر $F_1, F_2 \in C$ آنگاه $F_1 \bigcup F_2 \in C$

(۳) اشتراک هر خانواده از مجموعه های بسته مجموعه ای بسته است.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم A زیرمجموعه ای از فضای توپولوژیک X باشد.بنابر تعریف، اجتماع همه‌ی مجموعه‌های باز مشمول در A را درون A می‌گوییم، و با A° یا $IntA$ نشان می‌دهیم.

همچنین اگر A زیرمجموعه ای از فضای توپولوژیک X و x نقطه ای از A باشد آنگاه x را یک نقطه ی حدی یا نقطه ی انباشتگی مجموعه A گوییم در صورتی که هر همسایگی x مجموعه A را در نقطه ای غیر از خود x قطع کند.

تعریف ۱.۱.۱۴. اگر d متریکی روی مجموعه‌ی X باشد آنگاه گردایه‌ی همه‌ی ε- گوی‌های $B_d(x, \varepsilon)$، به ازای $x \in X$ و $\varepsilon > 0$، پایه‌ای برای یک توپولوژی در X است که به توپولوژی متری القا شده به وسیله‌ی d موسوم است.

ملاحظه ۱.۱.۱۵. مجموعه ی U در توپولوژی متری القا شده به وسیله ی d باز است اگر و فقط اگر به ازای هر Y، عدد مثبتی مانند δ یافت شود که:

$$B_d(Y, \delta) \subset U$$

بدیهی است که این شرط مستلزم آن است که U باز باشد.
بعکس اگر U باز باشد، حاوی عضو پایه ای $B = B_d(x, \varepsilon)$ است که شامل Y است، و B نیز به نوبه ی خود حاوی عضو پایه ای دیگری مانند $B_d(Y, \delta)$ به مرکز Y است.

تعریف ۱.۱.۱۶. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد، X را در صورتی متریک‌پذیر گوییم هرگاه متریکی مانند d در X وجود داشته باشد که توپولوژی X را القا کند.
بنابراین یک فضای متری عبارت است از فضایی متری پذیر مانند X همراه بامتریک مشخص d که توپولوژی X را تولید می کند.

به طور مثال فضای R^n و فضای R^ω که عبارت است از حاصل ضرب نامتناهی شمارای R در خودش فضاهای متری پذیر هستند.

حال به تعریف پیوستگی توابع و بررسی برخی از خواص آن ها می پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم $(X,\mathcal{T})$ و $(Y,\mathcal{T}')$ دو فضای توپولوژیک باشند؛ نگاشت f از X به Y را پیوسته می‌نامیم هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $U \in \mathcal{T}'$ داشته باشیم $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$، یعنی برای هر مجموعه‌ی باز $U \subset Y$ ، $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

توجه کنیم که نگاشت f در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته است هرگاه برای هر مجموعه‌ی باز $V \subset Y$ از $f(x)$، همسایگی $U \subset X$ از x وجود داشته باشد به طوری که $f(U) \subset V$.
به عنوان مثال اگر X یک فضای گسسته باشد، آنگاه هر نگاشت از X به فضای توپولوژیک Y پیوسته است.

قضیه ۱.۱.۱۸. *فرض کنیم $f : A \longrightarrow \Pi_{\alpha\in j} X_\alpha$ تابعی باشد باضابطه ی*

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha\in j}$$

که در آن به ازای هر α ، $f_\alpha : A \longrightarrow X_\alpha$ و ΠX_α دارای توپولوژی حاصل ضربی باشد. در این صورت تابع f پیوسته است اگر وفقط اگر هر f_α پیوسته باشد.

اثبات. به [۱۳] مراجعه کنید.

□

مثال ۱.۱.۱۹. فضای R^ω را که عبارت است از حاصل ضرب نامتناهی شمارای R در خودش در نظر می گیریم .
می دانیم که

$$R^\omega = \Pi_{n\in Z} X_n$$

که در آن به ازای هر n ، $X_n = R$.

اکنون تابع $f : R \longrightarrow R^\omega$ را با ضابطه ی

$$f(t) = (t, t, t, ...)$$

تعریف می کنیم که تابع مختصی n ام آن تابع $f_n(t) = t$ است.
هر یک از توابع مختصی $f_n : R \longrightarrow R$ پیوسته است. بنابراین در صورتی که R^ω از توپولوژی حاصل ضربی برخوردار باشد تابع پیوسته است.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنیم X فضای توپولوژیک و $\{f_i\}$ دنباله‌ای از توابع از X به R (از X به I) باشد. گوییم دنباله‌ی $\{f_i\}$ همگرای یکنواخت به تابع حقیقی مقدار f است هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد طبیعی k وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in X$ و $i \geq k$ داشته باشیم $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon$.

قضیه ۱.۱.۲۱. *اگر دنباله‌ی $\{f_i\}$ از توابع پیوسته از X به R (از X به I) همگرای یکنواخت به تابع حقیقی مقدار f باشند، آنگاه f یک تابع پیوسته از X به R (از X به I) است.*

اثبات. [۱۳] را ببینید.

□

تعریف ۱.۱.۲۲. نگاشت دوسویی (یک به یک و پوشا) $f : X \to Y$ همسانریختی نامیده می‌شود هرگاه f و $f^{-۱}$ پیوسته باشند.
دو فضای توپولوژیک X و Y را همسانریخت گوییم هرگاه یک همسانریختی از X به Y وجود داشته باشد.

بدیهی است که برای هر فضای X نگاشت همانی $id_X : X \to X$ همسانریختی است. همچنین اگر f همسانریختی باشد، f^{-1} نیز همسانریختی خواهد بود. اگر $f : X \to Y$ یک همسانریختی باشد، آنگاه دنباله‌های همگرای فضاهای X و Y با هم متناظرند. به عبارت دقیقتر، به ازای هر دنباله‌ی (x_n) در X داریم:

$$(x_n \to x) \Longleftrightarrow (f(x_n) \to f(x))$$

گزاره ۲۳.۱.۱. *برای هر نگاشت یک به یک f از فضای توپولوژیک X بروی فضای توپولوژیک Y گزاره‌های زیر هم ارز هستند.*

(۱) *نگاشت f همسانریختی است.*

(۲) *نگاشت f بسته است.*

(۳) *نگاشت f باز است.*

(۴) *مجموعه‌ی $f(A)$ در Y بسته است اگر و تنها اگر A در X بسته باشد.*

(۵) *مجموعه‌ی $f^{-1}(B)$ در X بسته است اگر و تنها اگر B در Y بسته باشد.*

(۶) *مجموعه ی $f(A)$ در Y باز است اگر و تنها اگر A در X باز باشد.*

(۷) *مجموعه‌ی $f^{-1}(B)$ در X باز است اگر و تنها اگر B در Y باز باشد.*

اثبات. [۱۳] را ببینید.

□

به سادگی معلوم است که برای دو فضای متریک E و F اگر $f : E \to F$ تابع دوسویی باشد به طوری که f پیوسته و E فشرده باشد، آنگاه f یک همسانریختی است.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته ی یک به یک باشد که در آن X و Y دو فضای توپولوژیک اند.

اکنون فرض کنیم Z مجموعه ی تصویر$f(X)$ باشد و آن را به عنوان یک زیر فضای Y در نظر می گیریم. در این صورت، تابع $f' : X \to Z$ که از تحدید حوزه ی مقادیر f به دست می آید دوسویی است.

اگر f' همسانریختی بین X و Z باشد می گوییم نگاشت $f : X \to Z$ یک نشاننده ی توپولوژیک یا

مختصرا یک نشاننده ی X در Y است.

مثال ۲۵.۱.۱. تابع دوسویی $f : X \to Y$ می تواند پیوسته باشد بی آنکه همسانریخت باشد.
مثلا فرض کنیم $S^۱$ دایره ی واحد

$$S^۱ = \{(X, Y) \in R^۲ | X^۲ + Y^۲ = ۱\}$$

باشد که به عنوان یک زیر فضای $R^۲$ است.
حال فرض می کنیم $f : [۰, ۱) \to S^۱$ نگاشتی با ضابطه ی $f(t) = (cos ۲\pi t, sin ۲\pi t)$ باشد
پیوستگی و دوسویی بودن f از خواص شناخته شده ی توابع مثلثاتی نتیجه می شود، ولی تابع $f^{-۱}$
پیوسته نیست.

همچنین تابع

$$g : [۰, ۱) \to R^۲$$

را که از گسترش حوزه ی مقادیر تابع f در مثال قبل به دست آمده است در نظر می گیریم. نگاشت g
مثالی است از نگاشت پیوسته یک به یکی که نشاننده نیست.

تعریف ۲۶.۱.۱. گوییم فضای X در نقطه ی x پایه ی شمارا دارد هرگاه گردایه ی شمارایی از همسایگی های x مانند $\mathcal{B}$ موجود باشد به طوری که هر همسایگی x دست کم حاوی یک عضو این گردایه باشد.
اگر فضایی در هر نقطه اش یک پایه ی شمارا داشته باشد گوییم در اولین اصل شمارایی صدق می کند.

پر اهمیت تر از اولین اصل شمارایی دومین اصل شمارایی می باشد که به صورت زیر تعریف می شود.
هرگاه توپولوژی فضای X دارای پایه ای شمارا باشد آنگاه گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می کند. توجه کنیم که هر فضای شمارا و شمارای اول، شمارای دوم است.

بدیهی است که دومین اصل مستلزم اولی است :