بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه:

یک الگوریتم سیمپلکس پایه ناقص اولیه برای برنامه ریزی خطی

سمانه یوسفی

استاد راهنما :

دکتر محبوبه حسین یزدی

استاد مشاور:

دکتر بهمن یوسفی

اردیبهشت ۱۳۹۳

تاریخ : ۹۳/۰۲/۲۴
شماره : ۰۵/۱۶۲۷۷
پیوست : ....

(ج)
جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه پیام نور استان فارس

دانشگاه پیام نور شیراز

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد خانم **سمانه یوسفی** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **تحقیق در عملیات** به شماره دانشجویی **۹۰۹۷۳۲۲۲۸** با عنوان:

" یک الگوریتم سیمپلکس پایه ناقص اولیه برای برنامه‌ریزی خطی"

با حضور هیات داوران در روز **چهارشنبه** مورخ **۹۳/۰۲/۲۴** ساعت **۸** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۸٫۳ به حروف هجده و سه دهم با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	راهنما	استادیار	پیام‌نور شیراز	
۲	دکتر بهمن یوسفی	مشاور	استاد	پیام‌نور شیراز	
۳	دکتر جهانگیر چشم‌آور	داور	استادیار	پیام‌نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام‌نور شیراز	

از طرف

معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان،بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۶۲۲۲۲۵۵ - ۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹ - ۰۷۱۱
صندوق پستی: ۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب سمانه یوسفی دانشجوی ورودی سال ۱۳۹۰مقطع کارشناسی ارشد رشته‌ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر ، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و ماخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود .

دانشجو تائید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است .

سمانه یوسفی

تاریخ و امضاء ۱۳۹۳/۲/۳۰

اینجانب سمانه یوسفی دانشجوی ورودی سال ۱۳۹۰ مقطع کارشناسی ارشد رشته رشته ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات) گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله ، کتاب ، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما ، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله ، کتاب ، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم .

سمانه یوسفی

تاریخ و امضاء ۱۳۹۳/۲/۳۰

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه مطعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

اردیبهشت ۱۳۹۳

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

سپاسگزاری

اکنون که این رساله به پایان رسیده است بر خود واجب می‌دانم که از کمکها و حمایتهای بی‌دریغ استاد ارجمند سرکار خانم دکتر حسین یزدی کمال تشکر و قدردانی را نمایم که هدایت، راهنمایی و لطف ایشان در انجام این پایان‌نامه همراه من بوده است. همچنین از جناب آقای دکتر یوسفی و جناب آقای دکتر چشم‌آور که مرا در پیشبرد این کار یاری رساندند نهایت تشکر را دارم.

چکیده

مسائل برنامه‌ریزی خطی در مقیاس بزرگ در دنیای واقعی به طور معمول دارای تبهگنی شدید هستند. این تبهگنی حل مسائل را توسط الگوریتم سیمپلکس با مشکلاتی روبرو می‌سازد. الگوریتم سیمپلکس پایه ناقص، که در این پایان‌نامه توضیح داده شده است بطور بالقوه از پایداری بیشتری نسبت به الگوریتم سیمپلکس در حل مسائل تبهگن برخوردار است.

پایه استاندارد یا پایه مربعی نقش مهمی را در الگوریتم سیمپلکس ایفا می‌کند. در این پایان نامه به نوعی پایه‌های مربعی به پایه ناقص بسط داده شده است. پایه ناقص پایه‌ای است که تعداد ستون‌های ماتریس پایه کمتر از تعداد سطرها ی ماتریس ضرائب می‌باشد.

در این پایان نامه الگوریتمی برای مسائل تباهیده که به طور معمول پایه ناقص تولید می‌کنند بیان شده است. سپس با استفاده از نرم‌افزار متلب، یک برنامه برای اجرای این الگوریتم ارائه شده است. مثالهای عددی نیز برای واضح شدن الگوریتم و برنامه ارائه شده است.

واژگان کلیدی:

برنامه ریزی خطی در مقیاس بزرگ، الگوریتم سیمپلکس، تباهیدگی اولیه، پایه ناقص، تجزیه LU.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

مقدمه

برنامه ریزی خطی با بهینه سازی (مینیمم سازی یا ماکسیمم سازی) یک تابع خطی همراه با محدودیت‌های تساوی و یا نامساوی، سروکار دارد. برنامه ریزی خطی ویژگی‌های متعددی دارد، از جمله توانمندی مدل سازی مسائل بزرگ وپیچیده و نیز بکارگیری کامپیوترهای نسل جدید درحل مسائل بزرگ با استفاده از الگوریتم‌های کارا، مسأله برنامه ریزی خطی را ابتدا **جرج. بی. دانتزیک**[1] در حدود سال ۱۹۴۷ ابداع کرد. در سال ۱۹۴۹ **دانتزیک** " روش سیمپلکس " را برای حل برنامه‌های خطی به چاپ رساند.

پن[2] در سال ۱۹۹۸*([۱۲])* مفهومی از پایه ناقص اولیه را به طور رسمی معرفی کرد و الگوریتم سیمپلکس پایه ناقص اولیه را با استفاده از تجزیه QR شرح داد.. سپس این الگوریتم با استفاده از تجزیه LU همراه با یک روش فاز یک جدید اصلاح شد *([۱۴])*. با توجه به مسائل LP که در آنها $n-m$ نسبت به m کوچک است، یک الگوریتم اولیه جدید، با استفاده از تجزیه QR ارائه شده است *([۱۵])*، سپس نگرش بر الگوریتم سیمپلکس با استفاده از تجزیه LU طرح می‌شود *([۱۳])*. اجراهای متراکم، از جدول‌های چنین الگوریتم‌هایی به طور مطلوب در آزمایشات محاسباتی ارائه می-شود. از طرف دیگربه نظر می‌رسد استفاده از پایه ناقص نه تنها برای الگوریتم اولیه، بلکه برای دوگان هم سودمند است *([۱۸])*. اخیراً نتایج مفیدی درباره یک الگوریتم دوگان پایه ناقص و اجراهای تنک آن بدست آمده است *([۱۹])*.

الگوریتم سیمپلکس دید عمیقی از تئوری برنامه ریزی خطی فراهم می‌آورد و در عمل الگوریتم کارایی را بدست می‌دهد و همچنین در الگوریتم سیمپلکس، پایه استاندارد، نقش مهمی را ایفا می‌کند و اخیراً این پایه به پایه ناقص (با ستون های کمتر از سطرها) بسط داده شده است. الگوریتم سیمپلکس بکاررفته در این پایان نامه شامل پایه ناقص است.

---

[1] *George B.Dantzig*

[2] *Ping-Q-pan*

اغلب مسائل برنامه ریزی خطی جهان واقعی که اغلب تباهیده یا به شدت تباهیده هستند، توسط این الگوریتم سیمپلکس (پایه ناقص) حل می‌شوند.

در این پایان‌نامه، یک الگوریتم سیمپلکس پایه ناقص اولیه با استفاده از تجزیه LU مستطیلی طرح می‌کنیم. می‌خواهیم مسأله برنامه ریزی خطی (LP) در فرم استاندارد را با استفاده از الگوریتم سیمپلکس پایه ناقص اولیه شرح دهیم.

در این پایان‌نامه تا پایان فرض بر این است که مسائل برنامه‌ریزی خطی، محدود و شدنی‌اند.

فصل اول

۱–۱ مقدمه:

در این فصل، تعاریف اولیه و مسأله برنامه ریزی خطی و تجزیه LU وتباهیدگی‌وقواعد ممانعت از دوری را معرفی می‌کنیم. مساله برنامه ریزی خطی با بهینه سازی (ماکزیمم سازی یا مینیمم سازی) یک تابع خطی همراه با محدودیت‌های تساوی و یا نامساوی، سروکار دارد.

۱–۲ تعاریف و پیش‌نیازها

۱–۲–۱ تعریف

برنامه خطی استاندارد، یعنی یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است که همه محدودیت‌ها به صورت تساوی و همه متغیرها نامنفی باشد. روش سیمپلکس به گونه‌ای طراحی شده است که فقط پس از این که مسأله به شکل استاندارد درآمد، به کاربرده می‌شود. روش سیمپلکس برای حل برنامه‌های خطی که متغیرهای نامنفی دارند طراحی شده است.

۱–۲–۲ تعریف

مجموعه بردارهای $a_۱, a_۲,\dots, a_\mathrm{k}$ با بعدn مستقل خطی گفته می‌شود اگر $\sum_{\mathrm{j}=۱}^{\mathrm{k}} \lambda_\mathrm{j} \mathrm{a}_\mathrm{j} = ۰$

نتیجه دهد $\boldsymbol{\lambda}_\mathrm{j} = ۰$ به ازای $j = ۱,۲, \dots \dots, k$.

۱–۲–۳ تعریف

مجموعه بردارهای $a_۱, a_۲,\dots, a_\mathrm{k}$ در $\mathbb{R}^n$ مولد گفته می‌شود اگر به ازای هر بردار مفروض b در، $\mathbb{R}^n$ بتوانیم اسکالرهای $\boldsymbol{\lambda_1}, \boldsymbol{\lambda_2}, \dots\dots, \boldsymbol{\lambda}_\mathbf{k}$ را به طریقی پیدا کنیم که $b = \sum_{\mathrm{j}=۱}^{\mathrm{k}} \boldsymbol{\lambda}_\mathrm{j} \mathrm{a}_j$.

۱–۲–۴ تعریف

مجموعه بردارهای $a_۱, a_۲,\dots, a_\mathrm{k}$ پایه ای برای $\mathbb{R}^n$تشکیل می‌دهند اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱– مجموعه بردارهای $a_۱, a_۲,\dots, a_\mathrm{k}$ مولد $\mathbb{R}^n$ باشند.

۲- اگر یکی از بردارها را حذف کنیم، مجموعه بردارهای باقی‌مانده دیگر مولد $\mathbb{R}^n$ نباشند.

۱-۲-۵ تعریف

رتبه سطری ماتریس A را مساوی با ماکزیمم تعداد سطرهای مستقل خطی A تعریف می‌کنیم به همین ترتیب رتبه ستونی ماتریس A ماکزیمم تعداد ستون‌های مستقل خطی A است.

۱-۲-۶ تعریف

اگر تعداد ستون‌های ماتریس پایه کمتر از تعداد سطرهای ماتریس ضرائب باشد آن را پایه ناقص می‌نامیم.

۱-۲-۷ تعریف

یک مسأله را تنک گوییم، هرگاه تعداد عناصر صفر، در ماتریس ضرائب، نسبت به عناصر ناصفر بسیار زیاد باشد.

۱-۳ مساله برنامه ریزی خطی:

مسأله برنامه ریزی خطی (LP) در فرم استاندارد را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\min \quad C^T X$$

$$\text{S.to } \; \text{Ax} = \text{b} \;,\; X \geq ۰ \qquad (۱-۱)$$

جائیکه$(m < n)$ $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، اعداد سمت راست$b \in \mathbb{R}^{\text{m}}$ و مقدار$C \in \mathbb{R}^n$ همگی بردار-های ناصفر هستند.

دراینجاC^TX تابع هدف است که باید بهینه شود و آن را با حرف Z نشان می‌دهیم. ضرائب c_1، ... ،c_n ضرائب هزینه (معلوم) هستند. X_1، ... ،X_n متغیرهای تصمیم می‌نامیم که باید مشخص شوند. A را ماتریس محدودیت‌ها گویند. b بردار سمت راست نامیده می‌شود.

تاکید می‌کنیم که فرضی روی A نداریم به جز $1 \leq Rank(A) \leq m$ باشد. فرم ماتریسی این ضرائب به صورت زیر است:

$$C = \begin{pmatrix} c_1, \dots, c_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

مساله LP (۱-۱) را به فرم زیر هم می‌توان نوشت:

$$min \quad C_B^T X_B + C_N^T X_N$$

$$S.to \quad BX_B + NX_N = b$$

$$X_N \geq 0 \quad \text{و} \quad X_B \geq 0$$

فرض کنید$A = [B, N]$ که در آن ماتریس B ستون ضرائب پایه فعلی با s ستون$(1 \leq s \leq m)$ وماتریس N ماتریس ضرائب متغیرهای غیر پایه‌ای متناظر با آن باشد.

تعریف می‌کنیم j_i اندیس مربوط به i امین ستون B و k_j اندیس مربوط به j امین ستون از N باشد.

$$N = \{k_1, \dots, k_{n-S}\} \qquad , \qquad B = \{j_1, \dots, j_s\}$$

۱-۴ تباهیدگی:

جواب $X = \begin{pmatrix} X_B \\ X_N \end{pmatrix}$ را یک جواب پایه‌ای برای دستگاه $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ می‌نامیم هرگاه , $X_\mathrm{B} = \mathrm{B}^{-۱}\mathrm{b}$ $\mathrm{X_N} = ۰$. اگر $X_\mathrm{B} \geq ۰$ آن وقت X را جواب پایه‌ای شدنی دستگاه می‌گویند. B در اینجا ماتریس پایه و N را ماتریس غیر پایه می‌نامند.

اگر $X_\mathrm{B} > ۰$ آن گاه X جواب پایه‌ای شدنی ناتباهیده گفته می‌شود و اگر حداقل یکی از مولفه-های X_B صفر باشد آن گاه X جواب پایه‌ای شدنی تباهیده نامیده می‌شود.

اگر یک نقطه راسی بیش از یک پایه داشته باشدآن‌گاه آن نقطه تباهیده است. مرحله‌ای که از یک پایه به پایه مجاور حرکت می‌کنیم وهر دو پایه یک نقطه رأسی را ارائه دهندتکرار را تباهیده یا محورگیری تباهیده گوییم.

اجرای دنباله‌ای از محورگیری تباهیده ما را در دور بسته‌ای قرار می‌دهد که تمام آنها یک نقطه رأسی، و بنابراین با مقدار تابع هدف ثابت را نشان می‌دهند. چنین پدیده‌ای دور گفته می‌شود. محورگیری از طریق دنباله پایه‌های متناظر $\mathrm{B}_۱$،$\mathrm{B}_۲$، ...، B_t که در آن $B_۱ = \mathrm{B_t}$ انجام می‌گیرد. اگر همین دنباله از محورگیری دوباره ودوباره بکار رود برای همیشه بین پایه‌های $\mathrm{B}_۱$،$\mathrm{B}_۲$، ...، B_t $\mathrm{B}_۱ = B_\mathrm{t}$ بدون رسیدن به جواب بهینه دور می‌زنیم.

در ناتباهیدگی (و با قبول شدنی بودن مسأله) روش سیمپلکس در تعداد متناهی تکرار با یک جواب شدنی پایه بهینه متناهی یا با این نتیجه که مسأله دارای جواب بهینه نامتناهی است، توقف می‌کند.

در تباهیدگی امکان دوری شدن در یک حلقه نامتناهی وجود دارد. در ادامه چند قاعده ممانعت از دوری را ارائه می‌دهیم که همگرایی متناهی الگوریتم سیمپلکس را با این اطمینان که هیچ پایه‌ای تکرار نخواهد شد تضمین می‌کند. ۱-قاعده الفبایی ۲- قاعده بلاند ۳-قاعده آشفتگی

۱–۵ قواعد ممانعت از دوری:

۱–۵–۸ قاعده الفبایی:

در این قاعده ابتدا، آزمون می‌نیمم کسر را به عنوان معیار خروجی بکار می‌بریم. اگر نتیجه آن یک اندیس منحصر به فرد باشد آن وقت متغیر نظیر آن اندیس، متغیر خروجی است. در حالتی که $I_۰$ تعریف شده در زیر، منحصر به فرد نباشد با قرار دادن ستون اول $y_۱$ به جای ستون سمت راست، و فقط با به کاربردن سطرهای نظیر با اندیس‌های اعضای مجموعه $I_۰$ سعی می‌کنیم اندیس متغیر خروجی را مشخص کنیم اگر باز هم اندیس متغیر خروجی مشخص نشد ستون دوم را به کار می‌بریم والی آخر.

$$I_\circ = \left\{ r : \frac{\overline{b_r}}{y_{rk}} = min \left\{ \frac{\overline{b_\iota}}{y_{ik}} : y_{ik} > \circ \right\} \right\}$$

۱–۵–۹ قاعده بلاند:

قاعده دیگری را که مانع دوری شدن می‌شود رابرت بلاند پیشنهاد کرده است. قاعده‌ایست که انتخاب متغیرهای ورودی و خروجی هر دو را محدود می‌کند. در این قاعده در ابتدا بدون اینکه در کلیت مسأله خللی وارد شود متغیرها را در یک دنباله به ترتیب دلخواه مرتب می‌کنیم مثلا $\mathrm{x}_۱, \mathrm{x}_۲, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$. سپس از بین تمام متغیرهای غیر پایه، متغیری با $\mathrm{z}_\mathrm{j} - \mathrm{c}_\mathrm{j} > ۰$ که کوچکترین اندیس را دارد به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌شود. به طریق مشابه، از بین تمام متغیرهای کاندید خروجی(که از آزمون می‌نیمم کسر بدست می‌آید) آن متغیری انتخاب می‌شود که کم‌ترین اندیس را دارد.

۱– ۵–۱۰ قاعده آشفتگی:

قاعده الفبایی معادل با قاعده‌ای است که آشفتگی نام دارد که در آن مقادیر سمت راست اصلی در ساخت چندوجهی ناتباهیده تغییرمی‌کنند. نرم افزاری وجود دارد که *MINOS* نام دارد، که در آزمایشگاههای بهینه سازی سیستم‌های استانفورد ساخته شده است، یک قاعده ضد دور "عملی" دارد که بر اساس آشفتگی‌های مناسب سمت راست محدودیت‌ها طراحی شده است.

دوباره مسأله (۱-۱) را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که m ستون اول A تشکیل ماتریس واحد می‌دهد وفرض کنیم $b \geq ۰$. با مفروض بودن ماتریس B جواب شدنی متناظر ناتباهیده است اگر $B^{-۱}b > ۰$ آن‌گاه روش آشفتگی چارنس[1] به صورت زیر می‌باشد.

b را با $b + \sum_{j=۱}^{m} a_j \varepsilon^j$ جانشین کنیم، که در آن ε عدد طبیعی کوچک مثبتی است. اکنون فرض کنیم پایه B مفروض است، که در آن $B^{-۱}\left(b + \sum_{j=۱}^{m} a_j \varepsilon^j\right) = \bar{b} + \sum_{j=۱}^{m} y_j \varepsilon^j > ۰$ است فرض کنیم X_{k} متغیر ورودی است وآزمون می‌نیمم کسر زیر ساخته شده است:

$$\min_{۱\leq i\leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i + \sum_{j=۱}^{m} y_{ij}\varepsilon^j}{y_{ik}} \middle| y_{ik} > ۰ \right\}$$

که نشان می‌دهد می‌نیمم کسر در یک اندیس منحصر به فرد r اتفاق می‌افتد و سمت راست جدید بعد از محورگیری مثبت است وتابع هدف حتی با وجود تباهیدگی مسأله اصلی به طور اکید بهبود می‌یابد.

۱-۶ تجزیه LU یا فاکتورگیری پایه:

روش متداول که در اغلب نرم افزارهای کامپیوتری جدید بکار می‌رود روش فاکتورگیری $\boldsymbol{LU}$ است که مبنای آن روش کارای مثلثی گوسی است.

این نام به دلیل استفاده از مؤلفه‌هایی از پایه به صورت ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی آمده است. این روش وقتی مسأله بسیار بزرگ و تنک باشد بسیار مفید است و روش دقیق و از نظر عددی پایدار است. (خطای گرد کردن قابل کنترل است وانتشار نمی‌یابد)

---

[1] *charnec*

بیشتر مسائل کاربردی تنک هستند یعنی، چگالی d (تعداد عناصر ناصفر تقسیم بر تعداد کل عناصر) عناصر ناصفر در ماتریس محدودیت معمولاً کوچک است (در بیشتر حالت‌ها $d \leq ./۵$) در هر صورت، تنکی معمولاً در روش سیمپلکس اتفاق می‌افتد و در اجرا از آن استفاده می‌شود.

این کار با ذخیره داده ها در شکل بسته‌بندی شده (که در آن عناصر ناصفر با آدرس مناسب ذخیره می شوند و تنها در محاسبات ریاضیات بکار برده می‌شود) انجام می‌شود.

سرانجام، در مسائل با مقیاس بزرگ به جای وارد کردن داده‌ها بطور مجزا برنامه ماتریس مولدی نیاز است تا بطور خودکار محدودیت‌ها و تابع هدف را بر اساس ساختار کاربرد مورد نظر تولید کند سپس از آن نرم افزار ضرائب ناصفر را در شکل بسته بندی شده، ذخیره کند و سپس آنها را برای اجرای محاسبات قبل بطور مقتضی بکار برد.

۱-۶-۱۱ تجزیه LU با محور گیری کامل:

با مفروض بودن یک ماتریس $n \times n$ مانند A روش حذفی گاوس با محورگیری کامل تجزیه $PBQ = LU$ را نتیجه می‌دهد که در آن P, Q ماتریس‌های جایگشت ارائه شده به صورت زیر هستند.

$$P = P_{n-۱} \dots P_۱ \qquad , Q = Q_۱ \dots Q_{\mathrm{n}-۱}$$

و U یک ماتریس بالا مثلثی، L یک ماتریس پایین مثلثی واحد است و معرفی می‌کنیم.

$$L = P(M_{n-۱}P_{n-۱} \dots M_۱P_۱)^{-۱} \qquad U = A^{n-۱}$$

$$M = M_{n-۱}P_{n-۱} \dots M_۱P_۱\,, \quad m_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\,, \quad M_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \mathrm{m}_{۲۱} & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ m_{۳۱} & ۰ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{n۱} & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{\mathrm{k}} = \mathrm{M_kP_kA^{k-۱}Q_k}$$

که در آن M یک ماتریس جایگشت پایین مثلثی است.

۱-۶-۱۲ مثال

ماتریس $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را به صورت $\mathrm{PBQ = LU}$ بیان می‌کنیم.

گام اول :

$$P_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad Q_۱ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \ , \ P_۱AQ_۱ = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$M_۱ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۱}{۳} & ۱ & ۰ \\ -\frac{۱}{۳} & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^{۱} = \mathrm{M_۱P_۱AQ_۱} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

گام دوم : عنصر محوری $a_{۳۲}=\frac{۲}{۳}$