دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

مسائل بهینه سازی برداری و نابرابری تغییرهای برداری مینتی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا امینی هرندی

استاد مشاور:

دکتر مریم زنگی آبادی

توسط:

مرضیه سلطانی

مهر ماه ۹۱

دانشگاه شهرکرد
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

مسائل بهینه سازی برداری و نابرابری های تغییراتی برداری مینتی

نگارش
مرضیه سلطانی

استاد راهنما
دکتر علیرضا امینی هرندی
استاد مشاور
دکتر مریم زنگی آبادی

مهر ماه ۹۱

تقدیم به آنکس که بداند و بداند که بداند

و آنکس که نداند و بداند که نداند و بخواهد که بداند

رسیدن، به دانش است و به کردار نیک. . .

و بی دانش به کردار نیک هم نتوان رسید، که نیکی را پیشتر باید شناختن، آن گاه بجای آوردن. پس دانش به همه حال می باید تا به رستگاری توان رسیدن. و چون دانش راه آمد، به بهترین چیزها که آدمی را تواند بودن. و در اوّل آفرینش حاصل نیست و بعضی از آن بی رنج و اندیشه حاصل شود، پس هر آینه مهمتر چیزی باشد که در حاصل کردنش عمر گذرانند، لیکن برخی هست که بی اندیشه حاصل آید و بعضی را ناچار به اندیشه حاجت بود، و آنچه به اندیشه حاصل شود دانسته ای خواهد که در و اندیشه کنند تا این نادانسته بدان اندیشه که در آن دانسته کنند دانسته شود، و از هر دانسته هر نادانسته را نتوان شناخت، بلکه هر نادانسته را به دانسته ای که در خور او بود توان شناخت. و منطق آن علم است که در و راه انداختن نادانسته به دانسته دانسته شود. . .

پس منطق ناگزیر آمد بر جوینده ی رستگاری. [1]

[1] مقدمه‌ی رساله‌ی منطق دانشنامه‌ی علائی، شیخ‌الرئیس ابن‌سینا

سپاس گزاری...

ستایش و سپاس اولاً و بالذات مخصوص خداوندی است که منطق را فطرتاً در وجود آدمی نهاد.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و زحمات دکتر علیرضا امینی هرندی در به ثمر رسیدن این پایان‌نامه قدردانی نمایم.

و نیز از دکتر مریم زنگی آبادی، دکتر منصوری به واسطه‌ی رفع مشکلاتی چند از پایان‌نامه و تمامی اساتیدی که بر پیشرفت علمی اینجانب تأثیرگذار بودند سپاسگزارم.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر خویش.

مرضیه سلطانی

مهرماه ۹۱

چکیده

از آنجا که نابرابری های تغییرات برداری مینتی ابزار کارآمدی برای حل مسائل بهینه سازی برداری محسوب می شود، در این پایان نامه به معرفی نابرابریهای تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا و فرمهای ضعیف آنها می پردازیم. در ضمن نابرابریهای شبه تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا را تعریف می کنیم.در همین راستا به بررسی مفاهیمی مثل، مشتق های دینی بالائی و پائینی و مشتق های تعمیم یافته کلارك و خواص آنها می پردازیم. در ادامه رابطه بین مجموعه جوابهای نابرابری های تغییرات برداری یاد شده و جواب های کارای مسئله بهینه سازی برداری غیرخطی را تحت شرایط مختلف مثل شبه تحدبی، تحدب نمائی، مشتق ناپذیری و اینوکسیتی مورد مطالعه قرار می دهیم. در پایان روابط هم ارزی بین مجموعه جوابهای کارای مسائل بهینه سازی برداری و جواب های نابرابری های تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا و فرم گسترش یافته آنها و روابط بین مجموعه جوابهای کارای ضعیف مسائل بهینه سازی برداری و فرم ضعیف مسائل فوق را ارائه می دهیم .

کلمات کلیدی:

نابرابری های تغییرات برداری، مشتق های دینی، مشتق های تعمیم یافته کلارك، جواب کارا، شبه تحدبی، پیوستگی علامتی بالائی، اینوکسیتی، اینوکس نمائی و خطی نمائی.

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم نابرابری های تغییرات برداری ، به تازگی با اشتیاق فراوان مورد مطالعه محققین قرار گرفته چرا که ابزارهای کارآمد برای حل مسائل بهینه سازی برداری هستند . نابرابری های تغییراتی مدل های ریاضی برای مسائل تعادل در ساختارهای مکانیکی با معیارهای مقایسه چندگانه ای مثل مقاومت ، قیمت و وزن و ... ارائه می دهد. علاوه بر نابرابری های شبه تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا برای توابع مشتق ناپذیر و نامحدب قابل تعریف هستند.

در این پایان نامه ابتدا در فصل اول به معرفی مفاهیمی چون تحدب ، شبه تحدب ، تحدب نمائی، یکنوایی، شبه یکنوائی و $q-$شبه تحدبی و $q-$تحدب نمائی و روابط بین آن ها را بررسی می کنیم. با تعریف مشتق های دینی و کلارك و ارائه ویژگی های آن ها، مقدمات تعریف نابرابری های شبه تغییراتی و استفاده آن ها در مورد مباحث مربوط به توابع ناهموار را فراهم می کنیم . با معرفی توابع شبه اینوکس، پیش اینوکس، اینوکس نسبت به تابع دوتائی و خواص آن ها مقدمات کار بر روی این دسته از توابع و طبقه بندی مجموعه جواب های چنین مسائلی و ارتباط آن ها با مسائل تغییرات برداری را مهیا خواهیم کرد. در آخرین قسمت این فصل به ارائه قضیه مقدار میانگین در اشکال مختلف و مورد نیاز در فصل های گوناگون این پایان نامه خواهیم پرداخت.

در فصل دوم این پایان نامه به معرفی نابرابری های تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا برای توابع مقدار ماتریسی و مشتق پذیر می پردازیم و با تعریف مسئله بهینه سازی برداری به اثبات رابطه هم ارزی بین مجموعه جواب های مسئله بهینه سازی برداری و مجموعه جواب های مسئله تغییرات برداری مینتی خواهیم پرداخت . در ادامه با معرفی نابرابری های تغییرات برداری آشفته رابطه بین مجموعه جواب های این نابرابریها و نابرابری های تغییرات برداری مینتی را بررسی می کنیم . سپس با تعریف نابرابری های تغییرات برداری ضعیف مینتی ، ارتباط بین مجموعه جواب های نابرابری های مذکور و مجموعه جواب های تغییرات برداری ضعیف استامپاکیا را ذکر می کنیم و سرانجام رابطه هم ارزی بین مجموعه جواب های کارای ضعیف مسئله بهینه سازی برداری و مجموعه جواب های نابرابری تغییرات برداری ضعیف مینتی را اثبات می کنیم .

در فصل سوم با استفاده از تعریف مشتق های مسیری تعمیم یافته کلارك و مفاهیم اینوکسیتی پس از معرفی نابرابری های شبه تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا ، تحت شرایط پیچشی بودن، لیپ شیتس

موضعی بودن و سایر شرایط مورد بحث همان فصل،ارتباط بین جواب کارای مسئله بهینه سازی برداری و جواب مسئله نابرابری تغییرات برداری گسترش یافته مینتی بحث و اثبات می شود . بعد از معرفی فرم های ضعیف نابرابری های فوق به بررسی ارتباط بین جواب های نابرابری های تغییرات برداری ضعیف مینتی و استامپاکیا و جواب های کارای ضعیف مسئله بهینه سازی برداری ، تحت شرایط اینوکسیتی می پردازیم.

در فصل چهارم این پایان نامه ، از آنجایی که امکان دارد تابع هدف یك مسئله بهینه سازی برداری ناهموار باشد ، مسئله نابرابری تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا و فرم های ضعیف این نابرابریها را با استفاده از مشتق های دینی تعریف می کنیم و یك شرط لازم و کافی برای جواب مسئله بهینه سازی برداری و جواب مسائل نابرابری فوق را ارائه می دهیم و سرانجام ارتباط بین مسئله نابرابری تغییرات برداری و مسئله بهینه سازی برداری را تحت شرایط شبه محدبی و شبه یکنوائی مورد بحث؛بررسی و اثبات قرار داده ایم.

در فصل پنجم این پایان نامه با استفاده از تعریف خطی نمائی پایا به عنوان گسترشی از خطی بودن و استفاده از مفهوم مشتق دینی در مورد توابع نا محدب نامشتق پذیر یک طبقه بندی از توابع خطی نما را ارائه می دهیم.ذر ضمن یک طبقه بندی از مجموعه جواب های مسائل مشتق ناپذیر نامحدب را معرفی می کنیم. نتایج به دست آمده در این پایان نامه را در مورد توابع اینوکس نما،خطی نما و توابع دوتائی خطی نما را گسترش می دهیم. در آخرین قسمت این پایان نامه به طبقه بندی مجموعه های جواب از مسائل اینوکس نما و ارتباط آن ها با نابرابری های تغییرات برداری مینتی و استامپاکیا خواهیم پرداخت.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

در این فصل به معرفی مفاهیمی هم چون تحدب و شبه تحدب، یکنوایی و شبه یکنوایی و ارتباط بین آنها، مشتق های دینی و کلارک و خواص آن ها ، توابع شبه اینوکس، پیش شبه اینوکس، اینوکس نسبت به یک تابع دو تایی و قضایای مقدار میانگین می پردازیم که در مراجع [۲۸-۱]مطرح شده است.

۱.۱ تحدب، شبه تحدب و یکنوایی، شبه یکنوایی و ارتباط آن ها

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یك مجموعه محدب[۱] غیرتهی باشد و $f : K \to \mathbb{R}^n$ آن گاه تابع fمحدب است، اگر :

$$f(y+\lambda(x-y)) \leq \lambda f(x) + (۱-\lambda)f(y) \qquad \forall x,y \in K, \lambda \in [۰,۱] \tag{۱.۱}$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یك مجموعه محدب غیرتهی باشد و $f : K \to \mathbb{R}^n$ آن گاه :

الف) تابع f شبه محدب [۲] است اگر

$$f(y+\lambda(x-y)) \leq max\{f(x), f(y)\} \qquad \forall x,y \in K,\ \lambda \in [۰,۱]$$

ب) تابع f شبه محدب نیمه اکید [۳] است اگر به ازاء هر $x, y \in K$ که $f(x) \neq f(y)$

$$f(y+\lambda(x-y)) < max\{f(x), f(y)\}, \lambda \in (۰,۱)$$

واضح است که هر تابع محدب شبه محدب است اما عکس آن همیشه برقرار نیست .

[۱] Convex

[۲] Quasi convex

[۳] Semistrictlyquasiconvex

ج) فرض کنید K یك مجموعه محدب و باز باشد ، تابع مشتق پذیر f محدب نما [۴] گفته می شود ، اگر به ازای هر $x, y \in K$ که $\nabla f(x)(y-x) \geq 0$ داشته باشیم:

$$f(y) \geq f(x)$$

لم ۳.۱.۱. فرض کنید K یک مجموعه ناتهی از $\mathbb{R}$ باشد و $f: K \to \mathbb{R}$ تابع شبه محدب نیمه اکید و نیم پیوسته پائینی باشد، آن گاه f شبه محدب است .

برهان. فرض کنید که $x_1, x_2 \in K$ اگر $f(x_1) \neq f(x_2)$ ، از چون f شبه محدب نیمه اکید است لذا داریم:

$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] < max\{f(x_1), f(x_2)\}$ (به ازای هر $\lambda \in (0,1)$)

حال فرض کنید که $f(x_1) = f(x_2)$ برای نشان دادن آنکه f شبه محدب است باید داشته باشیم

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq f(x_1), \qquad \forall \lambda \in (0,1) \tag{۲.۱}$$

برهان خلف :

فرض کنید که

$$f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) > f(x_1) \ \ , \ \ \exists \mu \in (0,1) \tag{۳.۱}$$

قرار دهید $x := \mu x_1 + (1-\mu)x_2$ چون f نیم پیوسته پائینی است، پس $\lambda \in (0,1)$ وجود دارد به قسمی که :

$$f(x) > f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x) > f(x_1) = f(x_2) \tag{۴.۱}$$

توجه کنید که x می تواند به صورت ترکیب محدب $\lambda x_1 + (1-\lambda)x$ و x_2 نمایش داده شود . بنابراین از آنجائیکه f شبه محدب نیمه اکید است، پس:

$$f(x) < f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x) \tag{۵.۱}$$

که با رابطه (۴.۱) در تناقض است. اثبات کامل می شود . □

لم ۴.۱.۱. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یك مجموعه ناتهی، باز و محدب باشد و f یك تابع مشتق پذیر و محدب نما روی K باشد ، آن گاه f هم شبه محدب و هم شبه محدب نیمه اکید است .

[۴] Pseudoconvex

برهان. ابتدا نشان می دهیم که f شبه محدب نیمه اکید است .
فرض کنید که $x_1, x_2 \in S$ وجود داشته باشد به قسمی که $f(x_1) \neq f(x_2)$ و $f(x') \geq max\{f(x_1), f(x_2)\}$ که برای هر $\lambda \in (0,1)$ ، $x' = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. بدون کاستن از کلیت مطلب فرض می کنیم $f(x_1) < f(x_2)$. بنابراین

$$f(x') \geq f(x_2) > f(x_1) \tag{۶.۱}$$

با توجه به خاصیت تحدب نمائی f داریم $\nabla f(x')^t(x_1 - x') < 0$ و چون $x_1 - x' = -\frac{(1-\lambda)(x_2-x')}{\lambda}$ و $\nabla f(x')^t(x_2 - x_1) > 0$ لذا با استفاده مجدد از خاصیت تحدب نمائی f داریم :

$$f(x_2) \geq f(x')$$

لذا با استفاده از رابطه (۶.۱) به دست می آوریم:

$$f(x_2) = f(x') \tag{۷.۱}$$

چون $\nabla f(x')^t(x_2 - x_1) > 0$ ، یک نقطه $\hat{x} = \mu x' + (1-\mu)x_2$, $\mu \in (0,1)$ وجود دارد به قسمی که :

$$f(\hat{x}) > f(x') = f(x_2)$$

و با استفاده از خاصیت تحدب نمائی f ، داریم : $\nabla f(\hat{x})^t(x_2 - \hat{x}) < 0$ ، به طور مشابه

$$\nabla f(\hat{x})(x' - \hat{x}) < 0$$

توجه کنید که $x_2 - \hat{x} = \mu(\hat{x} - x')/(1-\mu)$ ، بنابراین هیچگاه دو رابطه فوق نمی تواند هر دو با هم برقرار باشد. این تناقض نشان می دهد که f شبه محدب اکید است و با استفاده از لم قبل f شبه محدب هم هست پس اثبات کامل است . □

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $q : K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یك تابع دوتایی [۵] و $g : K \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد.
الف) تابع g ، $q-$ شبه محدب است، در صورتی که

$$\forall x, y \in K \qquad g(x) \leq g(y) \Rightarrow q(y; x-y) \leq 0$$

[۵] Bifunction

ب) تابع q, g- محدب نما است در صورتیکه

$$\forall x, y \in K, x \neq y \qquad g(x) < g(y) \Rightarrow q(y; x-y) < \circ$$

ج) تابع g ، اکیدا $q-$ محدب نما است در صورتیکه

$$\forall x, y \in K, x \neq y \qquad g(x) \leq g(y) \Rightarrow q(y; x-y) < \circ$$

واضح است که $q-$ تحدب نمائی اکید، $q-$ تحدب نمایی و $q-$ شبه تحدبی را نتیجه می دهد، اما نه $q-$شبه محدبی، $q-$شبه محدب نمایی را نتیجه می دهد و نه برعکس .

لم ۶.۱.۱. فرض کنید $g : K \to \mathbb{R}$ یك تابع و $p, q : K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ توابع دوتائی باشند ، به قسمی که $p(x; d) \leq q(x; d)\ \forall x \in K, \forall d \in \mathbb{R}^n$ آن گاه $q-$ شبه تحدبی و $q-$ محدب نمایی و $q-$ تحدب نمایی اکید به ترتیب $p-$ شبه تحدبی و $p-$ تحدب نمایی و $p-$ تحدب نمائی اکید را نتیجه می دهند.

برهان. با استفاده از تعریف قبل و رابطه $p(x; d) \leq q(x; d)$ به سادگی قابل اثبات است.

□

تعریف ۷.۱.۱. نگاشت $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ روی مجموعه ناتهی $K \subseteq \mathbb{R}$ یکنوا است، اگر به ازای هر $x, y \in K$ که $x \neq y$ داشته باشیم :

$$(y-x)^T (F(y) - F(x)) \geq \circ$$

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ یك مجموعه ناتهی باشد، نگاشت $F : K \to \mathbb{R}^n$ شبه یکنوا [۶] روی K گفته می شود اگر و تنها اگر برای $x, y \in K$ که $x \neq y$ داشته باشیم :

$$(y-x)^T F(x) \geq \circ \Rightarrow \qquad (y-x)^T F(y) \geq \circ$$

واضح است که هر نگاشت یکنوا شبه یکنواست، اما عکس این موضوع صادق نمی باشد .

به مثال زیر توجه کنید :

مثال:فرض کنید $F : K \to \mathbb{R}$ که K و F به صورت زیر تعریف می شوند :

$F(x) = \frac{۱}{(x+۱)}$ و $K = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \circ\}$

[۶] Pseudovnonotone

تابع فوق شبه یکنواست. در صورتی که یکنوا نیست، زیرا:
$x,y \in K$ پس $y \geq \circ$ و $x \geq \circ$. پس اگر $(y-x)(\frac{\backslash}{\backslash + x}) \geq \circ$ آنگاه $(y-x) \geq \circ$ در نتیجه می توان گفت:

$$(y-x)(\frac{1}{1+y}) \geq 0$$

بنابراین تابع فوق شبه یکنواست. اما یکنوا نیست، زیرا:

$$(y-x)(\frac{1}{1+y} - \frac{1}{1+x}) = (y-x)(\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}) = -\frac{(x^2-y^2)}{(1+x)(1+y)}$$

که عبارت فوق در حالتی که $x^2 \geq y^2$ باشد،منفی است، پس تابع F یکنوا نیست.

تعریف ۹.۱.۱. یك تابع دوتایی $q : K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ شبه یکنوا گفته می شود ، اگر برای هر $x,y \in K$ که $x \neq y$ ، داشته باشیم:

$$q(x; y-x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q(y; x-y) \leq 0$$

که گزاره بالا هم ارز گزاره زیر است :

$$q(y; x-y) > 0 \quad \Rightarrow \quad q(x; y-x) < 0$$

لم ۱۰.۱.۱. یك تابع دوتایی $q : K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ شبه یکنواست اگر و تنها اگر برای هر جفت از نقاط مجزای x,y متعلق به K داشته باشیم:

$$q(x; y-x) > 0 \quad \Rightarrow \quad q(y; x-y) < 0 \tag{۸.۱}$$

برهان. گزاره فوق هم ارز با گزاره زیر است :

$$q(y; x-y) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q(x; y-x) \leq 0$$

با جابه جایی x,y رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$q(x; y-x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad q(y; x-y) \leq 0$$

□

لم ۱۱.۱.۱. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}$ یك مجموعه ناتهی، باز ، محدب و $f : K \to \mathbb{R}$ روی K مشتق پذیر

باشد .آن گاه f روی K محدب نما است اگر و تنها اگر ∇f روی K شبه یکنوا باشد .

برهان. فرض کنید f روی K محدب نما باشد و $x,y \in K$ و $x \neq y$ به قسمی که:

$$(y-x)^T \nabla f(x) \geq \circ \tag{۹.۱}$$

حال نشان می دهیم که $(y-x)^T \nabla f(y) \geq \circ$ برای این کار از برهان خلف استفاده می کنیم.
فرض کنید این طور نباشد، پس :

$$(y-x)^T \nabla f(y) < \circ \tag{۱۰.۱}$$

رابطه (۹.۱) و خاصیت تحدب نمایی f نتیجه می دهد :

$$f(y) \geq f(x) \tag{۱۱.۱}$$

از خاصیت تحدب نمایی f و رابطه (۱۰.۱) نتیجه می گیریم که $f(x) > f(y)$ و این با رابطه (۱۱.۱) در تناقض است.
برعکس : فرض کنید ∇f شبه یکنوا روی K باشد. فرض کنید $x,y \in K, x \neq y$ به قسمی که $(y-x)^T \nabla f(x) \geq \circ$. می خواهیم نشان دهیم که $f(y) > f(x)$ برای اثبات از برهان خلف استفاده می کنیم.فرض کنید $f(y) \leq f(x)$. از قضیه مقدار میانگین داریم :

$$f(y) - f(x) = (y-x)^T \nabla f(\bar{x})$$

که $\bar{x} = \bar{\lambda} x + (۱ - \bar{\lambda}) y$ و $\circ < \bar{\lambda} < ۱$
حال چون $f(y) \leq f(x)$ و $\bar{x} = \bar{\lambda} x + (۱ - \bar{\lambda}) y$ لذا از رابطه قبل داریم :

$$(x - \bar{x}) \nabla f(\bar{x}) \geq \circ$$

از آنجایی که ∇f شبه یکنواست، خواهیم داشت: $(x-\bar{x})^T \nabla f(x) > \circ$
و چون داشتیم: $\bar{x} = \bar{\lambda} x + (۱ - \bar{\lambda}) y$ و $\circ < \bar{\lambda} < ۱$
پس نتیجه می گیریم: $(x-y)^T \nabla f(x) > \circ$
که با رابطه $(y-x)^T \nabla f(x) \geq \circ$ در تناقض است .

□

لم ۱۲.۱.۱. نگاشت $F : K \to \mathbb{R}$ شبه یکنواست اگر و تنها اگر به ازای هر زوج نقطه$x, y \in K$داشته

باشیم

$$(y-x)^T F(x) > \circ \Rightarrow (y-x)^T F(y) > \circ$$

برهان. با توجه به تعریف شبه یکنوایی داریم : (عکس نقیض تعریف)

$$(y-x)^T F(y) < \circ \Rightarrow (y-x)^T F(x) < \circ$$

و بنابراین

$$(y-x)^T F(x) > \circ \Rightarrow (y-x)^T F(y) > \circ$$

□

۲.۱ مشتق های دینی و کلارک و خواص آن ها

تعریف ۱.۲.۱. تابع $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
الف) همگن مثبت [۱] است اگر

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > \circ \quad , \quad g(rx) = rg(x)$$

ب) زیرفرد [۲] است اگر $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\circ\}$ داشته باشیم :

$$g(x) \geq -g(-x)$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup [\pm\infty]$ یك تابع باشد و $x \in \mathbb{R}^n$ یك نقطه که f به ازای آن متناهی باشد در این صورت:
الف) مشتق جهتی دینی بالایی در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ در مسیر $d \in \mathbb{R}^n$ به وسیله رابطه زیر تعریف می شود :

$$f^D(x;d) := \lim_{t\to\circ^+} sup \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = \underset{s>\circ}{inf} \underset{\circ<t<s}{sup} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

که با نماد های $\bar{D}f(x,d)$ و f_d^+ هم نمایش داده می شود.
ب) مشتق جهتی دینی پائینی در نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ در مسیر $d \in \mathbb{R}^n$ به وسیله رابطه زیر تعریف می شود :

$$f_D(x;d) := \lim_{t\to\circ} inf \frac{f(x+td)-f(x)}{t} = \underset{s>\circ}{sup} \underset{\circ<t<s}{inf} \frac{f(x+td)-f(x)}{t} \qquad (۱۲.۱)$$

[۱] Positively homogeous
[۲] Sub odd

که برای هر $d \in \mathbb{R}^n$ داریم :

$$f^D(x;d) = -f_D(x;d), \qquad f_D(x;d) = -f^D(x;d)$$

بنا بر تعریف داریم:

$$f_D(x;d) \leq f^D(x;d)$$

در نتیجه داریم:

$$f^D(x;d) \geq f_D(x;d) = -f^D(x;d) \qquad \forall x, d \in \mathbb{R}^n$$

و این به معنی آن است که $f^D(x,.)$ ، زیرفرد است و به سادگی می توان دید به ازای x ثابت متعلق به $\mathbb{R}^n$, $f_D(x;.), f^D(x;.)$ همگن مثبت اند . زیرا :
دلیل :

$$f^D(x;\lambda d) = \lim_{t\to ۰^+} sup \frac{f(x+t\lambda)-f(x)}{t} = \lambda \lim_{t\lambda \to ۰^+} sup\ \lambda \frac{f(x+t\lambda)-f(x)}{t\lambda} =$$

$$p\frac{f(x+t\lambda)-f(x)}{t\lambda} = \lambda f^D(x,d)$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $K \subseteq \mathbb{R}^n$ مجموعه اینوکس نسبت به $\eta : K \times K \to \mathbb{R}^n$ باشد تابع $f : K \to \mathbb{R}$ پیش اینوکس نسبت به η گفته می شود اگر و تنها اگر

$$f(x+t\eta(y,x)) \leq tf(y) + (۱-t)f(x) \quad \forall x, y \in K \ \ , \ \forall t \in [۰, ۱]$$

تعریف ۴.۲.۱. اگر K زیرمجموعه باز و $\eta-$ اینوکس [۳] از $\mathbb{R}^n$ باشد . $g : K \to \mathbb{R}$ نیم پیوسته بالایی شعاعی روی K

گفته می شود ، اگر

$$g(\lambda) := f(y + \lambda\eta(x,y))$$

به ازای هر $x, y \in K$ نیم پیوسته بالایی روی بازه $[۰, ۱]$ باشد .

لم ۵.۲.۱. فرض کنید $g : K \to \mathbb{R}$ نیم پیوسته بالایی شعاعی روی K باشد و تابع دوتائی $q : K \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ نسبت به دومین مولفه زیر جمعی باشد به قسمی که $q(x,.) \leq g^D(x,.)$ آن گاه
الف) g ، شبه محدب است اگر و تنها اگر $q-$ شبه محدب باشد .
ب) $q, g-$ محدب نما است اگر و تنها اگر q شبه یکنوا باشد.
مرجع [۱۳] .

[۳] Invex