بسم الله الرحمن الرحيم

٤٨٠٤٢

دانشگاه تبریز

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی محض

# پایان نامه :

## برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (هندسه)

عنوان:

# رویه های آفینی مسطح تصویری با متریک آفین مسطح

اساتید راهنما:

**دکتر مگردیچ تومانیان ـ دکتر ابراهیم پور رضا**

استاد مشاور:

**دکتر غفـار فرزدی**



پژوهشگر:

**علی حاجی بدلی**

**شهریور ۱۳۸۲**

تقدیم به پدر و مادرم

اولین معلمان زندگیم آنان که فــروغ نگاهشــان گرمــی کلامشــان و روشــنی رویشان سرمایه جاودانه زندگی ام بوده اســـت .در برابــر وجــودپــر مهرشــان زانوی ادب بر زمین می نهم و با دلی سرشار از عشق و محبــت بــر دستانشــان بوسه می زنم.

تقدیم به همه عزیزانم

## تقدیر و تشکر:

حسنت به ازل نظر چو در کارم کرد — بنمود جمال و عاشق زارم کرد

من خفته بدم به ناز درکتم عدم — حسن تو به دست خویش بیدارم کرد

سپاس و ستایش به درگاه یکتاخالق هستی بخش که با الطاف بیکرانش توانسته ام گامی هر چند کوچک در راه تحصیل علم و دانش بردارم.

اینک که دروه کارشناسی ارشد را با یاری خدواند متعال به پایان می رسانم، برخود فرض می دانم از تمامی کسانی که در تهیه و تدوین این پایان نامه به بنده کمک کرده اند صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

به خصوص از اساتید راهنمای گرانقدرم آقایان دکتر تومانیان و دکتر پور رضا به خاطر راهنماییهای ارزنده شان در تدوین این پایان نامه، و نیز به خاطر زحمات فراوانی که در طول دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد بخاطر حقیر متحمل شده اند صمیمانه تشکر می کنم.

از استاد مشاور گرانقدرم جناب آقای دکتر فرزدی تشکر و قدردانی می کنم.

از رئیس دانشکده جناب آقای دکتر مهروز، مدیر محترم گروه ریاضی محض، دکتر فاروقی و نیز از تمامی اساتید محترم گروه ریاضی و کلیه دبیران دوران تحصیلم که موفقیت من در سایه تلاش و فداکاری آنها می باشد تشکر می کنم.

همچنین، تشکر صمیمانه خود را از خواهر عزیزم فریبا، شوهر خواهرم آقای مصطفی حاجی احدی و برادرم مرتضی، به خاطرحمایتهایشان ابراز می دارم.

و نیز از آقایان جواد و رسول ملاپورکه نیاز های رایانه ای این پایان نامه را بر آوردند ممنونم.

و درنهایت از کلیه دوستان وعزیزانی که مشوق بنده بودند بخصوص آقایان فغفوری و عظیم پور بداقلی، اعظمی، ضرغامی و خوجالی سپاسگزارم.

نام خانوادگی دانشجو: **حاجی بدلی** نام: **علی**

عنوان پایان نامه: **رویه های آفینی مسطح تصویری با متر آفین مسطح**

اساتید راهنما: **دکتر مگردیچ تومانیان-دکتر ابراهیم پوررضا**

استاد مشاور: **دکتر غفار فرزدی**

مقطع تحصیلی: **کارشناسی ارشد** رشته: **ریاضی محض** گرایش: **هندسه**

دانشگاه: **تبریز** تاریخ فارغ التحصیلی: **شهریور ۱۳۸۲** تعداد صفحه: ۸۰

**کلید واژه ها:** متر آفین،ارتباط مسطح ، مسطح تصویری

**چکیده:**

در این پایان نامه بطور کلی رویه های آفینی، با ارتباط القایی مسطح تصویری و متر آفین مسطح طبقه بندی شده است.برای این منظور رویه های آفین ناتبهگون در $R^3$ در نظر گرفته شده است . در این نوع رویه ها، امکان القای یک ارتباط آفین $\nabla$، فرم دو خطی $h$(مترآفین )و یک فرم حجمی $\theta$ وجود داشت. البته ما رویه هایی را در نظر گرفته ایم که دارای ارتباط القایی مسطح تصویری بودند. بخصوص، قضیه زیر اثبات شده است:

**قضیه ۱:** فرض کنید $M$ یک رویه آفین ناتبهگون در $R^3$ با متر آفین مسطح و ارتاط القایی مسطح تصویری باشد، آنگاه $M$ بطور موضعی هم ارز آفین با یکی از رویه های زیر می باشد:

۱) یک سهمی وار.

۲)یک رویه خط دار مینیمال.

۳) $x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = 1$.

٤) $e^{\alpha \arctan(y/x)}(x^2+y^2)^{\beta} z^{\gamma} = 1$.

٥) $z = -x\,(\alpha \log x + \beta \log y)$.

٦) $(x^2+y^2)^{\beta} e^{\alpha \arctan(x/y)} = e^{z}$.

۷) $z = \log x + \alpha \log y$.

۸) $z = y^2 \pm \log x$.

۹) $xz = y^2 \pm x^2 \log x$.

که در آن $\alpha, \beta, \gamma \in R$ می باشند.

بالعکس، به آسانی مشاهده می شود که، با کنار گذاشتن رویه های تبهگون که از برخی مقادیر $\alpha, \beta$ یا $\gamma$ بدست می آیند. تمام رویه های بالا دارای متر آفین مسطح می باشند، و ارتباط القایی مسطح تصویری دارند.

# فهرست

**مقدمــه:**

پایان نامه حاضر براساس مقاله ای تحت عنوان:

***Projectively flat affline surfaces with flat affine metric***

می باشد که توسط:

***Chaujun Isaa lee and Luc Vraneken***

به نگارش در آمده است. این مقالـه در مجله *J. Geometry* شـماره ۷۰ سـال ۲۰۰۱ مـیلادی بـه چاپ رسیده است. همان طوری که از عنـوان ایـن مقالـه بـر مـی آیـد. هـدف بررسـی رویـه هـایی می باشد که دارای ساختار آفین مسطح تصویری مـی باشـند. البتـه ایـن کـلاس از رویـه هـای قـبلا توسط ***Jelonek*** در[۳] و [٤] و ***Opozda*** در[۱۱] و [۱۲] و ***Podesta*** در [۱۳] و همچنین توسـط ***Lee*** در [۵] مورد بررسی قرار گرفته بودند. لذا نیاز بر این مطلب احساس می شد، کـه یـک طبقـه بنـدی کلی از رویه هایی با ساختار مسطح تصویری با متر آفیـن صـورت بگیـرد و ایـن امـر در پایـان نامـه حاضر تحقق می یابد.

در فصل اول این پایان نامه برخی از مفـاهیم و قضیـه هـای مـورد نیـاز بیـان شـده اسـت و اکـثر مطالب از [۹] آورده شده است. در فصل دوم این پایان نامه هدف اصلی آن مورد توجه قرار گرفتـه است. و یک تقسیم بندی جامع از رویه های ذکـر شـده صـورت گرفتـه اسـت. و در نـهایت نتـایج حاصل از این بحث در فصل سوم بیان شده است.

# فصل اول

## بررسی منابع

در این فصل تعاریف و قضیه های مورد نیاز را به اختصار بیان می کنیم.

## ۱. مفاهیم فضای آفین

**۱-۱. تعریف.** فرض کنید V یک فضای برداری $n$- بعدی باشد. یک مجموعه غیر خالی $\Omega$، **فضای آفین** نسبت به V گفته می شود ، اگر نگاشت

$$\Omega \times \Omega \to V$$

که بصورت زیر تعریف می شود:

$$(p.q) \in \Omega \times \Omega \to V$$

در شرایط زیر صادق باشد.

**الف).** به ازای هر $p,q,r \in \Omega$ داریم، $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$.

**ب).** به ازای هر $p \in \Omega$ و برای $x \in V$ یک و تنها یک $q \in \Omega$ وجود دارد به طوری که $x = \overrightarrow{pq}$. از این به بعد به جای $x = \overrightarrow{pq}$، تعبیر $q = p + x$ بکار گرفته خواهد شد.

بعد $\Omega$ همان بعد V می باشد. همچنین V فضای برداری متناظر فضای آفین $\Omega$ می باشد.

**۱-۲. مثال.** فرض کنیم V فضای برداری حقیقی از بعد $n$ باشد. V را به عنوان یک مجموعه در نظر می گیریم. برای هر $(p,q) \in V \times V$، عبارت $x = \overrightarrow{pq}$ بردار $q - p \in V$ می باشد. در این صورت V، فضای آفین $n$- بعدی استاندارد نامیده می شود.

**۱-۳. تعریف.** دستگاه مختصات آفین با مبدأ $0\in\Omega$ را بصورت زیر تعریف می کنیم؛ فرض کنید $\{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ پایه ای برای $V$باشد. برای هر $p\in\Omega$ داریم:

$$\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{n} x^i(p)e_i$$

که $(x^1 p, ..., x^n(p))$ یک $n$- تایی است که بصورت منحصر بفرد از اعداد حقیقی معین می شود. مجموعه ای از توابع $\{x^1, ..., x^n\}$، **دستگاه مختصات آفین** نامیده می شود.

حال مفهوم تبدیل آفین را بیان می کنیم.فرض کنید $f : \Omega \to \Omega$ یک نگاشت یک به یک از $\Omega$ بروی $\Omega$ باشد. برای هر $p\in\Omega$ نگاشت $f_p : V \to V$ را بصورت زیر تعریف می کنیم. به ازای هر $x\in V$ فرض کنید $r\in\Omega$ یک نقطه منحصر بفرد در $\Omega$ باشد، چنان که $\overline{pr} = x$. قرار می دهیم : $F_p(x) = \overline{f(p)f(r)}$ .

**۱-٤. تعریف.** $f$ را **تبدیل آفین** گوییم، اگر برای هر $p\in\Omega$ معین، نگاشت $f_p$ یک تبدیل خطی $V$ بروی $V$ باشد. ($F$باید نا منفرد باشد.)

**۱-۵. تعریف.** زیر مجموعه غیر خالی $\Omega'$ از $\Omega$، **زیر فضای آفین** نامیده می شود. اگر برای یک نقطه معین $p\in\Omega'$، مجموعه بردارهای $\{pq, q\in\Omega'\}$ از $\Omega$ یک زیر فضای برداری $W$ از $V$ را تشکیل دهند.

**۱-٦. تعریف.** فرض کنید $Y$ یک میدان برداری دلخواه روی $\Omega = R^n$ باشد. و فرض کنید $x_t$، $a < t < b$، خم همواره دلخواه در $\Omega$ باشد. **مشتق کوواریان** $D_tY$ از $Y$ در طول خم $x_t$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$D_tY = \lim \frac{1}{h}(\pi Y_{x_{t+h}} - Y_{x_t})$$

که $\pi$ نگاشت، $\pi : T_{x_{t+h}}(R^n) \to T_{x_t}(R^n)$، در طول $V$ است.

اگر $X$ میدان برداری مماسی در نقطه $x_0$ باشد. آنگاه $D_tY$ بـه صـورت $D_XY=(D_tY)_t$، تعریـف می شود. که در آن $x_t$ یک خم با نقطه ابتدایی $x_0$ و بردار مماس اولیه $X$ می باشد.

مشتق کواریان دارای خواص زیر است:

**الف)** $D_{X_1+X_2}Y=D_{X_1}Y+D_{X_2}Y$

ب) $D_{f\ X}Y=f\ D_XY$

ج) $D_X(Y_1+Y_2)=D_XY_1+D_XY_2$

د) $D_X(f\ Y)=(X\ f)Y+f\ D_XY$

که در آن $f\in C^\infty(M)$ و $X_1,X_2,Y_1,Y_2$ و $Y$ میدان های برداری روی $M$ می باشند.

۱-۷. **تعریف.** تبدیل آفین $f$ ، **هم آفین(تک مـدول)** گفتـه مـی شـود اگر عنصـر حجـم را حفـظ نماید .یعنی تبدیل خطی وابسته $F$،عنصر حجمی متناظر در $V$ را حفظ نماید.

۱-۸ . **تعریف.** هند سه زیر خمینه ها از یک فضای آفین ،**هندسه دیفرانسیل آفین** نامیده می شود. در هندسـه دیفرانسـیل آفیـن مطالعـه خـواص پایـا تحـت تبدیـلات هـم آفیـن از اهمیـــت خــاصی بر خوردار است.

## ۲.ارتباط آفین

۲ -۱ .**تعریف.**با استفاده از قوانین مشتق کوواریان روی $M$ ، نگاشت زیر را تعریف می کنیم.

$$(X,Y)\in\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\nabla_XY\in\mathcal{X}(M)$$

که در شرایط زیر صادق است:

**الف)** $\nabla_{X_1+X_2}Y=\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y$

ب) $\nabla_{f\ X}Y=f\ \nabla_XY$

ج) $\nabla_X(Y_1+Y_2)=\nabla_XY_1+\nabla_XY_2$

د) $\nabla_X(f\ Y)=(X\ f)Y+f\ \nabla_XY$

که در آن $X(M)$ مجموعه میدان های برداری روی $M$ ، $f \in C^{\infty}(M)$ و $X_1, X_2, Y_1, Y_2$ و $Y$ میدان های برداری روی $M$ می باشند.

اگر دستگاه مختصات موضعی مناسب $(U,x)$ را با مختصات $\{x^1, ... x^n\}$ در نظر بگیریم ،آنگاه قرار می دهیم :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad ,i,j,k = 1,2,3,...,n$$

که در آن $\Gamma_{ij}^k$ ها نمادهای کریستوفل می باشند.

**۲-۲. تعریف. میدان تانسوری تاب** $T$ ، بصورت زیر تعریف می شود.

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

یک تانسور از نوع (۲و۱) می باشد. که به میدان برداری $(X,Y)$ میدان برداری $T(X,Y)$ را مربوط می کند. مؤلفه های این تانسور پادمتقارن در مختصات موضعی عبارتند از:

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

**۲-۳. تعریف. میدان تانسوری انحنای** $R$ که یک تانسور از نوع (۳و۱) می باشد، بصورت زیر تعریف می شود:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$X,Y,Z \in T_x M, x \in M$$

که در آن $R(X,Y)$ تبدیل خطی از $T_x M$ به $T_x M$می باشد. مؤلفه های آن در مختصات موضعی عبارتند از:

$$R(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_i R^i{}_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

که بصورت زیر بیان می شوند:

$$R^i_{jkl} = (\frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l}) + \sum_m \Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}$$

اتحاد اول بیانکی و اتحاد دوم بیانکی بصورت زیر هستند:

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$$

$$(\nabla_X R)(Y,Z) + (\nabla_Y R)(Z,X) + (\nabla_Z R)(X,Y) = 0$$

۲-٤. **تعریف.** گوییم $\nabla$ **ارتباط آفین** مسطح است اگر $T$ و $R$روی $M$ صفر باشد.

همچنین $\nabla$ مسطح است اگر و تنها اگر حول هر نقطه یک دستگاه مختصات موضعی موجود باشد چنان که برای هر $i, j, k$ ، $\Gamma^k_{ij} = 0$ باشد.

۲-۵. **تعریف.** ارتباط آفین $\nabla$،**متقارن موضعی** می باشد، اگر $T = 0$ و $\nabla R = 0$.

۲-٦. **تعریف. تانسور ریچی**، یک تانسور ازنوع (۲،۰) می باشد ،که بصورت زیر تعریف می شود.

$$Ric(Y,Z) = trace\{X \to R(X,Y)Z\}$$

که مؤلفه های آن در مختصات موضعی عبارتند از:

$$R_{jk} = Ric(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) = \sum_i R^i{}_{jik}$$

همچنین به آسانی ازتعریف تانسور ریچی نتیجه می شود که تانسور ریچی متناظر با ارتباط لوی ـ چویتا متقارن است.

$$Ric(Z,Y) = Ric(Y,Z)$$

۲-۷.**تعریف.** ارتباط آفین $\nabla$، **بطور موضعی تک مدول** گفته می شود. اگر در هر همسایگی $x$ از $M$ یک عنصر حجمی موازی موجود باشد. یعنی یک $n$-فرم $\omega$ موجود باشد. به طوریکه $\nabla\omega = 0$.

**۲-۸.گزاره.** ارتباط آفین $\nabla$ باتاب صفر دارای تانسور ریچی متقارن است اگر و تنها اگر بطور موضعی تک مدول باشد.

**برهان:** ( ر.ک.به مرجع[۹] )

**۲-۹.تعریف.**منظوراز یک **ارتباط تک مدول** $\nabla$روی $M$ ، یک ارتباط آفین با تاب صفر است که دارای عنصر حجمی موازی روی $M$ می باشند . اگر$\omega$ عنصر حجمی روی $M$ چنان باشد. که $\nabla\omega=0$، آنگاه $(\nabla,\omega)$ یک ساختار تک مدول روی $M$ است.

**۲-۱۰.تعریف.** یک ارتباط آفین روی یک خمینه $M$ ، همگن موضعی است اگر و تنها اگر برای هر $x,y\in M$ همسایگی $U$ حول $V,x$ حول $y$، و یک تبدیل آفین $f:(U,\nabla|_U)\to(V,\nabla|_V)$ موجود باشد بطوری که $x$ را بر $y$ تصویر کند.۰

## ۳. متریک ناتبهگون

در این قسمت خواص ضرب داخلی روی فضای برداری حقیقی را یادآوری می کنیم.

فرض کنید $V$یک فضای برداری حقیقی $n$-بعدی باشد. برای تابع دو خطی مفروض $f:(x,y)\to f(x,y)\in R$ ، یک پایه در $V$ بصورت زیر وجود دارد.

$$\{e_1,e_2,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_{p+q+1},\dots e_n\}$$

چنانکه:

| | | |
|---|---|---|
| اگر | $i\neq j(\leq p)$ | $f(e_i,e_j)=0$ |
| برای هر | $1\leq i\leq p$ | $f(e_i,e_i)=1$ |
| برای هر j | $p+1\leq j\leq p+q$ | $f(e_j,e_i)=-1$ |
| برای هر k | $p+q+1\leq k\leq n$ | $f(e_k,e_k)=0$ |

بعلاوه،اعداد صحیح $q, p$، بصورت منحصر بفرد تعیین می گردد. (گرچه پایه از نـوع بـالا منحصـر بفرد نیست.) که، **قانون داخلی سیلوستر** نامیده می شود.

**۳-۱. تعریـف.** بـرای $f$ مفـروض زیـر فضـای $V_0 = \{x \in V, f(x,y) = 0, y \in V$ بـرای هـر$\}$ **فضای پوچ**[1] نامیده می شود.

**۳-۲. تعریف.** بردار $V$ **پوچ** نامیده می شود، اگر برای هر $V \neq 0$ داشـته باشـیم: $f(V,V) = 0$ که در آن $f: T_xM \times T_xM \to R$ یک نگاشت دو خطی می باشد.

**۳-۳. تعریف. . پایه پوچ** عبارت است از پایه ای که اعضای آن بردارهای پوچ باشند.

**۳-٤. تعریف.** تابع دو خطی $f$ **ناتبهگون**[2] است اگر فضای پوچ $\{0\}$ باشد. به عبارت دیـگر اگر بازای هر $f(x,y) = 0, y \in V$ آنگاه نتیجه شود که $x = 0$. همچنین $f$ ناتبـهگون اسـت اگر و تنـها اگر $p + q = n$.

**۳-۵. تعریف.** یک تابع دو خطی متقارن ناتبهگ‌ون ضرب داخلی روی $V$ نامیده می شود. زوج $(p,q)$ علامت $V$ نامیده می شود.اگر $p = n$ باشد ،آنگاه بازای هر $x$، $f(x,x) \geq 0$ در ایـن حالت $f$ معین مثبت نامیده می شود. اگر $q = n$ باشد ،آنگاه $f$ معیـن منفـی اسـت. اگر $f$ معیـن مثبت یامنفی باشدگوییم $f$ معین است. در غیر این صورت $f$ نا معین می باشد.

**۳-٦.تعریف.** فرض کنیم $M$ یک خمینه مشتق پذیر ، $n$- بعدی باشد منظور از مـتر نـا تبـهگون ، عبارت است از تانسور متقارن $g$ از نـوع (۲،۰) روی $M$ کـه ناتبـهگون اسـت. یعنـی اگر بـرای هـر $Y \in T_xM$، $g(X,Y) = 0$ آنگاه $X = 0$.

**۳-۷. تعریف.** اگر $g$ معین مثبت باشد، گوییم $g$ **متر ریمانی** است.

---

*1- Null Space* *2- Nondegenerate*