۱۲

بسم الله الرحمن الرحیم

۹۶۰۶۵

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه، گروه فیزیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد فیزیک

عنوان:

گشتاور کازیمیر و امکان استخراج انرژی از خلأ کوانتومی

استاد راهنما:

دکتر حبیب اله رزمی

نگارنده:

مهناز عبدالهی درگاه

زمستان ۱۳۸۶

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

از زحمات بی دریغ استاد راهنما جناب آقای دکتر رزمی که در تهیهٔ و تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم . همچنین از جناب آقایان دکتر کمانی و دکتر محمودی که زحمت داوری آن را بر عهده داشتند و کلیه دوستانی که در این راه مرا یاری دادند سپاسگزارم.

چکیده

یک موضوع قابل توجه در ارتباط با اثر کازیمیر، گشتاور کازیمیر می باشد که کمتر به آن پرداخته شده است. در این پایان نامه به طور ویژه اثر کازیمیر را در هندسه گوه بررسی نموده ضمن نقد محاسباتی که تاکنون انجام شده گشتاور آن را به دست می آوریم. روش های گوناگونی برای محاسبه نیروی کازیمیر وجود دارد که در این پایان نامه روش تابع گرین (با میدان اسکالر و میدان الکترومغناطیسی با فرمول بندی هموردا) مورد توجه ما می باشد. تأثیر نیروی کازیمیر از محدوده ملاحظات فیزیکی و بنیادی محض فراتر رفته و در حوزه مطالعات کاربردی و مهندسی مطرح می شود. به عنوان مثال به تأثیر نیروی کازیمیر روی عملکرد میکرو ماشین ها می توان اشاره کرد. اگر چه غالباً اثر کازیمیر به عنوان عامل مزاحم در سامانه های میکرو و نانو الکترومکانیکی بروز می کند و تلاش می شود تدابیری در جهت حذف آن اندیشیده شود، ولی از سوی دیگر با توجه به ویژگی هایی که نیروی کازیمیر دارد، مانند حساسیت بالای آن به تغییر فاصله، مهندسان را در ساخت میکرو و نانو ماشین هایی بر اساس این نیرو ترغیب کرده است. انرژی ناشی از افت و خیز خلأ کوانتومی معرف چشمه غنی انرژی خلأ است که با بروز اثرات فیزیکی مانند اثر کازیمیر جلوه ای واقعی پیدا می کند. آیا می توان این انرژی را برای کاربردهای عملی استخراج کرد؟ با توجه به اینکه استخراج انرژی از خلأ کوانتومی تعارضی با قوانین فیزیکی ندارد، چنین کاری در دنیای ریز (کوانتومی) غیر ممکن به نظر نمی رسد گرچه، این موضوع مورد اختلاف و قابل نقد است. در این پایان نامه ضمن معرفی طرح های ارائه شده در جهت بهره برداری از خلأ کوانتومی مدل هایی از ماشین های ساده مانند یک آونگ اتمی در مواجهه با افت و خیز خلأ قرار داده می بینیم که اثر کازیمیر می تواند نیروی مورد نیاز برای به کار افتادن این ماشین را تأمین کند.

واژه های کلیدی: نظریه میدان های کوانتومی، انرژی نقطه صفر، افت و خیز خلأ کوانتومی، گشتاور کازیمیر، سامانه های میکرو و نانو الکترومکانیکی، ماشین خلأ کوانتومی

یکاها و نمادها

فرمول بندی ها بر اساس دستگاه Heaviside-Lorentz نوشته شده است.

عناصر قطری متریک $(g_{\mu\nu})$ به شکل $g_{00}=-g_{11}=-g_{22}=-g_{33}=1$ است.

شاخص های حروف یونانی معرف مقادیر 0,1,2,3 و شاخص های حـروف لاتـین معـرف 1,2,3 هستند.

متغیر x به عنوان چاربردار و به صورت $x=(ct,\vec{x})$ است.

فهرست

فصل اول

مقدمه

۱–۱ معرفی خلأ کوانتومی

موضوع خلأ و نظریه پردازی درباره آن به سال های دور برمی گردد. آن زمان که فیلسوف یونانی، دیموکرتیوس، وجود فضای تهی را باطل می دانست و معتقد بود اتم ها در فضای خالی نمی توانند حرکت کنند. ارسطو نیز خلأ را یک فضای اشغال شده به وسیله ماده (پس زمینه ای پر از ماده) می دانست که می تواند نور و گرما را از مکانی به مکان دیگر ببرد. در نهایت پس از گذشت قرن ها، بر اساس نظریه ماکسول خلأ به عنوان فضایی پر از اتر شفاف معرفی شد که قادر است امواج الکترومغناطیسی مانند نور را انتقال دهد. ضریب گذر دهی الکتریکی (ε_0) و ضریب تراوایی مغناطیسی (μ_0) نیز به عنوان ویژگی های فیزیکی این فضا در نظر گرفته شدند. با شکل گیری نظریه نسبیت خاص و آزمایش مایکلسون – مورلی موضوع وجود اتر نقض شد ولی در نظریه ای جدید تهی بودن فضای خلأ مورد انتقاد قرار گرفت.

موضوع انرژی حالت زمینه (انرژی خلأ) و غیر بدیهی بودن آن و همچنین تأثیر و تأثر فیزیکی که دارد به ابتدای دوران شکل گیری مکانیک کوانتومی بر می گردد. با ظهور نظریه نوین کوانتوم، خلأ کوانتومی به عنوان یک فضای فعال معرفی شد به طوری که پدیده های خلق و فنای ذرات و افت و خیز میدان بر اساس آن به وقوع می پیوندند. یعنی خلأ کوانتومی دریایی از انرژی با تأثیر و تأثر دینامیکی است ولی چون بین انرژی و طول عمر ذرات رابطه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ برقرار است و در زمان بسیار کوتاهی فرآیند خلق و فنا رخ می دهد، قابل رویت و آشکار سازی نیستند. بازتاب چنین فعالیتی حتی در صفر مطلق هم وجود دارد. انرژی مرتبط با افت و خیز خلأ، انرژی نقطه صفر نامیده می شود. پلانک در سال ۱۹۱۲ برای اولین

بار انرژی نقطه صفر را پیش بینی کرد [۱]. وجود انرژی نقطه صفر (خلأ) یک نتیجه غیر قابل انکار نظریه میدان های کوانتومی به شمار می آید.

در ادامه این فصل به طور خلاصه انرژی خلأ را از نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی به دست می آوریم و به دنبال آن کوانتش میدان را به منظور دستیابی به فرمول بندی صریح، برای محاسباتی که پیش رو داریم بیان خواهیم کرد.

۱–۲ نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی آزاد

نظریه کوانتومی میدان الکترومغناطیسی آزاد (بدون حضور چشمه) توسط بورن، هایزنبرگ و یوردن در سال ۱۹۲۶ فرمول بندی شد[۲]. اولین بار دیراک در سال ۱۹۲۷ از این نظریه استفاده کرد که به جذب و گسیل تابش مربوط می شد[۳]. الکترودینامیک کوانتومی (QED) وجود افت و خیز نقطه صفر میدان را حتی بدون حضور چشمه، پیش بینی کرد. مطابق با ایده های نوین، جهان از میدان های مادی که کوانتوم های آن فرمیون ها هستند (به عنوان مثال الکترون ها وکوارک ها)، و میدان های نیرو که کوانتوم های آن بوزون ها هستند (مانند فوتون ها و گلوئان ها) تشکیل شده است. میدان های شناخته شده عبارت است از هسته ای ضعیف، هسته ای قوی، گرانش، و میدان الکترومغناطیسی. همه این میدان ها دارای انرژی نقطه صفر (خلأ) می باشند. فهمیدن خصوصیات میدان های الکترومغناطیسی مهم است؛ نه تنها به این خاطر که در حال حاضر الکترودینامیک کوانتومی یکی از بهترین نظریه هایی است که در دست داریم، بلکه به دلیل ویژگی هایی است که دارد. با توجه به این که برد اثر کازیمیر از مرتبه میکرو و نانومتر می باشد و برد میدان های هسته ای ضعیف و قوی از مرتبه $۱۰^{-۱۵}$ متر است و همچنین نظریه کوانتومی میدان گرانش و جزئیات آن هنوز کاملاً شناخته شده نیست، در این پایان نامه به طور مشخص میدان الکترومغناطیسی را بررسی خواهیم کرد.

همان گونه که می دانیم حداقل انرژی برای نوسانگر هماهنگ غیرنسبیتی $1/2\hbar\omega$ است [۴]. به طور کلی انرژی چنین نوسانگرهایی عبارت است از:

$$E = \frac{\hbar}{2}\sum_{n}\omega_n \qquad (۱-۱)$$

که جمع روی تمام فرکانس های مربوطه انجام می شود. غالباً در کتاب های نظریه میدان های کوانتومی [۵،۶] میدان های کوانتیده غیر برهم کنشی را به صورت نوسانگرهای هماهنگ مدل سازی می کنند.

در نظریه کوانتومی مرسوم اساس انرژی نقطه صفر به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نسبت داده می شود، این عدم قطعیت کوچک به دلیل اشکالات قابل تصحیح در اندازه گیری نمی باشد، بلکه تا اندازه ای ابهام ذاتی طبیعت کوانتومی انرژی و ماده را نشان می دهد. کارهای تجربی و نظری بنیادی نشان داده اند که در سامانه های کوانتومی محدودیت دقت اندازه گیری که در اصل عدم قطعیت نمایان شده، به واسطه افت و خیز خلأ کوانتومی تحمیل می شود.

۱-۲-۱ کوانتش کانونیکی میدان الکترومغناطیسی

معادلات ماکسول برای میدان الکترومغناطیسی آزاد:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \qquad (۱-۲الف)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \qquad (۱-۲ب)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{-1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (۱-۲ج)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (۱-۲د)$$

از معادلات (۱-۲ب) و (۱-۲ج) پتانسیل اسکالر $\varphi(\vec{x},t)$ و پتانسیل برداری $\vec{A}(\vec{x},t)$ را معرفی می کنیم:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{۱-۳}$$

قابل ذکر است که $\vec{A}$ و φ منحصر به فرد نمی باشند. از (۱-۲د) و (۱-۲الف) در پیمانه کولمب $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$، و در غیاب چشمه، $\varphi = 0$، (یعنی تحت پیمانه تابشی) رابطه زیر به دست می آید:

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{A}}{\partial^2 t} = 0 \tag{۱-۴}$$

که معادله میدان می باشد و جواب آن برابر $\vec{A}(\vec{x},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}$ است و چون:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_0 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{k}\cdot\vec{A}_0 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{k} \perp \vec{A} \tag{۱-۵}$$

بنابراین، این میدان عرضی است که غالباً میدان تابشی نامیده مـی شـود. رابطـه انـرژی آن بـه صورت زیر است:

$$H_{rad} = \frac{1}{2}\int d^3x(E^2 + B^2) \tag{۱-۶}$$

برای کوانتش باید مختصه های مزدوج کانونیکی (مثل x و p_x در مکانیک کوانتـومی غیـر نسبیتی) برای هر درجه آزادی بسازیم و رابطه جابجایی بین آنها را به دست آوریم.

میدان $\vec{A}$ را می توان بر حسب تبدیل فوریه بسط داد. چون میدان آزاد اسـت بایـد بـر حـسب انتگرال فوریه بسط داده شود ولی با در نظر گرفتن شرط مرزی متنـاوب مـی تـوانیم $\vec{A}$ را بـر حسب سری فوریه بسط دهیم. آنالیز فوریه معادل با پیدا کردن مدهای بهنجار تابشی است کـه هر مد مستقل از مدهای دیگر با معادله نوسانگر هماهنـگ قابـل توصیـف اسـت. بـا توجـه بـه کوانتیده بودن نوسانگر هماهنگ می توانیم میدان تابشی را کوانتیده کنیم.

شرط مرزی متناوب برای جعبه ای با ابعاد خیلی بزرگ L و حجم V عبارت است از:

$$\vec{A}(0,y,z,t)=\vec{A}(L,y,z,t) \qquad (۱-۷)$$

و برای بقیه مختصه ها به همین شکل.

توابع زیر یک مجموعه کامل میدان های عرضی متعامد بهنجار را شکل می دهند:

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})e^{i\vec{k}.\vec{x}}, \qquad r=1,2 \qquad (۱-۸)$$

که بردار موج k برابر است با:

$$k=\frac{2\pi}{L}(n_1,n_2,n_3), \qquad n_1,n_2,n_3\in Z \qquad (۱-۹)$$

رابطه (۱-۸) شرط مرزی متناوب (۱-۷) را ارضا می کند. در ضمن $\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})$ بـردار یکـه قطـبش می باشد و روابط زیر برقرارند:

$$\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})\cdot\vec{\varepsilon}_s(\vec{k})=\delta_{rs}, \qquad \vec{\varepsilon}_r(\vec{k})\cdot\vec{k}=0, \qquad r,s=1,2 \qquad (۱-۱۰)$$

حال می توانیم بسط سری فوریه پتانسیل برداری $\vec{A}(\vec{x},t)$ را بنویسیم:

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k\sum_r\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}}\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})[a_r(\vec{k},t)e^{i\vec{k}.\vec{x}}+a_r^*(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}.\vec{x}}] \qquad (۱-۱۱)$$

که $\omega_k=c\left|\vec{k}\right|$.

هر مد از این میدان، معادل یک نوسانگر هماهنگ است بنابراین، a و a^* به عملگر (به ترتیـب عملگر فنا و خلق) تبدیل می شوند. در تصویر هایزنبرگ رابطه (۱-۱۱) را بازنویسی می کنیم:

$$\vec{A}(\vec{x},t)=\sum_k\sum_r\sqrt{\frac{\hbar c^2}{2V\omega_k}}\vec{\varepsilon}_r(\vec{k})[a_r(\vec{k})e^{(i\vec{k}.\vec{x}-\omega t)}+a_r^+(\vec{k})e^{-(i\vec{k}.\vec{x}-\omega t)}] \qquad (۱-۱۲)$$

با جاگذاری (۱-۱۲) در (۱-۶) و با کمک (۱-۳) انرژی تابشی به دست می آید:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k,r}\hbar\omega_k (a_r(\vec{k})a_r^+(\vec{k}) + a_r^+(\vec{k})a_r(\vec{k})) \qquad (۱۳-۱)$$

روابط جابجایی زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} &[a_r(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = \delta_{rs}\delta_{kk'} \\ &[a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] = [a_r^+(\vec{k}), a_s^+(\vec{k}')] = 0 \end{aligned} \qquad (۱۴-۱)$$

در نتیجه:

$$\hat{H} = \sum_{k,r}\hbar\omega_k (a_r(\vec{k})a_r^+(\vec{k}) + \frac{\hat{1}}{2}) \qquad (۱۵-۱)$$

بنابراین، انرژی نقطه صفر میدان برابر می شود با $\sum_{k,r}\frac{\hbar\omega_k}{2}$ که بی نهایت است (برآورد اندازه انرژی خلأ را در فصل آخر بررسی می کنیم) و نقشی در مسائل فیزیکی ندارد. ولی تغییر در حجم یا شرایط مرزی که سبب تحول انرژی خلأ می شود، نتیجه فیزیکی به دنبال دارد. اثر کازیمیر یکی از جلوه های انرژی خلأ است که به طور مفصل در فصل بعد آن را معرفی خواهیم کرد.

۱-۲-۲ روابط جابه جایی کانونیکی عملگر میدان

در فرمول بندی ناوردای میدان الکترومغناطیسی تابش عرضی میدان کوانتیده می شود. در حالی که تجزیه میدان به مولفه های عرضی و طولی به چارچوب وابسته است و بنابراین ناوردای لورنتزی از بین می رود. برای داشتن یک نظریه هموردا همه چهار مولفه از چهار پتانسیل $A^\mu(x) = (\varphi, \vec{A})$ را به عنوان درجات آزادی دینامیکی در نظر می گیریم و تمام مولفه ها کوانتیده می شوند.

رابطه جابجایی کانونیکی عملگر میدان A^μ برابر است با [۷]:

$$[A^\mu(x), A^\nu(x')] = i\hbar c D^{\mu\nu}(x - x') \qquad (۱۶-۱)$$

که.

$$D^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu}\Delta(x) \tag{۱۷-۱}$$

و $\Delta(x)$ در رابطه زیر صدق می کند:

$$\Box\left(\Delta(x-x')\right) = 0 \tag{۱۸-۱}$$

به طوری که $\Box = \partial_\mu \partial^\mu = (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2)$

انتشارگر فوتون فاینمن با رابطه زیر معرفی می شود [۷]:

$$\langle 0 | T\{A^\mu(x) A^\nu(x')\} | 0 \rangle = i\hbar c D_F^{\mu\nu}(x-x') \tag{۱۹-۱}$$

که $T\{A^\mu(x)A^\nu(x')\}$ مرتب ساز زمانی[۱] است.

$$D_F^{\mu\nu}(x) = -g^{\mu\nu}\Delta_F(x) \tag{۲۰-۱}$$

$\Delta_F(x)$ تابع معروف دلتای فاینمن است (یا تابع گرین وابسته به زمان) که در رابطه زیر صدق می کند:

$$\Box\left(\Delta_F(x-x')\right) = -\delta^{(4)}(x-x') \tag{۲۱-۱}$$

با جاگذاری (۱-۲۰) در (۱-۱۹) و جایگزینی تابع گرین وابسته به زمان به جای $\Delta_F(x)$، خواهیم داشت:

---

[۱] مرتب ساز زمانی یعنی ترتیب زمانی که عملگرها عمل می کنند. به عنوان مثال برای ϕ به صورت زیر تعریف می شود (فصل سوم از مراجع [۵،۷]).

$$T\{\phi(x)\phi(x')\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(x'), & t>t' \\ \phi(x')\phi(x), & t'>t \end{cases}$$

$$\langle 0|T\{A^{\mu}(x)A^{\nu}(x')\}|0\rangle = -i\hbar c g^{\mu\nu} G(x,x') \qquad (۱-۲۲)$$

در مورد میدان اسکالر $\phi(x)$ (با حاکمیت معادله کلاین – گوردون) به طور مشابه به دست می آید:

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(x')\}|0\rangle = i\hbar c G(x,x') \qquad (۱-۲۳)$$

(۱-۲۲) و (۱-۲۳) دو رابطه اساسی در محاسبه نیروی کازیمیر به روش تابع گرین می باشند.

وجود افت و خیز میدان تابشی حتی در حالت پایه، همان طور که گفتیم یک پیامد برجسته الکترودینامیک کوانتومی است که چند پدیده مشهور را توجیه می کند. یکی از آنها وجود نیروی الکترومغناطیسی بین دو یا چند شیء بدون بار در خلأ می باشد. وجود این نیرو بین دو صفحه رسانا توسط کازیمیر مطرح شد[۸] و طی آزمایش های متعددی به تأیید تجربی رسید [۹]. در این پایان نامه ضمن معرفی نیروی کازیمیر در فصل دوم، موضوع "گشتاور کازیمیر" (که در مقایسه با نیروی کازیمیر کمتر به آن پرداخته شده) را در فصل سوم مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بروز اثر کازیمیر نشان دهنده واقعی بودن انرژی خلأ می باشد. همین موضوع باعث شده که انرژی خلأ از محدوده نظری پا فراتر نهاده و جنبه کاربردی آن در حد " امکان استفاده از آن" مطرح شود. این اثر در فن آوری معاصر از اهمیت زیادی برخوردار شده است و در ساخت و عملکرد سامانه های میکرو و نانو الکترومکانیکی MEMS/NEMS چه به عنوان عامل مزاحم و چه به شکل مفید، نقش مهمی را ایفا می کند [۱۰] که به طور مختصر در فصل چهارم به این موضوع خواهیم پرداخت. در فصل پنجم از این پایان نامه با استفاده از شناختی که از خلأ کوانتومی و پیامدهای نظریه میدان های کوانتومی به دست می آوریم خلأ را به عنوان چشمه ای سرشار از انرژی پتانسیل به منظور بهره برداری از آن مطالعه می کنیم.

فصل دوم

معرفی اثر کازیمیر

نیروی کازیمیر، نیروی جاذبه ای است بین صفحات رسانا، بدون بار، و موازی که در فاصله کمی از هم (از مرتبه میکرومتر و کمتر) در خلأ قرار دارند. اثر کازیمیر غالباً به عنوان اثبات واقعی بودن میدان الکترومغناطیسی خلأ ذکر می شود[۵]. باید توجه شود که پیامدهای مشاهده پذیر زیادی از میدان خلأ وجود دارند؛ مانند گسیل خود به خود و جابجایی لمب. ویژگی مهم اثر کازیمیر این است که هرچند یک اثر کوانتومی است ولی نیروی بین اجسام ماکروسکوپی را پیش بینی می کند. به عبارت دیگر اثر کازیمیر جلوه ای ماکروسکوپی از پدیده ای کوانتومی می باشد.

۲–۱ منشأ تاریخی پیدایش اثر کازیمیر

در حقیقت کار کازیمیر ریشه در یک مسئله شیمی کلوئیدی دارد، یعنی، پایداری مایع تعلیقی هیدروفوبیک[۱] ذرات در الکترولیت مایع رقیق. در چنین مایع تعلیقی اگر ذرات (تقریباً با اندازه ۰/۱ تا ۱ میکرومتر) لخته[۲] نشوند، پایدار است. ذرات در یک مایع تعلیقی پایدار باردار می شوند؛ لختگی زمانی رخ می دهد که تراکم الکترولیت بیشتر از مقدار بحرانی شود. این رفتار از نتیجه اثر متقابل بین نیروی جاذبه و دافعه توصیف می شود. هر ذره باردار با یون های مخالف احاطه شده و لایه یونی شکل می گیرد که با طول دبای (L_D) مشخص می شود وقتی دو ذره در محدوده L_D از یکدیگر قرار می گیرند به واسطه وجود لایه یونی نیروی دافعه به وجود می آید. جاذبه بین اتمی ناشی از اثر واندروالس نیز وجود دارد، چون هر ذره نوعاً شامل میلیون ها اتم است و جمع تمام این نیروها، نیروی جاذبه واندروالس را تشکیل می دهند. یک مدل کمّی برای پایداری یک چنین مایع تعلیقی کلوئیدی به صورت دو صفحه موازی با فاصله d از هم

---

[۱] Hydrophobic suspensions
[۲] Coagulation