دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

ساختار گروه‌های متناهی با رتبه مزدوجی ۲

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (ریاضی محض)

محمد امین مرشدلو

استاد راهنما

دکتر بیژن طائری

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (ریاضی محض) آقای محمد امین مرشدلو

تحت عنوان

ساختار گروه‌های متناهی با رتبه مزدوجی ۲

در تاریخ ۲۰ تیرماه ۱۳۹۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر بیژن طائری
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	آقای محمد مشکوری
۳ــ استاد داور ۱	دکتر محمدرضا ریسمانچیان (دانشگاه شهر کرد)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر محمود بهبودی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　　　دکتر اعظم اعتماد

خداوند منان را سپاسگزارم که به واسطه‌ی لطفش یکی دیگر از مراحل زندگی‌ام را با موفقیت به پایان رساندم. علو درجات از درگاه الهی برای ارواح پدر و مادرم طلب می‌نمایم،که همواره مرهون دعای خیر آنان هستم. از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر بیژن طائری کمال تشکر و قدردانی دارم که با رهنمودهای ارزشمندشان در طول انجام پایان‌نامه همراه من بودند. از استاد گرامی جناب آقای محمد مشکوری به خاطر قبول مشاوره این پایان‌نامه سپاسگزاری می‌نمایم. از آقایان دکتر محمدرضا ریسمانچیان و دکتر محمود بهبودی به خاطر بازخوانی پایان‌نامه و داوری آن تشکر و قدردانی می‌نمایم. همچنین از زحمات بی‌دریغ جناب آقای محمد رضا فلکی، استاد ارجمندم در مقطع کارشناسی، که همواره مشوق اینجانب بوده‌اند صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم.

محمدامین مرشدلو

تیرماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه ساختار گروه‌های متناهی که دارای ۳ اندازه رده‌ی مزدوجی هستند، را بررسی می‌کنیم. به ویژه ملاحظه می‌کنیم که این گروه‌ها، حل‌پذیر با طول مشتق حداکثر ۳ هستند یا گروه‌های پوچ‌توان‌اند. رتبه‌ی مزدوجی یک گروه تعداد اندازه‌های متمایز رده‌های مزدوجی غیرمرکزی آن گروه است. اگر G یک گروه دلخواه و A یک گروه آبلی باشد آن‌گاه رتبه‌ی مزدوجی G و $G \times A$ برابر است. همچنین اگر رتبه‌ی مزدوجی G برابر ۱ باشد، در این صورت G پوچ‌توان بوده و به صورت حاصل‌ضرب مستقیم یک گروه آبلی و یک گروه از مرتبه توان اول تجزیه می‌شود. یک کران بالا برای مجموعه‌ی شامل رده‌ی پوچ‌توانی این گروه‌ها وجود دارد، که از این‌جا نتیجه می‌شود، مجموعه‌ی شامل طول مشتق چنین گروه‌هایی کران‌دار است. در مورد گروه‌هایی با رتبه‌ی مزدوجی ۲ خواهیم دید که این گروه‌ها حل‌پذیرند. سپس رده‌ی $F-$گروه‌ها که شامل گروه‌هایی است که مرکزسازهای عناصر غیرمرکزی آن‌ها دو بدو با توجه به رابطه‌ی شمولیت غیرقابل مقایسه هستند، معرفی می‌کنیم. آنگاه ملاحظه می‌کنیم که هر گروه با رتبه‌ی مزدوجی ۲ یا یک $F-$گروه است یا حاصل‌ضرب مستقیم یک گروه آبلی و یک گروه با مرتبه‌ی توان اول است. سپس ملاحظه می‌کنیم که‌مجموعه‌ی شامل طول مشتق گروه‌های با رتبه‌ی مزدوجی ۲ که پوچ‌توان نیستند، کراندار است. اما با ارائه‌ی یک مثال خواهیم دید که‌مجموعه‌ی شامل رده‌ی پوچ‌توانی گروه‌های بارتبه‌ی مزدوجی ۲ کران بالا ندارد. در واقع حاصل‌ضرب حلقوی $C_{p^a} \wr C_p$ یک گروه با رتبه‌ی مزدوجی ۲ و رده‌ی پوچ‌توانی $a(p-۱)+۱$ است.

کلمات کلیدی: اندازه رده‌ی مزدوجی، رتبه‌ی مزدوجی، طول مشتق.

فصل ۱

مقدمه

۱ـ۱ تاریخچه

در این پایان‌نامه p همواره معرف یک عدد اول و π زیرمجموعه‌ای از اعداد اول است. عضو خنثی گروه با ۱ نشان داده می‌شود. هدف ما بررسی ساختار گروه‌های متناهی با رتبه مزدوجی ۲ است. بررسی ما براساس مقاله‌ای است که دلفی و همکاران[۴] در سال ۲۰۰۹ ارائه دادند. رتبه‌ی مزدوجی یک گروه در سال ۱۹۵۲ توسط ایتو [۱۱] مطرح شد. ایتو تعداد اعضای مجموعه‌ی اندازه‌های رده‌های مزدوجی غیرمرکزی یک گروه را به عنوان رتبه‌ی مزدوجی گروه تعریف کرد. او نشان داد که گروه‌های با رتبه‌ی مزدوجی ۱ پوچ‌توان‌اند و به علاوه در این حالت اندازه رده‌ی مزدوجی غیرمرکزی توانی از یک عدد اول است. بنابراین ساختار گروه‌های با رتبه مزدوجی ۱ به pـگروه‌های با رتبه مزدوجی ۱ ساده‌تر می‌شود.مطالعات ایتو [۱۲] در زمینه‌ی رتبه‌ی مزدوجی گروه‌ها ادامه داشت تا آن‌که در سال ۱۹۶۹ ثابت کرد، گروه‌های با رتبه‌ی مزدوجی ۲ حل‌پذیرند. رده‌ای از گروه‌ها موسوم به Fـگروه‌ها وجود دارند که در زمینه‌ی مطالعه بر روی رتبه‌ی مزدوجی نقش دارند. این رده شامل گروه‌هایی است که مرکزسازهای عناصر غیرمرکزی آنها دو بدو با توجه به رابطه‌ی شمولیت غیر قابل مقایسه باشند. به طور معادل، گروه غیرآبلی G یک Fـگروه است اگر به ازای هر دو عنصر غیرمرکزی x و y از رابطه‌ی $C_G(x) \leq C_G(y)$ نتیجه شود که $C_G(x) = C_G(y)$.

در سال ۱۹۷۱، ربمان [۱٦] Fـگروه‌ها را رده‌بندی کرد. در راستای مطالعه روی رتبه‌ی مزدوجی،

در سال ۱۹۷۳، کامینا [۱] ثابت کرد که هر گروه با رتبه‌ی مزدوجی ۲ یا یک F−گروه است و یا به صورت حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه است، که یکی از آنها آبلی است و مرتبه‌ی دیگری شامل حداکثر ۲ عدد اول می‌شود. در پایان‌نامه حاضر قضیه‌ی کامینا را به گونه‌ای قوی‌تر ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر G یک گروه با رتبه‌ی مزدوجی ۲ باشد، آن‌گاه G یا یک F−گروه است یا حاصل‌ضرب مستقیم یک گروه آبلی با یک گروه از مرتبه‌ی توان اول است.

در خصوص گروه‌های با رتبه‌ی مزدوجی ۱ و ۲ این سوال مطرح بود که آیا مجموعه‌ی شامل رده‌ی پوچ‌توانی و مجموعه‌ی شامل طول مشتق چنین گروه‌هایی کراندار است؟ مطالعه و تحقیق روی این سوال ادامه داشت تا اینکه در سال ۲۰۰۰، ایشیکاوا [۱۰] یک کران بالا برای مجموعه‌ی شامل رده‌ی پوچ توانی گروه‌های با رتبه‌ی مزدوجی ۱ به دست آورد. ایشیکاوا نشان داد اگر G یک p−گروه با رتبه‌ی مزدوجی ۱ باشد در این صورت رده پوچ‌توانی G کوچکتر یا مساوی ۳ است. در سال ۲۰۰۹ دلفی و همکاران[۴] ساختار گروه‌های با رتبه‌ی مزدوجی ۲ را به دست آوردند که در این پایان‌نامه به بررسی آن می‌پردازیم. در این پایان‌نامه ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه غیر پوچ‌توان با رتبه‌ی مزدوجی ۲ باشد آن‌گاه طول مشتق G حداکثر برابر ۳ است.

اما مثالی می آوریم که نشان می‌دهد گروه‌های پوچ‌توان با رتبه‌ی مزدوجی ۲ وجود دارند که رده‌ی پوچ‌توانی آنها را به هر اندازه بزرگ می‌توانیم انتخاب کنیم.

۱−۲ تعاریف و قضایای مقدماتی

اگر H و K گروه‌های دلخواهی باشند، مجموعه‌ی $H \times K$ (حاصل‌ضرب دکارتی H و K) ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد، مشروط بر آن‌که به ازای هر $h, h' \in H$ و $k, k' \in K$ تعریف کنیم

$$(h,k)(h',k') = (hh',kk').$$

اصول موضوعه گروه به آسانی تحقیق می‌شوند: بسته بودن بلافاصله از تعریف ضرب نتیجه می‌شود شرکت‌پذیری از شرکت‌پذیری ضرب‌های H و K؛ عضو همانی $H \times K$، $(۱,۱)$ است و

$$(h,k)^{-۱} = (h^{-۱},k^{-۱}).$$

از این پس، هرگاه H و K گروه‌هایی باشند، $H \times K$ معرف یک چنین گروهی خواهد بود این گروه را حاصلضرب مستقیم H و K می‌نامیم.

گزاره ۱.۱ گروه $H \times K$ دارای زیرگروه‌های

$$H \times ۱ = \{(h,۱) : h \in H\} \cong H \quad , \quad ۱ \times K = \{(۱,k) : k \in K\} \cong K$$

است. هر عضو $H \times K$ به صورت حاصلضربی از یک عضو $H \times 1$ و یک عضو $1 \times K$ قابل بیان است. به علاوه هر عضو $H \times 1$ با هر عضو $1 \times K$ جابجایی‌پذیر است و

$$(H \times 1) \cap (1 \times K) = 1.$$

اثبات. ۲.۳۳ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

لم ۱.۲ فرض می‌کنیم G زیرگروه‌هایی چون H و K دارد به طوری که هر عضو G به صورت حاصلضرب hk که $h \in H$ و $k \in K$ قابل بیان است و هر عضو H با هر عضو K جابجایی‌پذیر است و $H \cap K = 1$. در این صورت $G \cong H \times K$.

اثبات. لم ۲.۳۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

گزاره ۱.۳ فرض کنید H و K گروه‌هایی دلخواه باشند در این صورت $H \times K \cong K \times H$.

اثبات. نگاشت $(h,k) \mapsto (k,h)$ (که به ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ تعریف می‌شود) یک یکریختی است از $H \times K$ بر روی $K \times H$. ■

تعریف ۱.۴ فرض می‌کنیم $H \leq G$ باشد و A مجموعه‌ای ناتهی از خودریختی‌های G. می‌گوییم H یک زیرگروه A—پایای G است، اگر

$$h^{\alpha} \in H, \qquad \alpha \in A, h \in H \text{ به ازای هر}$$

به عنوان مثال هرگاه $A = 1$، آن‌گاه بدیهی است که هر زیرگروه G، A—پایاست. در صورتی که H، $\mathrm{Aut}G$—پایا باشد که در آن $\mathrm{Aut}G$ مجموعه‌ی خودریختی‌های G است، می‌گوییم H در G مشخصه است و با نماد $H \ \mathrm{char} \ G$ نشان می‌دهیم.

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که اگر G گروهی متناهی از مرتبه n باشد و m را یک مقسوم علیه n بگیریم به طوری که G دارای دقیقاً یک زیرگروه H از مرتبه m باشد در این صورت H در G مشخصه است.

لم ۱.۵ هرگاه $H \trianglelefteq G$ و K یک زیرگروه مشخصه‌ی H باشد، آن‌گاه $K \trianglelefteq G$.

اثبات. به ازای هر $g \in G$، $g^{-1}Hg = H$. بنابراین خودریختی داخلی τ_g از G، که بر اثر g القا شده است، H را بر روی H می‌نگارد. از این رو با تحدید به H، τ_g یک خودریختی σ_g از H را مشخص می‌کند.

$$\sigma_g : h \mapsto g^{-1}hg \qquad\qquad h \in H \text{ به ازای هر}$$

از آن‌جایی که K در H مشخصه است پس K، σ_g—پایا خواهد بود؛ لذا به ازای هر $k \in K$،

$$k^{\sigma_g} \in K,$$

یعنی

$$g^{-1} kg \in K.$$

این رابطه به ازای هر $g \in G$ صادق است، بنابراین $K \trianglelefteq G$. ■

گزاره ۶.۱ اگر $\frac{G}{Z(G)}$ دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است.

اثبات. قرار دهید $Z = Z(G)$. فرض کنید $\frac{G}{Z} = \langle gZ \rangle$ و $a, b \in G$. در این صورت به ازای $m, n \in \mathbb{Z}$، $bZ = g^m Z$ و $aZ = g^n Z$. از این رو $a \in g^n Z$ و $b \in g^m Z$ و به ازای $d, h \in Z$ی $a = g^n d$ و $b = g^m h$. داریم

$$ab = (g^n d)(g^m h) = g^n g^m dh = g^{n+m} hd = g^m g^n hd = g^m h g^n d = ba.$$

بنابراین G آبلی است. ■

لم ۷.۱ هر گروه از مرتبه‌ی p^2 آبلی است.

اثبات. فرض کنید $|G| = p^2$ و G غیر آبلی باشد، در این صورت $Z(G) < G$. با توجه به این که G یک p—گروه است لذا $Z(G) \neq 1$. بنابر این از رابطه‌ی $G < Z(G) \neq 1$ نتیجه می‌شود که $|\frac{G}{Z(G)}| = p$ پس $\frac{G}{Z(G)}$ دوری است، در نتیجه بنا به گزاره‌ی (۶.۱) G آبلی است و این با فرض تناقض دارد. ■

عدد صحیح مثبت n را یک π—عدد می‌گوییم اگر هر مقسوم علیه اول n به π تعلق داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که لازم نیست هر عدد اول در π مقسوم علیه n باشد: بنابراین به عنوان مثال، ۶ یک $\{2, 3, 5\}$—عدد است.

بنا بر قرارداد، ۱ به ازای هر مجموعه‌ی π از اعداد اول یک π—عدد است.

فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. G را یک π—گروه گوییم، اگر $|G|$ یک π—عدد باشد. لذا به عنوان مثال S_3 و S_4 که در آن S_n گروه متقارن روی n حرف است، $\{2, 3\}$—گروه هستند، اما S_5 یک $\{2, 3\}$—گروه نیست. ولی S_3، S_4 و S_5 همگی $\{2, 3, 5\}$—گروه هستند. اگر $\pi = \{p\}$، یک π—گروه را ترجیحاً (به جای یک $\{p\}$—گروه) یک p—گروه می‌نامند.

نتیجه ۸.۱ هرگاه G یک π—گروه باشد آن‌گاه همه‌ی زیرگروه‌ها و همه‌ی گروه‌های خارج قسمتی G، π—گروه هستند.

اثبات. مرتبه‌های همه‌ی زیرگروه‌ها و همه‌ی گروه‌های خارج قسمتی G، $|G|$ را می‌شمارند. ■

گزاره **۹.۱** فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، در این صورت G دارای بزرگترین π−زیرگروه نرمال یکتایی است، که با $O_\pi(G)$ نمایش می‌دهیم و π−رادیکال G می‌نامیم.

اثبات. ۴۳.۳ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

تعریف **۱۰.۱** جابه‌جاگر یک زوج مرتب x و y از اعضای G، عبارت است از عضو

$$[x,y] = x^{-1}y^{-1}xy \in G.$$

بلافاصله از این تعریف به دست می آوریم:

الف − $[y,x] = [x,y]^{-1}$.

ب − $[x,y] = 1$ اگر و تنها اگر x و y جابه‌جایی‌پذیر باشند.

فرض می‌کنیم $H, K \leq G$. در این صورت زیرگروه جابجاگر متناظر با H و K عبارتست از

$$[H,K] = \langle [h,k] : h \in H, k \in K \rangle \ \leq G.$$

زیرگروه $[G,G]$ را که به وسیله‌ی تمام جابجاگرهای G تولید می‌شود، معمولاً به G' نمایش می‌دهند و گروه مشتق G (یا زیرگروه جابجاگر G) می‌نامند.

گزاره **۱۱.۱** فرض کنیم $H, K \leq G$. در این صورت $[H,K] = [K,H]$.

اثبات. قضیه‌ی ۴۹.۳ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

گزاره **۱۲.۱** فرض می‌کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathrm{Aut}G$ و H و K زیرگروه‌های A−پایای G باشند. در این صورت $[H,K]$ نیز زیرگروه A−پایای G است. به ویژه، گروه مشتق G' یک زیرگروه مشخصه‌ی G است.

اثبات. قضیه‌ی ۵۱.۳ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

قضیه **۱۳.۱** برای هر گروه G، گروه مشتق G' کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K از G است، به طوری که $\frac{G}{K}$ آبلی است.

اثبات. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت $\frac{G}{K}$ آبلی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in G$، $(xK)(yK) = (yK)(xK)$؛ یعنی، اگر و تنها اگر $xyK = yxK$، یا هم‌ارز با آن $x^{-1}y^{-1}xyK = K$؛ یعنی اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in G$، $[x,y] \in K$. لذا $\frac{G}{K}$ آبلی است اگر و تنها اگر $G' \trianglelefteq K$. چون بنا بر ۱۲.۱، $G' \trianglelefteq G$، اثبات تمام است. ■

لم ۱۴.۱ فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $[H,K] \leq H \cap K$. به ویژه، اگر $H \cap K = 1$ آن‌گاه هر عضو H با هر عضو K جابجایی‌پذیر است.

اثبات. لم ۵۳.۳، از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

مثال ۱۵.۱ فرض می‌کنیم $K \leq H \leq G$ که $K \trianglelefteq G$. در این صورت

الف — $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $[H,G] \leq H$.

ب — $\frac{H}{K} \leq Z(\frac{G}{K})$ اگر و تنها اگر $[H,G] \leq K$.

پ — هر زیرگروه از G که شامل G' باشد در G نرمال است.

اثبات. الف — فرض کنیم $H \trianglelefteq G$ بنا به لم ۱۴.۱، $[H,G] \leq H \cap G = H$. برعکس اگر $h \in H$ و $g \in G$ عناصر دلخواهی باشند از $[H,G] \leq H$ نتیجه می‌شود $h^{-1}g^{-1}hg \in H$ بنابراین $g^{-1}hg \in H$ و این یعنی $H \trianglelefteq G$.

ب — فرض کنیم $g \in G$ و $h \in H$ دلخواه باشند، $\frac{H}{K} \leq Z(\frac{G}{K})$ اگر و تنها اگر $hKgK = gKhK$ اگر و تنها اگر $h^{-1}g^{-1}hg \in K$ اگر و تنها اگر $[H,G] \leq K$.

پ — فرض کنیم N زیرگروهی از G شامل G' باشد و $x \in N$ و $g \in G$ دلخواه باشند. در این صورت با توجه به این‌که $G' \leq N$ داریم $x^{-1}g^{-1}xg \in N$ در نتیجه $g^{-1}xg \in N$ یعنی $N \trianglelefteq G$. ■

مثال ۱۶.۱ فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$.

الف — هرگاه $x, y \in G$ آن‌گاه در $\frac{G}{K}$، داریم $[xK, yK] = [x,y]K$.

ب — اگر $H, J \leq G$، آن‌گاه $\frac{[H,J]K}{K} = [\frac{HK}{K}, \frac{JK}{K}]$ به ویژه $(\frac{G}{K})' = \frac{G'K}{K}$.

اثبات. الف — $[xK, yK] = (xK)^{-1}(yK)^{-1}(xK)(yK) = x^{-1}y^{-1}xyK = [x,y]K$.

ب — عناصر دلخواه $x \in H$ و $y \in J$ را درنظر می‌گیریم، با استفاده از تساوی

$$x^{-1}y^{-1}xyK = (x^{-1}K)(y^{-1}K)(xK)(yK) = (xK)^{-1}(yK)^{-1}(xK)(yK)$$

به راحتی حکم ثابت می‌شود و داریم:

$$(\frac{G}{K})' = [\frac{G}{K}, \frac{G}{K}] = [\frac{GK}{K}, \frac{GK}{K}] = \frac{[G,G]K}{K} = \frac{G'K}{K}.$$

بنا بر این اثبات تمام است. ■

تعریف ۱۷.۱ به ازای هر n طبیعی که $n \geq ۲$، گروه چهارگان تعمیم‌یافته که آن را با $Q_{۴n}$ نشان می‌دهند، زیرگروهی از گروه $GL(۲,\mathbb{C})$ است که با دو ماتریس زیر تولید می‌شود:

$$\zeta = \begin{pmatrix} w & ۰ \\ ۰ & \bar{w} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \eta = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}$$

که در آن $w = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

اگر در این تعریف قرار دهیم $n = ۲$ و $i = \zeta$ و $j = \eta$ و $k = \zeta\eta$ آن‌گاه گروه چهارگان $Q_۸$ به دست می‌آید.

قضیه ۱۸.۱ گروه $Q_{۴n}$ دارای نمایش زیر است:

$$\langle x, y | x^{۲n} = ۱, x^n = y^۲, y^{-۱}xy = x^{-۱} \rangle.$$

اثبات. قضیه ۲.۳.۷.، از مرجع [۲۰] را ببینید. ■

۱—۳ عمل‌های گروهی بر مجموعه‌ها

تعریف ۱۹.۱ می‌گوییم G بر مجموعه ناتهی X عمل می‌کند (یا G اعضای X را جابجا می‌کند) اگر به هر $g \in G$ و هر $x \in X$؛ عضو یکتای $x^g \in X$، طوری متناظر شود که به ازای هر $x \in X$ و $g_۱, g_۲ \in G$؛ داشته باشیم

$$(x^{g_۱})^{g_۲} = x^{g_۱ g_۲} \quad , \quad x^۱ = x.$$

مثال ۲۰.۱ فرض می‌کنیم X مجموعه‌ی ناتهی دلخواهی باشد و $G \leq S_X$. در این صورت G بر X عمل می‌کند. در این حالت هر $g \in G$ یک نگاشت $X \longrightarrow X$ است و به ازای $x \in X$، x^g نگاره‌ی x تحت نگاشت g است. شرط $(x^{g_۱})^{g_۲} = x^{g_۱ g_۲}$ از تعریف ۱۹.۱، به موجب تعریف ترکیب نگاشت‌ها و شرط $x^۱ = x$ بنا بر تعریف عضو همانی ۱ از S_X برقرار است. این عمل را عمل طبیعی G بر X می‌نامند.

اکنون بلافاصله به رابطه‌ی بین عمل‌های گروه بر مجموعه‌ی X و گروه تقارن X، یعنی، S_X توجه می‌کنیم.

قضیه **۲۱.۱** فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. در این صورت به هر $g \in G$ نگاشت $\rho_g : X \longrightarrow X$، که با ضابطه‌ی $\rho_g : x \mapsto x^g$ تعریف شده، متناظر می‌شود و این نگاشت جایگشتی از X است. علاوه بر این، نگاشت $\rho : G \longrightarrow S_X$ که با ضابطه‌ی $\rho : g \mapsto \rho_g$ تعریف شده یک همریختی است. این همریختی را نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل گروهی می‌نامند.

اثبات. فرض می‌کنیم $g \in G$. بنا بر تعریف، ρ_g نگاشتی است از X به توی خودش. با استفاده از اصل موضوع اول ۱۹.۱، به ازای $g_1, g_2 \in G$ و $x \in X$ داریم

$$x\rho_{g_1 g_2} = x^{g_1 g_2} = (x^{g_1})^{g_2} = (x\rho_{g_1})^{g_2} = (x\rho_{g_1})\rho_{g_2} = x(\rho_{g_1}\rho_{g_2})$$

بنابراین

$$\rho_{g_1 g_2} = \rho_{g_1}\rho_{g_2} \qquad (1)$$

علاوه بر این، با استفاده از اصل موضوع دوم ۱۹.۱، داریم

$$x\rho_1 = x^1 = x.$$

بنابراین

$$\rho_1 = 1 \in S_X \qquad (2)$$

بنا بر (۱) و (۲)؛

$$\rho_g\rho_{g^{-1}} = 1 = \rho_{g^{-1}}\rho_g$$

لذا ρ_g یک نگاشت وارون‌پذیر از X به توی خودش است، یعنی، یک نگاشت از X. سپس (۱) نشان می‌دهد که ρ یک همریختی از G به توی S_X است. ■

قضیه **۲۲.۱** فرض می‌کنیم σ یک همریختی از G به توی S_X باشد، که در آن X یک مجموعه‌ی ناتهی است. در این صورت G بر X عمل می‌کند وقتی که به ازای هر $g \in G$ و $x \in X$ تعریف کنیم

$$x^g = x(g^\sigma)$$

و σ نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل است.

اثبات. قضیه ۴.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

تعریف **۲۳.۱** فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. این عمل را عمل صادق گوییم، اگر نمایش جایگشتی متناظر G یک‌به‌یک باشد.

در ۱.۲۰، نمایش جایگشتی دقیقاً نگاشت شمول $G \longrightarrow S_X$ است. این نگاشت به وضوح یک‌به‌یک است، در نتیجه عمل مفروض صادق است.

لم ۱.۲۴ فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. رابطه‌ی $\sim$ را بر X به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $x_1 \sim x_2$ اگروتنهااگر $x_1, x_2 \in X$ و یک عضو $g \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $x_1^g = x_2$. در این صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر X است.

اثبات. لم ۶.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

تعریف ۱.۲۵ فرض کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند. در این صورت X نسبت به رابطه‌ی هم‌ارزی $\sim$ در ۱.۲۴، به رده‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌شود. این رده‌های هم‌ارزی، مدارها یا رده‌های ترایایی این عمل نامیده می‌شوند. به ازای هر $x \in X$، مدار شامل x را مدار x می‌نامند: این مدار عبارتست از مجموعه‌ی $\{x^g : g \in G\}$ که زیرمجموعه‌ای از X است. مدار x را با نماد $\mathrm{orb}(x)$ نمایش می‌دهیم.

گزاره ۱.۲۶ فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند و داشته باشیم $x \in X$. قرار می دهیم: $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : x^g = x\}$. در این صورت $\mathrm{Stab}_G(x)$ زیرگروهی است از G؛ که پایدارساز x در G نامیده می‌شود. (این زیرگروه را اغلب با G_x نمایش می دهند.)

اثبات. به موجب ۱.۱۹، $1 \in \mathrm{Stab}_G(x)$، بنابراین $\mathrm{Stab}_G(x) \neq \emptyset$. فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)$. در این صورت $x^{g_1} = x = x^{g_2}$، از این رو

$$x^{g_1 g_2^{-1}} = (x^{g_1})^{g_2^{-1}} = (x^{g_2})^{g_2^{-1}} = x^1 = x$$

و در نتیجه $g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(x)$. لذا $\mathrm{Stab}_G(x) \leq G$. ■

نتیجه ۱.۲۷ فرض می‌کنیم G بر X عمل کند، و ρ نمایش جایگشتی متناظر G باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ker}\rho = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x).$$

اثبات. همریختی $\rho : G \longrightarrow S_X$ را درنظر می‌گیریم، داریم

$$g \in \mathrm{Ker}\rho \Longleftrightarrow \rho_g = 1_X \Longleftrightarrow \forall x \in X : x^g = x \Longleftrightarrow g \in \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x)$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

مثال **۲۸.۱** فرض می‌کنیم $H \leq G$. در این صورت H بر G (که به عنوان یک مجموعه درنظر گرفته می‌شود) با ضرب از راست عمل می‌کند؛ یعنی هنگامی که به هر $h \in H$ و هر $g \in G$ عضو $gh \in G$ متناظر می‌شود. این‌که، ضرب مذکور یک عمل از H بر G را تعریف می‌کند از قانون شرکت‌پذیری ضرب در G و ویژگی معرف عضو همانی نتیجه می‌شود. به علاوه، به ازای $g \in G$،

$$\mathrm{Stab}_H(g) = \{h \in H : gh = g\} = ۱,$$

به ویژه از ۲۷.۱ نتیجه می‌شود که این عمل صادق است. همچنین مدار g مجموعه‌ی $\{gh : h \in H\} = gH$، یعنی هم مجموعه‌ی چپ H در G است که شامل g است. لذا به موجب ۲۴.۱، می توانیم نتیجه بگیریم که هم مجموعه‌های چپ متمایز H در G جدا از هم‌اند. به طریقی مشابه، ضرب از چپ اعضای G در اعضای H معرف یک عمل چپ از H بر G است، مدارهای این عمل هم مجموعه‌های راست H در G هستند.

لم **۲۹.۱** فرض می‌کنیم G بر مجموعه‌ی X عمل کند، و همچنین $x \in X$. در این صورت

$$|\mathrm{orb}(x)| = |G : \mathrm{Stab}_G(x)|.$$

اثبات. لم ۱۱.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

از جبر ۱ می‌دانیم که $\bigcap_{x\in G} x^{-۱}Hx$ بزرگترین زیرگروه نرمال یکتای G است که در H قرار دارد که آن را هسته (یا نرمال درونی) H در G نامیده و با H_G نشان می‌دهیم.

قضیه **۳۰.۱** هرگاه H زیرگروهی از G باشد آن‌گاه $\frac{G}{H_G}$ را می‌توان در $S_{|G:H|}$ نشانید.

اثبات. قضیه ۱۴.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

گزاره **۳۱.۱** فرض می‌کنیم G یک گروه و p کوچکترین مقسوم علیه اول $|G|$ باشد. اگر H زیرگروهی از شاخص p در G باشد، $H \trianglelefteq G$.

اثبات. فرض می‌کنیم $H \leq G$ و $|G : H| = p$. در این صورت $|\frac{G}{H_G}| = p|H : H_G|$. فرض می‌کنیم $|H : H_G| > ۱$ و q را مقسوم علیه اول $|H : H_G|$ می‌گیریم. در این صورت q، $|G|$ را می‌شمارد، و در نتیجه بنا بر فرض $q \geq p$. از طرفی بنا بر ۳۰.۱، $|\frac{G}{H_G}|$، $p!$ را می‌شمارد، لذا pq، $p(p-۱)!$ را خواهد شمرد، و در نتیجه q، $(p-۱)!$ را می‌شمارد. چون q اول است، نتیجه می‌شود $q < p$، که این یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم $|H : H_G| = ۱$. از این رو $H = H_G \trianglelefteq G$. ■

اکنون عمل مهم دیگری را درنظر می‌گیریم.

مثال ۳۲.۱ G بر خودش با تزویج عمل می‌کند. در این حالت، به ازای هر $g \in G$ و هر $x \in G$ برای عضوی از G که g، x را به آن می‌برد؛ می‌نویسیم

$$x^g := g^{-1}xg \qquad (x \text{ تحت } g)$$

از این به بعد همواره منظور ما از x^g همان مزدوج x تحت g یعنی $g^{-1}xg$ خواهد بود مگر این‌که در مواردی به صراحت گفته باشیم که x^g چه مفهومی دارد.
رابطه تزویج معرف یک عمل از G بر خودش است؛ زیرا اگر $x, g_1, g_2 \in G$ آن‌گاه

$$(x^{g_1})^{g_2} = g_2^{-1}(g_1^{-1}xg_1)g_2 = (g_1g_2)^{-1}x(g_1g_2) = x^{g_1g_2}$$

و

$$x^1 = 1^{-1}x1 = x$$

به علاوه مدار x عبارتست از مجموعه‌ی

$$\{g^{-1}xg : g \in G\}$$

که رده‌ی تزویجی x در G است؛ و

$$\begin{aligned} Stab_G(x) &= \{g \in G : g^{-1}xg = x\} \\ &= \{g \in G : xg = gx\} \\ &= C_G(x), \end{aligned}$$

که مرکزساز x در G است. نمایش جایگشتی متناظر G عبارتست از نگاشت $\tau : G \longrightarrow S_G$. به موجب ۲۷.۱ داریم

$$\mathrm{Ker}\tau = \bigcap_{x\in G} C_G(x) = Z(G).$$

از این پس رده تزویجی x در G را با نماد x^G نشان خواهیم داد. بر این اساس و با توجه به لم ۲۹.۱، نتایج مهم زیر را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۳۳.۱ به ازای هر $x \in G$ داریم:

$$|x^G| = |G : C_G(x)|.$$

اثبات. کافی است در ۲۹.۱ جایگذاری $\mathrm{orb}(x) = x^G$ و $\mathrm{Stab}_G(x) = C_G(x)$ را انجام دهیم. ■

نتیجه ۳۴.۱ **(معادله‌ی رده‌ای)** هرگاه G یک گروه دلخواه باشد با k رده‌ی تزویجی متمایز از اعضا و اگر $x_1, ..., x_k$ اعضایی از G باشند؛ که هر یک عضو یکی از این k رده باشند، آن‌گاه

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)|.$$

عدد صحیح مثبت k را عدد رده‌ای G می‌نامند.

اثبات. قضیه ۲۸.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

لم ۳۵.۱ اگر G یک گروه ساده‌ی ناآبلی باشد، $|G|$ دست کم بر دو عدد اول متمایز بخش‌پذیر است.

اثبات. نتیجه ۲۹.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

تعریف ۳۶.۱ به ازای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی U از G، مرکزساز U در G را به صورت

$$\begin{aligned} C_G(U) &= \{g \in G : ug = gu,\ u \in U \text{ به ازای هر }\} \\ &= \bigcap_{u \in U} C_G(u) \leq G \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم.

توجه داشته باشید که $C_G(U) = G$ اگروتنهااگر $U \subseteq Z(G)$.
هرگاه $H \leq C_G(U)$ گوییم H، U را مرکزی می‌کند.
به آسانی دیده می‌شود که همواره $C_G(U) \leq N_G(U)$، و در واقع $C_G(U) \trianglelefteq N_G(U)$.

لم ۳۷.۱ به ازای هر $H \leq G$، $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ و $\frac{N_G(H)}{C_G(H)}$ را می‌توان در $\mathrm{Aut}H$ نشانید.

اثبات. لم ۳۶.۴ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

لم ۳۸.۱ الف) فرض می‌کنیم U یک زیرمجموعه‌ی ناتهی G باشد و $g \in G$ در این صورت

$$C_G(U^g) = C_G(U)^g, \qquad N_G(U^g) = N_G(U)^g, \qquad \langle U^g \rangle = \langle U \rangle^g.$$

ب) فرض می‌کنیم $H, K \leq G$ و $g \in G$. در این صورت

$$Z(H^g) = Z(H)^g, \qquad H^g \cap K^g = (H \cap K)^g.$$

اثبات. صفحه ۸۵ از مرجع [۱۸] را ببینید. ■

فرض کنیم G یک گروه باشد. H را زیرگروه سره از G گویند هرگاه H زیرگروه G و $H \neq G$ باشد.

گزاره ۳۹.۱ اجتماع همه‌ی مزدوج‌های یک زیرگروه سره‌ی G در G یک زیرمجموعه‌ی سره‌ی G است.

اثبات. فرض می‌کنیم H یک زیرگروه سره از G و $R = \{Hg_1, Hg_2, ..., Hg_n\}$ مجموعه‌ی هم‌مجموعه‌های راست H در G باشد. عنصر $h \in H$ را درنظر می‌گیریم، داریم $(*) \quad g^{-1}Hg = g^{-1}h^{-1}Hhg = (hg)^{-1}H(hg)$. اکنون اجتماع همه‌ی مزدوج‌های زیرگروه سره H از G برابر است با

$$\begin{aligned} \bigcup_{g\in G} H^g = \bigcup_{g\in G} g^{-1}Hg &= (\bigcup_{x\in Hg_1} x^{-1}Hx) \bigcup ... \bigcup (\bigcup_{x\in Hg_n} x^{-1}Hx) \\ &= g_1^{-1}Hg_1 \bigcup g_2^{-1}Hg_2 \bigcup ... \bigcup g_n^{-1}Hg_n \qquad \text{بنا بر}(*) \end{aligned}$$

چون عضو همانی در همه‌ی مزدوج‌های H مشترک است:

$$\begin{aligned} |\bigcup_{g\in G} H^g| = |g_1^{-1}Hg_1 \bigcup g_2^{-1}Hg_2 \bigcup ... \bigcup g_n^{-1}Hg_n| \leqq |G:H|(|H|-1)+1 &= |G|-|G:H|+1 \\ &= |G|+1-|G:H| < |G| \end{aligned}$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

۱—۴ p—زیرگروه‌های سیلو و قضایای سیلو و کوشی

قضیه ۴۰.۱ **(قضیه‌ی سیلو)** فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد با $|G| = p^m r$، که در آن m عدد صحیحی است نامنفی و r یک عدد صحیح مثبت، به طوری که p، r را نمی‌شمارد. در این صورت

الف) G دارای زیرگروهی از مرتبه p^m است. یک چنین زیرگروهی را یک p—زیرگروه سیلو از گروه G می‌نامند.

ب) هرگاه H یک p—زیرگروه سیلو از گروه G باشد و J یک p—زیرگروه دلخواه از G، آن‌گاه به ازای یک $g \in G$، $J \leq H^g$. به ویژه، p—زیرگروه‌های سیلو از G، یک رده‌ی تزویجی واحد از زیرگروه‌های G را تشکیل می‌دهند.