بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و رایانه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

گرایش کاربردی

تحلیل ریاضیات مساله رتبه صفحه گوگل

استاد راهنما

دکتر محمود محسنی مقدم

استاد مشاور :

دکتر عظیم ریواز

مؤلف :

آذر طاهری طیبی

شهریور ماه ۸۸

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : آذرطاهری طیبی

استاد راهنما : دکترمحمودمحسنی مقدم

استادمشاور: دکتر عظیم ریواز

داور ۱ : دکتریوسف بهرامپور

داور ۲ : دکترمحمدرضا مولایی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

دانشگاه شهید باهنر
کرمان
اداره تحصیلات تکمیلی

تقدیم به

مادرم به پاس عاطفه سرشار و تعبیر انسانی‌اش از ایثار

و

پدرم به پاس قلب بزرگش که فریادرس است و محبت بی دریغش که هیچگاه فروکش نمی کند

و

بانیان دانشگاه شهید باهنر کرمان مهندس علیرضا افضلی پور و خانم فاخره صبا

سپاس و قدردانی

خداوند خوبی‌ها را سپاس، که انسان را با گوهر روان و نیروی تفکر و خرد کرامت بخشید تا سرآمد جنبندگان باشد،چراغ دانش فرا راه وجودش نمود تا مراتب زندگی شایسته را درک نماید و قلبش را به نور هدایت منور ساخت تا قیام به عدالت کند ...

از استاد دانشمندم دکترمحمود محسنی مقدم، که هر آنچه هستم و خواهم شد را مدیون ایشانم، از تک سوار کویر پهناور، دکتر یوسف بهرامپور، که مرا به دنیایی فراتر از ریاضیات برد و نیز از دکتر محمدعلی طیبی به خاطر راهنماییهای بی‌دریغش که نقش ارزنده‌ای در تدوین مطالب داشته‌اند سپاسگزارم و با دلی مملو از عشق و قدردانی بر دست این بزرگواران بوسه می زنم.

بر خود لازم می‌دانم از دکتر عظیم ریواز که با دقت فراوان مطالب این پایان نامه را تصحیح نموده‌اند و همچنین از سایر اساتید بخش ریاضی دانشگاه شهیدباهنر که افتخار شاگردیشان را داشتم تشکر کنم.

در پایان از تمام دوستانم که بهترین خاطراتم در کنارشان رقم خورده سپاسگزارم.

چکیده

موتورهای جستجو مهمترین دلیل استقبال بی نظیر همگان از وب می‌باشد چرا که از هیچ‌کس انتظار نمی‌رود تعداد زیادی از آدرس‌های وب را به خاطر بسپارد. سیستم رتبه‌بندی نیز قلب تپنده‌ی هر موتور جستجو است. این سیستم رتبه‌بندی است که یافته‌های مرتبط با عبارت مورد جستجو را از بالا به پایین مرتب می‌کند و صفحه‌ی با ارتباط بیشتر را در رتبه‌ی بالاتر قرار می‌دهد.
"رتبه‌ی صفحه" الگوریتم رتبه‌بندی گوگل ، براساس تحلیل پیوند، است که باعث شده این موتور جستجو با فاصله بسیار زیاد رقبایش را پست سر بگذارد.

هدف از این پایان نامه، معرفی الگوزیتم رتبه‌ی صفحه‌ی گوگل و تحلیل ریاضیات آن می‌باشد. در فصل دوم الگوریتم رتبه‌ی صفحه به عنوان یک مساله مقدار ویژه بررسی و توسط روش تکراری توانی حل شده است. فصل سوم شامل تحلیل حساسیت مساله‌ی مذکور و فصل چهارم نیز بررسی از دیدگاه یک دستگاه خطی می‌باشد.

کلید واژه گان: موتور جستجوی گوگل، بردار رتبه صفحه، روش توانی

مقدمه

مفهوم داده‌کاوی[1] به بررسی و تجزیه وتحلیل مقادیر عظیمی از داده‌ها به منظور کشف الگوها و قوانین معنی‌دار اطلاق می‌شود. داده‌کاوی عمدتاً با ساختن مدل‌ها مرتبط است؛ به عبارت دیگر داده‌کاوی دستیابی به الگوهایی به کمک داده‌های موجود است.

وب‌کاوی[2] یکی از انواع داده‌کاوی است که در آن به کشف الگوهایی در وب پرداخته می‌شود. یکی از انواع کاوش در وب، ساختارکاوی وب است که در آن با استفاده از نظریه‌ی گراف به تحلیل ساختار وب پرداخته می‌شود.

الگوریتم رتبه‌ی صفحه‌ی گوگل، الگوریتمی است که در سال ۱۹۹۸ میلادی توسط سرجی برین[3] و لری پیج[4] پایه‌ریزی شد. در این روش با استفاده از داده‌های موجود در پایگاه‌های داده‌ی وب اطلاعات مربوط به رابطه‌ی بین صفحات وب بازیابی شده و به رتبه‌دهی این صفحات پرداخته می‌شود. این رتبه‌دهی در مرتب‌کردن یافته‌های موتورجستجوی گوگل مورد استفاده قرار می‌گیرد. در حقیقت هر موتور جستجویی یک الگوریم رتبه‌دهی دارد اما موفقیت الگوریتم رتبه‌دهی گوگل، عامل محبوبیت بیشتر این موتور جستجو در مقایسه با سایر رقبایش، از دید کاربران، شده است.

حل مساله‌ی رتبه‌ی صفحه بر مبنای یک روش تکراری عددی به نام روش توانی قرار دارد. در واقع مساله‌ی مذکور تعاملی بین نظریه‌ی گراف، نظریه‌ی زنجیرهای مارکوف، جبرخطی عددی و علم بازیابی اطلاعات می‌باشد.

---

[1] *Data Mining*
[2] *Web Mining*
[3] *Sergey Brin*
[4] *Larry Page*

فهرست مطالب

فصل اول

مروری بر پیش‌نیازها

در طول این فصل به بیان برخی مفاهیم پایه‌ای جبرخطی عددی، نظریه‌ی گراف، زنجیرهای مارکوف، که در فصل‌های آینده مورد نیاز است، می‌پردازیم. از آن‌جایی که هدف، تحلیل عمل جستجو در وب و مطالعه‌ی شیوه‌ی رتبه‌دهی به صفحات وب‌سایت‌ها از دیدگاه محاسباتی می‌باشد لذا از اثبات دقیق برخی از قضایا خودداری خواهد شد.

۱-۱. نرم‌ها

یکی از مفاهیم بسیار مهم در جبر خطی، مفهوم نرم است. بر روی یک فضای برداری ⍰ یک نرم را تابع $\|.\|$ از این فضای برداری به مجموعه‌ی اعداد حقیقی طوری تعریف می‌کنند که به ازای هر بردار ⍰ $X = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T \in$ ⍰، $Y = (y_۱, y_۲, \dots, y_n)^T \in$ و هر $a \in \mathcal{R}$ دارای خواص زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
&i. && \|X\| \geq ۰, \ \|X\| = ۰ \Leftrightarrow X = ۰, \\
&ii. && \|aX\| = |a|\|X\|, \\
&iii. && \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \ (\text{نامساوی مثلث}).
\end{aligned}
$$

می‌توان $\|X\|$ را طول یا اندازه‌ی بردار X تصور کرد. یک نرم بر روی یک فضای برداری مفهوم قدرمطلق، $|r|$، برای یک عدد حقیقی یا مختلط را تعمیم می‌دهد. معروفترین نرم‌ها در $\mathcal{R}^n$، نرم اقلیدسی $l_۲$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|.\|_۲ : \mathcal{R}^n \longrightarrow [۰, +\infty)$$

$$\|X\|_۲ = \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i{}^۲\right)^{۱/۲}.$$

این نرمی است که متناظر با مفهوم ذاتی طول می‌باشد. از زیرنویس ۲ فقط به عنوان مشخص‌کننده استفاده می‌کنیم. در آنالیز عددی نرم‌های دیگری هم مورد استفاده قرار می‌گیرند که ساده‌ترین آن‌ها نرم l_∞ می‌باشد که عبارت است از

$$\|.\|_\infty : \mathcal{R}^n \longrightarrow [۰, +\infty)$$
$$\|X\|_\infty = max_{۱\leq i\leq n}|x_i| .$$

نرم مهم دیگر در $\mathcal{R}^n$ نرم $l_۱$ نامیده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|.\|_۱ : \mathcal{R}^n \longrightarrow [۰, +\infty)$$

$$\|X\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|.$$

حال به تعریف نرم برای ماتریس‌ها می‌پردازیم. برای تعریف نرم‌های ماتریسی از نرم‌های برداری کمک می‌گیریم. فرض کنید $\|.\|$ نرم برداری مشخص شده باشد، یک نرم ماتریسی طبیعی به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$(۱-۱-۱) \qquad \|A\| = sup\{\|Av\|/\|v\|: v \in \mathcal{R}^n , v \neq ۰\}.$$

این نرم، نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری مفروض نیز نامیده می‌شود. در اینجا A یک ماتریس $n \times n$ است.

قضیه ۱-۱-۱. اگر $\|.\|$ نرمی در $\mathcal{R}^n$ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی

(۱-۱-۱) یک نرم بر روی فضای خطی همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ تعریف می‌کند.

یک نتیجه‌ی مهم از (۱-۱-۱) عبارت است از

$$\|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|, \qquad (x \in \mathcal{R}^n).$$

به عنوان یک مثال از این مفهوم مهم، می‌خواهیم متناظر با نرم برداری $\|x\|_\infty$، نرم ماتریسی طبیعی آن را بدست آوریم.

$$\begin{aligned}
\|A\|_\infty &= sup_{\|u\|_\infty=۱}\|Au\|_\infty \\
&= sup_{\|u\|_\infty=۱}\left\{\max_{۱\leq i\leq n}|(Au)_i|\right\} \\
&= \max_{۱\leq i\leq n}\left\{sup_{\|u\|_\infty=۱}|(Au)_i|\right\} \\
&= \max_{۱\leq i\leq n}\left\{sup_{\|u\|_\infty=۱}\left|\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\,u_j\right|\right\} \\
&= \max_{۱\leq i\leq n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|.
\end{aligned}$$

در بالا از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که دو فرآیند ماکسیمم‌گیری روی مجموعه‌های با اندازه‌ی متناهی می‌توانند تعویض شوند. همچنین از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که سوپریمم $\left|\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\,u_j\right|$ برای i ثابت و $\|u\|_\infty = ۱$، از قرار دادن $u_j = +۱$ اگر $a_{ij} \geq ۰$ و $u_j = -۱$ اگر $a_{ij} \leq ۰$ به دست می‌آید.

بنابراین قضیه‌ی زیر را ثابت کردیم:

قضیه ۱-۱-۲. اگر نرم برداری $\|x\|_\infty$ به صورت

$$\|X\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n}|x_i|.$$

تعریف شود آن‌گاه نرم ماتریسی طبیعی آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_\infty = \max_{۱\leq i\leq n}\sum_{j=۱}^{n}|a_{ij}|.$$

یک نرم ماتریسی طبیعی متناظر با یک نرم برداری، ویژگی‌های دیگری علاوه بر ویژگی‌های (i) تا (iii) دارد. به عنوان مثال:

iv. $\|I\| = 1$

v. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

نرم ماتریسی مهم دیگر، نرم ماتریسی l_2 (نرم طیفی نیز نامیده می‌شود) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\|_2 = \sup_{\|X\|_2=1} \|AX\|_2.$$

۱-۲ مقادیر و بردارهای ویژه

تعریف ۱-۲-۱. اسکالر λ را مقدار ویژه‌ی ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ نامند هرگاه بردار $X_{n\times 1} \neq 0$ وجود داشته باشد که

$$AX = \lambda X.$$

بردار X را بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی λ نامند.

تعریف ۱-۲-۲. بردار سطری غیرصفر y^T را بردار ویژه‌ی چپ A گویند، هرگاه اسکالر λ وجود داشته باشد که

$$y^T A = \lambda y^T.$$

تعریف ۱-۲-۳. مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی A را طیف[1] A نامیده و با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهند. شعاع طیفی A نیز عددی نامنفی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

دایره‌ی طیفی A، دایره‌ای در صفحه‌ی اعداد مختلط به مرکز مبدا و شعاع $\rho(A)$ می‌باشد.

قضیه ۱-۲-٤. اگر A یک ماتریس $n\times n$ باشد آن‌گاه به ازای هر نرم طبیعی $\|\cdot\|$.

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

تعریف ۱-۲-۵. هرگاه A یک ماتریس $n\times n$ باشد، چندجمله‌ای تعریف شده با

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I),$$

چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود.

درجه‌ی $P(\lambda)$، n است و A نیز دارای n مقدار ویژه می‌باشد. اما برخی از آن‌ها ممکن است اعدادی مختلط و یا بعضی تکراری باشند.

مثال ۱-۲-٦. مقادیر ویژه‌ی ماتریس A را بدست آورید.

---

[1] spectrum

$$A = \begin{pmatrix} ۲ & ۱٦ & ۸ \\ ٤ & ۱٤ & ۸ \\ -۸ & -۳۲ & -۱۸ \end{pmatrix}.$$

با استفاده از تعریف بالا خواهیم داشت:

$$det(A - \lambda I) = ۰ ,$$

پس

$$\lambda_۱ = -۲,\ \ \lambda_۲ = -۲,\ \ \lambda_۳ = ۲ .$$

بنابراین

$$\sigma(A) = \left\{-۲,۲\right\},\ \ \ \rho(A) = ۲.$$

یک بردار ویژه‌ی x از A مربوط به $\lambda_۱$ جوابی است که از دستگاه $\left(A - \lambda_۱ I\right)x = ۰$ بدست می‌آید برابر است با $x = (-٤,۱,۰)$.

تعریف ۱-۲-۷. تعداد دفعات تکرار λ به عنوان مقدار ویژه‌ی A، را چندگانگی جبری[۲] λ گویند و با $alg\ mult_A(\lambda)$ نشان می‌دهند. اگر $alg\ mult_A(\lambda) = ۱$، آن‌گاه λ را مقدار ویژه‌ی ساده‌ی A نامیم.

تعریف۱-۲-۸ فرض کنید $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ بردارهایی در $\mathbb{C}^n$ باشند. بردارهای فوق را مستقل خطی نامند، اگر نتوان یکی را بر حسب ترکیب خطی سایر بردارها نوشت. به عبارت دیگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مستقل خطی‌اند اگر از

$$a_۱X_۱ + a_۲X_۲ + \cdots + a_nX_n = ۰$$

تنها $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = ۰$ نتیجه شود. اگر بردارهای $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ مستقل خطی نباشند، آن‌ها را وابسته‌ی خطی نامند.

تعریف ۱-۲-۹. فضای پوچ ماتریس $A \in \mathbb{C}^n$ برابر مجموعه‌ی زیر است

$$N(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = ۰\}.$$

تعریف ۱-۲-۱۰. تعداد بردارهای ویژه‌ی مستقل خطی که توسط λ بوجود می‌آید را چندگانگی هندسی[۳] λ نامیده و با $geo\ mult_A(\lambda)$ نمایش می‌دهند؛ به عبارت دیگر

$$geo\ mult_A(\lambda) = dim\big(N(A - \lambda I)\big),$$

جایی که $N(.)$ فضای پوچ یک ماتریس است.

---

[۲] *Algebraic multiplicity*
[۳] *Geometric multiplicity*

همواره داریم $geo\ mult_A(\lambda) \leq alg\ mult_A(\lambda)$.

اگر $geo\ mult_A(\lambda) = alg\ mult_A(\lambda)$، آن‌گاه λ را مقدار ویژه‌ی شبه‌ساده گوییم.

تعریف ۱-۲-۱۱. مجموعه‌ی مستقل خطی $B = \left\{v_۱, \dots, v_k\right\}$ یک پایه برای فضای S تشکیل می‌دهند اگر هر عضو S را بتوان بر حسب یک ترکیب خطی از اعضای B نوشت. عدد طبیعی k را نیز بعد S نامند.

تعریف ۱-۲-۱۲. رتبه‌ی یک ماتریس برابر است با بعد فضایی که توسط ستون‌های آن ماتریس بوجود می‌آید.

تعریف ۱-۲-۱۳. کوچکترین عدد صحیح مثبت k که

$$rank((A-\lambda I)^k) = rank\left((A-\lambda I)^{k+۱}\right),$$

را اندیس[٤] مقدار ویژه‌ی λ نامیده و با $Index(\lambda)$ نشان می‌دهند.

واضح است که $Index(\lambda) = ۰$ است اگر $\lambda \notin \sigma(A)$

مثال ۱-۲-۱٤. اندیس مقادیر ویژه‌ی ماتریس زیر را بدست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ۱ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ۱ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ۲ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ۲ \end{pmatrix}$$

$$rank(A-I) = rank(A-I)^۲ = ۲$$

$$rank\left(A-۲I\right) = rank(A-۲I)^۲ = ۳$$

بنابراین $index\left(۱\right) = ۱$ و $index\left(۲\right) = ۱$.

قضیه ۱-۲-۱۵. بردارهای مستقل خطی $\left\{X^{(۱)}, \dots, X^{(n)}\right\}$ یک پایه برای $\mathbb{C}^n$ تشکیل می‌دهند.

[٤] *Index*

۱-۳. روش توانی

۱-۳-۱. معرفی روش توانی

روش‌های تکراری اغلب برای مسایلی که در آن‌ها نیاز به محاسبه‌ی یک یا دو مقدار ویژه می‌باشد مناسبند. البته راه‌هایی برای تعمیم این روش‌ها جهت یافتن تمام مقادیر ویژه‌ی یک ماتریس وجود دارد. در این بخش فرض بر آن است که A ماتریسی حقیقی[5] و از مرتبه‌ی n بوده و دارای n بردار ویژه‌ی مستقل خطی است.

روش توانی برای محاسبه‌ی مقدار ویژه‌ی غالب[6] و بردار ویژه‌ی متناظر با مقدار ویژه‌ی غالب بکار می‌رود. برای راحتی لازم است فرض کنیم A دارای دو خاصیت زیر است:

تنها یک مقدار ویژه با ماکسیمم قدرمطلق وجود دارد.

یک مجموعه‌ی مستقل خطی از n بردار ویژه وجود دارد.

بنابر فرض اول، مقادیر ویژه‌ی $\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n$ می‌توانند به قسمی برچسب‌گذاری شوند که

$$\left|\lambda_۱\right| > \left|\lambda_۲\right| \geq \left|\lambda_۳\right| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

پس $\lambda_۱$ مقدار ویژه‌ی غالب ماتریس A می‌باشد.

بنابر فرض دوم، یک پایه‌ی $\mathcal{A} = \left\{u^{(۱)}, u^{(۲)}, \dots, u^{(n)}\right\}$ برای $\mathbb{C}^n$ وجود دارد بقسمی‌که

$$Au^{(j)} = \lambda_j u^{(j)} \qquad \left(۱ \leq j \leq n\right). \qquad (۱-۳-۱)$$

فرض کنید $x^{(۰)}$ عنصری دلخواه از $\mathbb{C}^n$ باشد که وقتی برحسب ترکیب خطی از عناصر پایه‌ی $\mathcal{A}$ بیان می‌شود ضریب $u^{(۱)}$ صفر نباشد. $x^{(۰)}$ را بردار آغازین می‌نامند. بنابراین

$$x^{(۰)} = a_۱ u^{(۱)} + a_۲ u^{(۲)} + \cdots + a_n u^{(n)} \qquad \left(a_۱ \neq ۰\right) \qquad (۲-۳-۱)$$

سپس تشکیل می‌دهیم:

$$x^{(۱)} = Ax^{(۰)} \quad x^{(۲)} = Ax^{(۱)} \quad \dots \quad x^{(k)} = Ax^{(k-۱)},$$

---

[5] ماتریسی که درایه‌های آن اعداد حقیقی هستند.

[6] بزرگترین مقدار ویژه‌ی یک ماتریس

پس

$$x^{(k)} = A^k x^{(\cdot)}, \qquad (۳-۳-۱)$$

حال تعریف می‌کنیم $v_j = a_j u^{(j)}$. معادله‌ی (۱-۳-۲) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$x^{(\cdot)} = v^{(۱)} + v^{(۲)} + \cdots + v^{(n)},$$

بنابراین از این معادله و رابطه‌ی (۱-۳-۳) داریم:

$$x^{(k)} = A^{(k)} v^{(۱)} + A^{(k)} v^{(۲)} + \cdots + A^{(k)} v^{(n)},$$

با استفاده ازمعادله‌ی (۱-۳-۳) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$x^{(k)} = \lambda_۱^{(k)} v^{(۱)} + \lambda_۲^{(k)} v^{(۲)} + \cdots + \lambda_n^{(k)} v^{(n)},$$

رابطه‌ی اخیر را می‌توان نوشت:

$$x^{(k)} = \lambda_۱^{(k)} \left[v^{(۱)} + \left(\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}\right)^{(k)} v^{(۲)} + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_۱}\right)^{(k)} v^{(n)} \right].$$

چون $\left|\lambda_۱\right| > |\lambda_j|$ به ازای $۲ \le j \le n$، مشاهده می‌کنیم که وقتی $k \to \infty$ عبارت $\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_۱}\right)^k$ به صفر میل می‌کنند و بردار داخل کروشه به $v^{(۱)}$ همگرا می‌شود.

برای راحتی در نمادگذاری، $x^{(k)}$ را به شکل زیر می‌نویسیم

$$x^{(k)} = \lambda_۱^{k} \left[v^{(۱)} + \varepsilon^{(k)} \right],$$

که در آن $\varepsilon^{(k)} \to \cdot$ وقتی $k \to \infty$.

فرض کنید φ تابع خطی دلخواه بر روی $\mathbb{C}^n$ برای اینکه قادر باشیم نسبت را تشکیل دهیم، در رابطه‌ی φ. یادآوری می‌کنیم که هر تابع خطی $\varphi(v^{(۱)}) \neq \cdot$ باشد به طوری که

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

صدق می‌کند که در آن a و b اسکالر و x و y بردار هستند. بنابراین

$$\varphi(x^{(k)}) = \lambda_1{}^k \left[\varphi\left(v^{(1)}\right) + \varphi(\varepsilon^{(k)})\right] \quad (۱-۳-۴)$$

در نتیجه نسبت زیر وقتی که $k \to \infty$ به سمت λ_1 میل می‌کند:

$$r_k \equiv \frac{\varphi\left(x^{(k+1)}\right)}{\varphi(x^{(k)})} = \lambda_1 \left[\frac{\varphi(v^{(1)}) + \varphi(\varepsilon^{(k+1)})}{\varphi(v^{(1)}) + \varphi(\varepsilon^{(k)})}\right] \to \lambda_1 \ .$$

این مطالب روش توانی را برای محاسبه‌ی λ_1 تشکیل می‌دهند. چون جهت بردار $x^{(k)}$ وقتی که $k \to \infty$ بیشتر و بیشتر با $v^{(1)}$ در یک امتداد قرار می‌گیرد. این روش همچنین بردار ویژه‌ی $v^{(1)}$ را ارائه می‌دهد. در اجرای عملی روش توانی بهتر آن است که بردارهای x^k را نرمال سازیم، زیرا در غیر این‌صورت ممکن است به صفر همگرا گردند یا بی‌کران شوند. الگوریتم روش توانی در فصل پایانی آمده است:

۱-۳-۲ تسریع روش توانی

در این بخش دو شیوه را جهت سرعت‌بخشیدن به روش توانی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱-۳-۲-۱. اگر λ مقدار ویژه‌ی A و X بردار ویژه‌ی نظیر λ باشد، آن‌گاه $\lambda - p$ مقدار ویژه‌ی $A - pI$ نظیر بردار ویژه‌ی X است.

۱-۳-۲-۱. روش ویلکینسون[۷]:

فرض کنید λ_1 و λ_2 اولین و دومین مقدار ویژه‌ی A از نظر قدرمطلق باشد یعنی

$\left|\lambda_1\right| > \left|\lambda_2\right|$. از قضیه‌ی (۱-۳-۲-۱) می‌دانیم که $\lambda_1 - p$ و $\lambda_2 - p$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A - pI$ می‌باشند. اگر p طوری اختیار شود که

$$\left|\lambda_1 - p\right| > \left|\lambda_2 - p\right| \geq |\lambda_i - p|, \quad i = 3, \dots, n. \quad (۱-۳-۵)$$

[۷] wilkinson

آن‌گاه سرعت همگرایی روش توانی برای ماتریس $A-pI$ به $\frac{\lambda_2-p}{\lambda_1-p}$ بستگی دارد. برای حداکثر نمودن سرعت همگرایی روش توانی باید p را طوری اختیار کرد که اولاً رابطه‌ی (۱-۳-۵) برقرار باشد و ثانیاً $\frac{\lambda_2-p}{\lambda_1-p}$ مینیمم گردد. بنابراین برای محاسبه‌ی بزرگترین مقدار ویژه‌ی A می‌توان روش توانی را برای ماتریس $A-pI$ بکار برد و سپس با تعیین بزرگترین مقدار ویژه‌ی آن ماتریس، آن را با p جمع نمود تا بزرگترین مقدار ویژه‌ی ماتریس A حاصل گردد. لازم به ذکر است که انتخاب p بستگی به تجربه دارد و از یک مساله به مساله‌ی دیگر فرق می‌کند. در حالتی که مقادیر ویژه‌ی A مثبت باشند و

$$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0.$$

می‌توان با انتخاب $p=\lambda_n$ همگرایی را سرعت بخشید. در این صورت داریم:

$$\frac{\lambda_2-p}{\lambda_1-p} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

زیرا با توجه به $p=\lambda_n>0$ و $\lambda_1>\lambda_2>0$ داریم:

$$p\lambda_1 > p\lambda_2,$$

در نتیجه

$$-p\lambda_1 < -p\lambda_2,$$

با افزودن $\lambda_1\lambda_2$ به طرفین نامساوی بالا خواهیم داشت:

$$\lambda_1\lambda_2 - p\lambda_1 < \lambda_1\lambda_2 - p\lambda_2.$$

پس

$$\left(\lambda_2 - p\right)\lambda_1 = \left(\lambda_1 - p\right)\lambda_2,$$

و لذا

$$\frac{\lambda_2-p}{\lambda_1-p} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$