دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی با روش‌های نیمه‌تحلیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی قوتمند

استاد مشاور

دکتر علی مس‌فروش

دانشجو

سیده رقیه میرباقری

بهمن ۱۳۹۲

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

تقدیم به خانواده عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی قوتمند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سیده رقیه میرباقری

بهمن ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **سیده رقیه میرباقری**. رشته **ریاضی کاربردی** گرایش **آنالیز عددی** تحت عنوان **حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی با روش‌های نیمه‌تحلیلی**

که در تاریخ ۹۲/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : خوب امتیاز ۱۷/۸۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۲-استاد مشاور	دکتر علی مس‌فروش	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر احمد زیره	دانشیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن	دکتر علیرضا ناظمی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره امضاء

دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی شاهرود

تعهدنامه

اینجانب **سیده رقیه میرباقری** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **حل معادلات دیفرانسیل جبری جزیی با روش‌های نیمه‌تحلیلی** ، تحت راهنمایی **دکتر مهدی قوتمند** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سیده رقیه میرباقری
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

معادلات دیفرانسیل جبری جزیی خطی به‌شکل $Au_t(t,x)+Bu_{xx}(t,x)+Cu(t,x)=f(t,x)$ زمانی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که حداقل یکی از ماتریس‌های $A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ منفرد باشد. حالت $A=0$ و $B=0$ به‌ترتیب به معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جبری منتهی می‌شوند. بنابراین فرض می‌کنیم که $A,B\neq 0$. برای این سیستم‌ها یک اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت و یک اندیس دیفرانسیل مکانی را معرفی می‌کنیم. این اندیس‌ها به‌ترتیب به‌وسیله‌ی یک تبدیل فوریه و لاپلاس مشخص می‌شوند. علاوه بر این یک جفت اندیس اختلال را معرفی می‌کنیم و رابطه‌ی بین اندیس دیفرانسیل زمانی یکنواخت و اندیس دیفرانسیل مکانی را نشان می‌دهیم. همچنین، تعداد شرایط اولیه و مرزی را برای خانواده‌های منتظم به‌دست می‌آوریم.
روش پسرو زمانی، مرکزی مکانی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جبری جزیی به‌کار می‌بریم. در پایان، خطای برش کامل و خطای گسسته‌سازی کامل را معرفی می‌کنیم و نرمشان را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: اندیس اختلال، اندیس دیفرانسیل زمانی، اندیس دیفرانسیل مکانی، گسسته‌سازی زمانی، گسسته‌سازی فضایی

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱.۱ معادلات دیفرانسیل جزیی

اکثر قوانین طبیعی فیزیک، نظیر معادلات ماکسول [۱] ، معادلات ناویه - استوکس، [۲] معادلات حرکت نیوتن [۳] و معادله‌ی شرودینگر [۴] در مکانیک کوانتوم، بر حسب معادلات دیفرانسیل جزیی (PDE) [۵] بیان شده‌اند. به عبارت دیگر، قوانین فوق، پدیده‌های فیزیکی را به وسیله‌ی ارتباط بین فضا و مشتقات آن نسبت به زمان توضیح می‌دهند. وجود مشتق در این معادلات به این دلیل است که مشتق‌ها پدیده‌ای طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شار، شدت جریان) را نمایش می‌دهند. تعاریف و قضایای این فصل از مرجع [۱] برداشت شده است.

تعریف ۱.۱.۱. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی معادله‌ای شامل یک تابع و مشتقات آن می‌باشد که تابع مجهول به چند متغیر وابسته است و تفاوت آن با معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) [۶] در این است که در ODE تابع فقط به یک متغیر وابسته است.

در اینجا چند PDE معروف را معرفی می‌کنیم:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{(معادله‌ی یک بعدی گرما)}$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{(معادله‌ی دوبعدی گرما)}$$

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{(معادله‌ی لاپلاس در مختصات قطبی)}$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \quad \text{(معادله‌ی سه‌بعدی موج)}$$

---

[۱] Maxwell

[۲] Navier-Stokes

[۳] Newton

[۴] Schrodinger

[۵] Partial Differential Equation

[۶] Ordinary Differential Equation

$$u_{tt} = u_{xx} = \alpha u_t + \beta u \quad \text{(معادله‌ی تلگراف)}$$

توجه کنید که:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \cdots$$

متذکر می‌شویم که در معادلات فوق تابع مجهول u همواره به بیش از یک متغیر وابسته است. متغیر u را که از آن مشتق می‌گیریم، متغیر وابسته و متغیرهایی که مشتق‌گیری نسبت به آن‌ها صورت می‌گیرد متغیرهای مستقل نامیده می‌شوند. به عنوان مثال، در معادله‌ی

$$u_t = u_{xx},$$

واضح است که متغیر وابسته‌ی $u(x,t)$ تابعی از دو متغیر مستقل x و t می‌باشد، حال آن‌که در معادله‌ی

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta},$$

$u(r,\theta,t)$ به r ، θ و t بستگی دارد.

۱.۱.۱ روشهای حل معادلات دیفرانسیل جزیی

در ادامه مشاهده خواهیم کرد که روشهای زیادی برای حل این معادلات وجود دارند، مهمترین آنها روش‌هایی هستند که $PDEs$ را به $ODEs$ تبدیل می‌کنند. در اینجا چند روش را معرفی می‌کنیم:

۱. جداسازی متغیرها : در این روش یک PDE با n متغیر را به n تا ODE تبدیل می‌کنیم.

۲. تبدیل‌های انتگرال : در این روش یک PDE با n متغیر مستقل را به یک PDE با $n-1$ متغیر تبدیل می‌کنیم، درنتیجه، یک PDE دو متغیره را می‌توان به یک ODE تبدیل کرد.

۳. تغییر مختصات : در این روش با تغییر مختصات مساله، مانند دوران محور، PDE را به یک ODE یا PDE ساده‌تر تبدیل می‌کنیم.

۴. تبدیل متغیر وابسته : در این روش مجهول یک PDE را به یک مجهول جدید که جواب ساده‌تر به دست می‌آید، تبدیل می‌کنیم.

۵. روشهای عددی :در این روشها یک PDE را به یک دستگاه معادلات تفاضلی که بتوان آن را با روشی تکراری توسط کامپیوتر حل کرد، تبدیل می‌کنیم.

۶. روش اختلال : این روش یک مساله‌ی غیرخطی را به چند مساله‌ی خطی که مساله‌ی غیرخطی را تقریب می‌کنند، تغییر می‌دهد.

۷. معادلات انتگرال : در این روش یک PDE را به یک معادله‌ی انتگرال، (معادله‌ای که در آن تابع مجهول داخل انتگرال است) تبدیل می‌کنیم. سپس معادله‌ی انتگرال را با روش‌های مختلف حل می‌کنیم.

۸. روش حساب تغییرات : در این روش جواب PDE را با تبدیل معادله به یک مساله‌ی مینیمم‌سازی می‌یابیم. در نتیجه مینیمم یک عبارت، منجر به جواب PDE می‌شود.

۲.۱.۱ دسته‌بندی $PDEs$

معادلات دیفرانسیل جزیی به روش‌های مختلفی دسته‌بندی می‌شوند که چند نوع آن را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱. مرتبه‌ی PDE : مرتبه‌ی PDE مرتبه‌ی بالاترین مشتق جزیی در معادله است، برای مثال:

$$u_t = u_{xx}, \quad (\text{مرتبه‌ی دوم}),$$

$$u_t = u_x, \quad (\text{مرتبه‌ی اول}),$$

$$u_t = uu_{xxx} + \sin x, \quad (\text{مرتبه‌ی سوم}).$$

۲. تعداد متغیرها: تعداد متغیرها تعداد متغیرهای مستقل است، برای مثال:

$$u_t = u_{xx}, \quad (\text{دو متغیر : x و t}),$$

$$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}, \quad (\text{سه متغیر : r ، } \theta \text{ و t}).$$

۳. خطی و غیرخطی : معادلات دیفرانسیل جزیی را می‌توان به دو نوع خطی و غیرخطی تقسیم‌بندی نمود. در معادلات دیفرانسیل خطی متغیر وابسته‌ی u و همه‌ی مشتقاتش به‌صورت خطی ظاهر می‌شوند. در حالت خاص، یک معادلات خطی مرتبه‌ی دوم دومتغیره به‌صورت زیر است:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G, \qquad (1.1)$$

که در آن A, B, C, D, E, F و G ثابت‌ها یا توابع معلومی برحسب x و y هستند. برای مثال:

$$utt = e^{-t}u_{xx} + \sin t, \quad (\text{خطی}),$$

$$uu_{xx} + u_t = 0, \quad (\text{غیرخطی}),$$

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0, \quad (\text{خطی}),$$

$$xu_x + yu_y + u^2 = 0, \quad (\text{غیرخطی}).$$

۴. همگن‌بودن : معادله‌ی (۱.۱) را همگن گوییم، هرگاه $G(x, y)$ برای هر x و y برابر صفر باشد، در غیر این‌صورت ناهمگن می‌نامیم.

۵. ضرایب : هرگاه ضرایب A, B, C, D, E و F در معادله‌ی (۱.۱) ثابت باشند، آن‌گاه (۱.۱) با ضرایب ثابت است. در غیر این صورت، با ضرایب متغیر می‌نامیم. سه نوع اساسی از معادلات دیفرانسیل جزیی خطی مانند (۱.۱) به‌صورت زیر می‌باشند:

(آ) سهموی،

(ب) هذلولوی،

(ج) بیضوی.

سهموی : معادلات سهموی روش‌های شارش گرما را توصیف و در شرط $B^{۲} - ۴AC = ۰$ صدق می‌کنند.

هذلولوی: معادلات هذلولوی دستگاههای مرتعش و حرکت موج را توصیف و در شرط $B^{۲} - ۴AC > ۰$ صدق می‌کنند.

بیضوی : معادلات بیضوی پدیده‌های حالت پایدار را توصیف و در شرط $B^{۲} - ۴AC < ۰$ صدق می‌کنند.

مثال‌ها:

الف: سهموی $\quad u_t = u_{xx}, \quad B^{۲} - ۴AC = ۰,$

ب: هذلولوی $\quad u = ۰, \quad B^{۲} - ۴AC = ۱,$

ج: هذلولوی $\quad u_{tt} = u_{xx}, \quad B^{۲} - ۴AC = ۴,$

د: بیضوی $\quad u_{xx} + u_{yy} = ۰, \quad B^{۲} - ۴AC = -۴,$

ط:

$$yu_{xx} + u_{yy} = ۰ \quad B^{۲} - ۴AC = -۴y \begin{cases} y > ۰ & \text{بیضوی}, \\ y = ۰ & \text{سهموی}, \\ y < ۰ & \text{هذلولوی}. \end{cases}$$

۲.۱ معادلات دیفرانسیل جبری خطی با ضرایب ثابت

شکل کلی معادلات دیفرانسیل جبری خطی مرتبه‌ی اول با ضرایب ثابت به صورت زیر می‌باشد:

$$AX'(t) + BX(t) = q(t), \tag{۲.۱}$$

که A و B ماتریس‌های مربعی $(n\times n)$ هستند و A منفرد می‌باشد. ابتدا خانواده ماتریس و ماتریس‌های پوچ‌توان را معرفی می‌کنیم. سپس قضیه‌ای را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱. هرگاه A و B ماتریس‌های مختلط $n \times n$ و مخالف صفر باشند، در این صورت خانواده ماتریس (A, B) را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$A + \lambda B, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$$

تعریف ۲.۲.۱. هرگاه حداقل یک λ موجود باشد به‌طوری که

$$det(A + \lambda B) \neq ۰,$$

آنگاه خانواده ماتریس را منتظم می‌نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. ماتریس مربعی N پوچ‌توان است، هرگاه حداقل یک عدد صحیح مثبت k موجود باشد که $N^k = 0$.

مثال ۴.۲.۱. ماتریس $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ یک ماتریس پوچ‌توان است. زیرا $M^2 = 0$.

ماتریس مثلثی که درایه‌های قطر اصلی همگی صفر باشند، پوچ‌توان است.

مثال ۵.۲.۱. ماتریس $N = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ پوچ‌توان است. داریم:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

قضیه ۶.۲.۱. برای خانواده ماتریس منتظم (A, B)، ماتریس‌های نامنفرد E و F وجود دارند به‌طوری که

$$EAF = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad EBF = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

که W یک ماتریس مربعی و J یک ماتریس بلوکی جردن پوچ‌توان می‌باشد. به عبارت دیگر $\mu \in \mathbb{N}$ موجود است به‌طوری‌که

$$J^{\mu-1} \neq 0, \quad J^{\mu} = 0.$$

μ اندیس [1] خانواده ماتریس (A, B) و DAE [2] نامیده می‌شود.

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ شکل کانونی کرونکر خانواده‌ی (A, B) نامیده می‌شود. [۸]

[1] Index

[2] Differential Algebraic Equation

با قرار دادن

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F^{-۱}X.$$

در (۲.۱) داریم:

$$EAF\big(F^{-۱}X\big)' + EBF\big(F^{-۱}X\big) = Eq(t).$$

بنابراین

$$\begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} W & ۰ \\ ۰ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(t) \\ r(t) \end{pmatrix}, \tag{۳.۱}$$

که دستگاه (۳.۱) معادل با دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} y' + Wy = p(t), \\ Jz' + z = r(t). \end{cases} \tag{۴.۱}$$

معادله‌ی اول دستگاه (۴.۱) یک ODE می‌باشد.

در حالت $\mu = ۲$ داریم: $J^۱ \neq ۰$ و $J^۲ = ۰$. سطر دوم (۴.۱) را در J ضرب می‌کنیم. در نتیجه

$$J^۲z' + Jz = Jr, \tag{۵.۱}$$

داریم: $j^۲ = ۰$. بنابراین $Jz = Jr$. درنتیجه

$$(Jz)' = (Jr)'.$$

$$z = r - Jz' = r - (Jr)'.$$

همچنین، در حالت $\mu = ۳$ داریم:

$$z = \sum_{j=۰}^{\mu-۱} (-۱)^j (J^j r)^{(j)}.$$

از طرفی $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = F^{-۱}X$ و درنتیجه $X = F\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$، که در آن

$$X(۰) = F\begin{pmatrix} y(۰) \\ z(۰) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} y_۰ \\ z_۰ \end{pmatrix}.$$

۳.۱ تبدیلات لاپلاس

تعریف ۱.۳.۱. تابع $f(t)$ را در یک بازه‌ی بسته، قطعه‌وار پیوسته گوییم، هرگاه این بازه اجتماعی از زیربازه‌های متناهی باشد به‌طوری که در هر یک از این زیربازه‌ها $f(t)$ پیوسته و در نقاط مرزی تابع f حد متناهی داشته باشد.

تعریف ۲.۳.۱. گوییم تابع $f(t)$ وقتی $t \to \infty$ از مرتبه‌ی نمایی است، هرگاه اعدادی مانند α ، M و L موجود باشند به‌طوری که برای $t \geq L$ داشته باشیم:

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}. \tag{۶.۱}$$

تعریف ۳.۳.۱. هرگاه برای هر $t > \circ$ تابع $f(t)$ معلوم باشد و p عددی حقیقی باشد به طوری که

$$F(p) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt, \qquad (۷.۱)$$

برای مقادیر بزرگتر یا مساوی p همگرا باشد، آنگاه $F(p)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می‌نامیم. تبدیل (۷.۱) را با نماد

$$T\{f(t)\} = F(p), \qquad (۸.۱)$$

نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنیم $f(t)$ در تمام بازه‌های متناهی ناحیه‌ی $t \geq \circ$ قطعه‌وار پیوسته و $f(t)$ از مرتبه‌ی نمایی باشد، آن‌گاه تبدیل لاپلاس $F(p)$ وقتی $t \to \infty$، که به‌صورت

$$F(p) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t \quad p > \alpha, \qquad (۹.۱)$$

تعریف می‌شود موجود و به‌طور مطلق همگراست. [۱]

رابطه‌ی بین $F(p)$ و $f(t)$ را با

$$T^{-۱}\{F(p)\} = f(t), \qquad (۱۰.۱)$$

نیز نشان می‌دهیم و $T^{-۱}\{F(p)\}$ را تبدیل‌معکوس $F(p)$ می‌نامیم. برای مثال داریم:

$$\frac{۱}{p-a} = T\{e^{at}\} \quad e^{at} = T^{-۱}\{\frac{۱}{p-a}\}.$$

تبدیل T خطی است، یعنی

$$T\{af(t) + bg(t)\} = aT\{f(t) + bT\{g(t)\} = aF(p) + bG(p). \qquad (۱۱.۱)$$

با توجه به (۱۱.۱) و یکتا بودن تبدیلات معکوس داریم:

$$\begin{aligned} T^{-۱}\{aF(p) + bG(p)\} &= aT^{-۱}\{F(p)\} + bT^{-۱}\{G(p)\} \\ &= af(t) + bg(t), \end{aligned} \qquad (۱۲.۱)$$

همچنین

$$F(p+g) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-(p+g)} f(t)dt = \int_{\circ}^{\infty} e^{-pt}[e^{-gt} f(t)]dt. \qquad (۱۳.۱)$$

در نتیجه

$$T\{e^{-gt} f(t)\} = F(p+g).$$

قضیه ۵.۳.۱. هرگاه برای هر $t \geq a$، $f(t)$ قطعه‌وار پیوسته باشد و برای ثابت مثبت M و هر $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq M$ و $\int_M^{\infty} g(t)\mathrm{d}t$ همگرا باشد، آنگاه $\int_{\circ}^{\infty} f(t)dt$ نیز همگراست. همچنین، هرگاه برای هر $t \geq M$، $f(t) \geq g(t) \geq \circ$ و $\int_M^{\infty} g(t)\mathrm{d}t$ واگرا باشد، آنگاه $\int_a^{\infty} f(t)\mathrm{d}t$ واگراست. [۱]

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم f بر بازه‌ی دلخواه $\circ \leq t \leq A$ پیوسته و f' قطعه‌ای پیوسته باشد. همچنین ثابتهای M, k, a موجود باشند به‌طوری که برای هر $t \geq M$ ، $|f(t)| \leq Ke^{at}$. در این صورت برای هر $s > a$ ، $T\{f'(t)\}$ موجود است، همچنین

$$T\{f'(t)\} = sT\{f(t)\} - f(\circ). \qquad (۱۴.۱)$$

نتیجه ۷.۳.۱. فرض کنیم $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ بر بازه‌ی دلخواه $0 \leq t \leq A$ پیوسته و $f^{(n)}$ بر این بازه قطعه‌ای پیوسته باشد. همچنین ثابتهای K, a و M موجود باشند که برای $t \geq M$ ، $|f(t) \leq Ke^{at}$ ، $|f'(t)| \leq Ke^{at}$ ، $\cdots$ ، $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$. در این صورت $T\{f^{(n)}(t)\}$ برای هر $s > a$ موجود و برابر است با

$$T\{f^{(n)}(t)\} = s^n T\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \qquad (۱۵.۱)$$

مثال ۸.۳.۱. جواب معادله دیفرانسیل زیر را بیابید:

$$y'' + y = \sin 2t, \qquad (۱۶.۱)$$

که در شرایط اولیه‌ی

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \qquad (۱۷.۱)$$

صدق می‌کند. فرض کنیم این مساله‌ی مقدار اولیه جواب $y = \phi(t)$ داشته باشد که با دو مشتق اول خود در شرایط نتیجه‌ی (۷.۳.۱) صدق می‌کند. در این‌صورت با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادله دیفرانسیل، داریم:

$$s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) + Y(s) = \frac{2}{(s^2+4)}.$$

در نتیجه

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+1)(s^2+4)}. \qquad (۱۸.۱)$$

با استفاده ازکسرهای جزیی می‌توان $Y(s)$ را به‌صورت

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2+4} \\ &= \frac{(as+b)(s^2+4) + (cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2+4)}, \end{aligned} \qquad (۱۹.۱)$$

نوشت. در نتیجه

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a+c)s^3 + (b+d)s^2 + (4a+c)s + (4b+d).$$

بنابراین

$$a + c = 2, \quad b + d = 1,$$

$$4a + c = 8, \quad 4b + d = 6.$$

در نتیجه $a = 2$ ، $c = 0$ ، $b = \frac{5}{3}$ و $d = -\frac{2}{3}$ که داریم:

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2+1} + \frac{\frac{5}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{2}{3}}{s^2+4}.$$

در نتیجه

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t.$$

۱.۳.۱ توابع پله‌ای

در این بخش چند خاصیت دیگر تبدیل لاپلاس را معرفی می‌کنیم.

تابع را با u_c نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$u_c(t) = \begin{cases} ۰, & t < c, \\ ۱, & t \geq c, \end{cases} \tag{۲۰.۱}$$

که در آن $c \geq ۰$.

برای تابع $f(t)$، به‌ازای $t \geq ۰$ ، تابع g را به‌صورت

$$y = g(t) = \begin{cases} ۰ & t < c, \\ f(t-c) & t \geq c, \end{cases}$$

که انتقال f را به اندازه‌ی c در جهت مثبت t نشان می‌دهد تعریف می‌کنیم. $g(t)$ را با تابع پله‌ای واحد به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$g(t) = u_c(t) f(t-c).$$

قضیه ۹.۳.۱. [۱] هرگاه برای هر $s > a \geq ۰$ ، $F(s) = T\{f(t)\}$ موجود و c تابع مثبتی باشد، آنگاه

$$T\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}T\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > a. \tag{۲۱.۱}$$

برعکس، هرگاه $f(t) = T^{-۱}\{F(s)\}$ ، آن‌گاه

$$u_c(t)f(t-c) = T^{-۱}\{e^{-cs}F(s)\}. \tag{۲۲.۱}$$

مثال ۱۰.۳.۱. هرگاه تابعf به‌صورت زیر تعریف شود :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & ۰ \leq t < \frac{\pi}{۴}, \\ \sin t + \cos(t - \frac{\pi}{۴}), & t \geq \frac{\pi}{۴}. \end{cases}$$

$T\{f(t)\}$ را می‌یابیم. توجه می‌کنیم که $f(t) = \sin t + g(t)$ ، که در آن

$$g(t) = \begin{cases} ۰ & t < \frac{\pi}{۴}, \\ \cos(t - \frac{\pi}{۴}) & t \geq \frac{\pi}{۴}. \end{cases}$$

بنابراین

$$g(t) = u_{\frac{\pi}{۴}}(t)\cos(t - \frac{\pi}{۴}),$$

و

$$\begin{aligned} T\{f(t)\} &= T\{\sin t\} + T\{u_{\frac{\pi}{۴}}(t)\cos(t - \frac{\pi}{۴})\} \\ &= T\{\sin t\} + e^{-\frac{\pi}{۴}}T\{\cos t\}. \end{aligned} \tag{۲۳.۱}$$

با استفاده از تبدیلات لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{۱}{s^۲+۱} + e^{-\frac{\pi s}{۴}}\frac{s}{s^۲+۱} = \frac{۱ + se^{-\frac{\pi s}{۴}}}{s^۲+۱}.$$

مثال ۱۱.۳.۱. تبدیل معکوس تابع زیر را به‌دست آورید:

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

با استفاده از ویژگی خطی تبدیل معکوس داریم:

$$\begin{aligned} f(t) &= T^{-1}\{F(s)\} = T^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} - T^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\} \\ &= t - u_2(t)(t-2). \end{aligned} \tag{۲۴.۱}$$

تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 2, & t \ge 2. \end{cases}$$

قضیه ۱۲.۳.۱. [۱] فرض کنیم برای هر $s > a \ge 0$ ، $F(s) = T\{f(t)\}$ موجود و c ثابت مثبت باشد، آنگاه

$$T\{e^{ct} f(t)\} = F(s-c), \quad s > a + c. \tag{۲۵.۱}$$

برعکس ، هرگاه $f(t) = T^{-1}\{F(s)\}$ ، آنگاه

$$e^{ct} f(t) = T^{-1}\{F(s-c)\}. \tag{۲۶.۱}$$

۴.۱ انتگرال فوریه

هرگاه تابعی متناوب باشد، آنگاه بسطی به‌صورت سری فوریه دارد. اگر تابعی چنین خاصیتی نداشته باشد، آنگاه نمایشی انتگرالی شبیه بسط فوریه دارد. برای این منظور، تابع باید بر $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

۱.۴.۱ تعریف انتگرال فوریه

تعریف ۱.۴.۱. انتگرال فوریه‌ی [۱] تابع f به‌صورت زیر است:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}y \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos y(x-t) \mathrm{d}t.$$

مثال ۲.۴.۱. هرگاه تابع f به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(t) = 1, \quad |t| \le 1; \quad f(t) = 0, \quad |t| > 1,$$

دراین‌صورت انتگرال فوریه‌ی f به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}y \int_{-1}^1 (\cos xy \cos ty + \sin xy \sin ty) \mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xy \mathrm{d}y \int_0^1 \cos ty \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin y \cos xy}{y} \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{۲۷.۱}$$

[۱] Fourier Integral