بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

برخی ویژگی‌های ADS مدولها و ADS* مدولها

استاد راهنما:

دکتر جواد مقدری

نگارش:

معصومه عبدی طالب بیگی

شهریور ماه ۱۳۹۳

تأییدیه‌ی هیأت داوران جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه

با عنایت به آئین‌نامه آموزشی دوره‌ی کارشناسی ارشد، جلسه دفاعیه پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد **معصومه عبدی طالب بیگی** به شماره دانشجویی ۹۱۴۱۱۰۱۲۱ رشته‌ی ریاضی محض گرایش جبرجابجایی در تاریخ ۹۳/۶/۲۶ در محل دانشگاه هرمزگان تحت عنوان برخی ویژگی‌های ADS مدولها و ADS* مدولها با حضور هیئت داوران برگزار گردید و براساس کیفیت پایان‌نامه، ارائه دفاعیه و نحوه‌ی پاسخ به سئوالات، پایان‌نامه مورد قبول هیئت داوران قرار گرفت.

نمره‌ی پایان‌نامه به عدد (.........) و به حروف (..................................) اعلام گردید.

ردیف	سمت	نام ونام‌خانوادگی	دانشگاه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر جواد مقدری	دانشگاه هرمزگان	
۲	استاد مشاور		دانشگاه هرمزگان	
۳	داور داخلی	دکتر علی حاجی زمانی	دانشگاه هرمزگان	
۴	داور خارجی	دکتر عبدالناصر بهلکه	دانشگاه شیراز	
۵	نماینده تحصیلات تکمیلی	علیداد عسکری	دانشگاه هرمزگان	

مدیرکل تحصیلات تکمیلی:

دکتر شهرام گلزاری

مالکیت معنوی

باسمه تعالی

اینجانب معصومه عبدی طالب بیگی به شماره دانشجویی ۹۱۴۱۱۰۱۲۱ دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش جبرجابجایی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد متعهد می‌شوم چنانچه براساس پایان‌نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم ضمن مطلع کردن از استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر، کتاب و مقاله و ... به صورت مشترك و با ذکر نام استاد راهنما مقدم بر نام خود مبادرت کنم.

نام و نام خانوادگی: معصومه عبدی طالب بیگی

تاریخ و امضا:

باسمه تعالی

اینجانب معصومه عبدی طالب بیگی به شماره دانشجویی ۹۱۴۱۱۰۱۲۱ دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش جبرجابجایی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد گواهی می‌کنم چنانچه در پایان‌نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام، با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و مأخذ را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

نام و نام خانوادگی: معصومه عبدی طالب بیگی

تاریخ و امضا:

مجوز بهره‌برداری از پایان‌نامه

بهره‌برداری از این پایان‌نامه در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می‌شود، بلامانع است:

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه برای همگان بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره‌برداری از این پایان‌نامه تا تاریخ .... ممنوع است.

استاد راهنما: دکتر جواد مقدری

تاریخ:

امضا:

تقدیم به

همسر عزیزم

و پدر و مادر مهربانم

چکیده

در این پایان‌نامه مباحثی از نظریه مدول‌ها، تحت عنوان ADS مدول‌ها و ADS* مدول‌ها را معرفی کرده و ارتباط آن‌ها را با مفاهیمی چون مدول‌های شبه پیوسته، نیم‌کامل و پیوسته و زیرمدول‌های متمم و مکمل شده بیان می‌کنیم. بعد از آن برخی از خصوصیات ADS مدول‌ها را بیان می‌کنیم. در ادامه مفاهیمی چون زیرمدول افزایشی، نیم‌کامل، نیم‌آرتینی و نامنفرد را معرفی کرده و ارتباط این زیرمدول‌ها را با مدول‌های ADS مدول‌ها و ADS* مدول‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژگان کلیدی: مدول (ADS، *ADS، تصویری، (شبه) پیوسته، (شبه) گسسته) - زیرمدول (متمم شده، مکمل شده).

سپاس گزاری...

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که هستی مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

با تقدیر و تشکر شایسته از استاد فرهیخته و فرزانه جناب آقای دکترجواد مقدری که با نکته های دلاویز و گفته های بلند ، صحیفه های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است.

همچنین از آقایان دکتر حاجی زمانی و دکتر بهلکه که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته‌اند کمال تشکر را داشته باشم و از دیگر اساتید گروه ریاضی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام بسیار سپاسگزارم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدر، مادر و همسر عزیزم تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

معصومه عبدی طالب بیگی

شهریورماه ۱۳۹۳

فهرست مطالب

ح

پیشگفتار

نظریه مدول‌ها سالهاست به عنوان تعمیمی از فضاهای برداری مطرح شده و مورد استفاده ریاضیدانان در گرایش‌های مختلف ریاضی از جمله جبر، جبرهمولوژیک، توپولوژی جبری و هندسه جبری قرار گرفته است. در طول سالها مدول‌های گوناگونی تعریف و رابطه‌های بین آنها به‌طورکامل بررسی شده است. از این رو با تعریف ADS و ADS^* - مدول‌ها ابزار مناسب دیگری برای طبقه بندی کردن نظریه مدول‌ها فراهم شد. یافتن چنین ویژگی‌هایی در نظریه مدول‌ها علاوه بر گسترش علم در این شاخه، مسایل مربوط به سایر گرایش‌های مرتبط ذکر شده را نیز حل می‌کند. در این پایان‌نامه سعی ما بر این است که با معرفی ابزارها، بتوانیم برای گسترش کاربرد این مفاهیم، خواص و ارتباط میان آن‌ها را بهتر و بیشتر مشخص کرده و تلاش کنیم تا کار با آن‌ها را راحت‌تر نماییم.

ADS - مدول‌ها در سال ۱۹۷۰ توسط فوچس [۱] معرفی شدند که در واقع به معنای قطعاً جمعوند مستقیم است که سال‌ها مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است. بعد از آن ریاضیدانان مختلفی از جمله

الاحمدی [۲]، جین [۳]، لروی [۴] در سال ۲۰۱۲ میلادی، در این زمینه فعالیت کرده و خصوصیات دیگری برای ADS - مدول‌ها بدست آوردند. همچنین آن‌ها ارتباط بین این مدول‌ها و دیگر مدول‌ها مانند نامنفرد و شبه گسسته را بررسی کردند. بعد از آن ریاضیدانان مختلفی از جمله ترانگ کانگ کیون [۵] و

---

[۱] Fuchs

[۲] Alahmadi

[۳] Jain

[۴] Leroy

[۵] Truong Cong Quynh

تامر کوسان [۶] در سال ۲۰۱۴ میلادی، در زمینه حلقه و مدول‌های ADS فعالیت کرده و خصوصیات دیگری از حلقه و مدول های ADS بدست آورده‌اند. آن‌ها به بررسی رابطه این مدول با خود حلقه و همچنین ارتباط این مدول و حلقه‌ها با دیگر مدول‌ها و حلقه‌ها مانند پایا و حلقه‌های SC و ef-توسعه یافته نیز پرداختند. کشین توتونچو [۷] با تعریف ADS^*-مدول‌ها که در واقع دوگان مدول‌های ADS هستند؛ توانست خواص دیگری برای این مدول‌ها بدست آورد. آنها برخی ویژگی‌های این مدول‌ها و ارتباط آنها با دیگر مدول‌ها مانند π-پروژکتیو را بررسی کردند.

این پایان‌نامه برگرفته از سه مقاله است. مقاله‌های ADS-مدول‌ها و نتایجی پیرامون حلقه و مدول‌های ADS که به‌ترتیب در سال‌های ۲۰۱۲ و ۲۰۱۴ منتشر شدند(منابع [۱] و [۲۰]) و مقاله ADS^*-مدول‌ها که در سال ۲۰۱۲ به چاپ رسیده است ([۲۰]).

این پایان‌نامه شامل چهار فصل است.

فصل اول شامل دو بخش است که در آن مفاهیم مورد نیاز فصل‌های بعدی را ذکر می‌کنیم. در بخش اول، مفاهیم و گزاره‌های مرتبط با مفاهیم انژکتیو، پروژکتیو، نوتری و آرتینی را مطرح می‌کنیم. همچنین با فرض اینکه N زیر مدولی از R-مدول M است؛ ابتدا $(N :_R M)$ را تعریف کرده و نشان خواهیم داد که ایده‌آلی از حلقه R است. در بخش دوم، برخی از خواص رادیکال یک زیرمدول را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در این فصل از منابع [۱۱]، [۲۳] و [۲۴] استفاده شده است.

فصل دوم شامل چهار بخش است. مطالب این فصل برگرفته از منبع [۱] می‌باشد. در بخش اول، ابتدا مفهوم مدول‌های ADS، پیوسته، شبه پیوسته، گسسته، شبه گسسته و پوسته انژکتیو، نیم‌تام و A، B-پروژکتیو و زیر مدول کوچک و متمم یک زیر مدول را تعریف کرده و برای درک بهتر، مثال‌هایی را ارائه می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که اگر حلقه R جابجایی باشد هر R-مدول دوری ADS است.

در بخش دوم با تعریف زیرمدول بسته، خصوصیات مدول‌های ADS و عنوان خواهیم که جمعوندهای یک ADS مدول دو به دو پروژکتیوند و همچنین ثابت خواهیم کرد جمع مستقیم دو زیر مدول بسته از یک ADS مدول، زمانی که یکی از آن‌ها جمعوند مستقیم است، نیز بسته است. در ادامه متمم‌های جمعوند مستقیم یک ADS-مدول را به‌طور دقیق مشخص خواهیم کرد. در نهایت با معرفی حلقه‌های منظم، تجزیه ناپذیر، ساده و خود انژکتیو برخی خصوصیات حلقه ADS خواهیم داشت که مطالب کاملتر آن را در فصل سوم ذکر

[۶] M. Tamer Kosan

[۷] Keshin Tutuncu

خواهیم کرد. در بخش سوم با تعریف زیر مدول نامنفرد، جمعوندهای ADS - مدول را مشخص می‌کنیم. در بخش آخر با معرفی مدول به طور کامل ADS و با استفاده از مدول‌های شبه‌گسسته و نیم‌تام ساختار مدول به طور کامل ADS را مشخص می‌کنیم. در پایان نشان می‌دهیم که اگر R یک مدول نیم کامل باشد که هر R - مدول دوری آن شبه پیوسته باشد، آنگاه R جمع مستقیمی از حلقه‌های آرتینی ساده یا حلقه ارزیاب است.

فصل سوم شامل دو بخش است. مطالب این فصل برگرفته از منبع [۱۸] می‌باشد. در بخش نخست به ارتباط مدول های CS، شبه پیوسته، خود- مولد و پایا با ADS - مدول‌ها می‌پردازیم. در ادامه حلقه‌های ADS، ef - توسعه یافته و I - متناهی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به ارتباط آن‌ها پرداخته و در پایان ارتباط حلقه و مدول ADS را مطرح می‌کنیم.

فصل چهارم شامل دو بخش است. مطالب این فصل برگرفته از منبع [۲۰] می‌باشد. در بخش نخست ابتدا به معرفی مدول‌های ADS^* مکمل شده فراوان، مکمل شده، پروژکتیو و خیزشی پرداخته و ارتباط این مفاهیم با یکدیگر را ذکر می‌کنیم. بعد از آن به بیان ویژگی‌های مدول‌های ADS^* پرداخته و نشان می‌دهیم که اگر M پروژکتیو باشد، آنگاه ADS^* است. در ادامه ویژگی‌های مفیدی را برای ADS^* ها ذکر می‌کنیم. پس از آن کاملاً ADS^* - مدول‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در پایان نشان می‌دهیم که اگر R حلقه نیم آرتینی باشد، آن‌گاه V - حلقه است اگر و تنها اگر هر R - مدول ADS^* باشد اگر و تنها اگر هر مدول با دو مولد ADS^* باشد.

فهرست نمادها

$\mathrm{Ann}_R(M)$	پوچساز R- مدول M
$\mathrm{ann}(m)$	پوچساز عضوm
$< A >$	زیر مدول تولید شده توسط A
DVR	حلقه ارزیاب گسسته
$E(M)$	پوسته انژکتیو
$E_M(N)$	پوسته M- انژکتیو
$\mathrm{End}(M)$	حلقه درون ریختی‌های مدول M
$\mathrm{Hom}_R(M, N)$	مجموعه همریختی‌های R- مدولی از M به N
$\mathrm{Im}\,\varphi$	نگاره هم‌ریختی φ
$J(R)$	رادیکال ژاکوبسون حلقه R
$\mathrm{Ker}\,\varphi$	هسته هم‌ریختی φ
$l(X)$	پوچساز چپ X در R
$M \oplus N$	جمع مستقیم مدول‌های M و N
$N(R)$	رادیکال پوچ حلقه R
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$(N :_R M)$	$\{r \in R \mid rM \subseteq N\}$
$N \ll M$	N زیر مدول کوچک M
$N \leqslant_e M$	N زیر مدول اساسی M
$\overline{N}$	بستار N
PID	دامنه ایده‌آل اصلی
$\mathbb{Q}$	مجموعه اعداد گویا
$\mathrm{Rad}\,M$	رادیکال ژاکوبسون حلقهR
$\mathrm{rad}\,N$	رادیکال زیر مدول N

$R[x]$	حلقه چند جمله‌ای‌ها
$r(X)$	پوچ‌ساز راست X در R
$\mathbb{Z}$	حلقه اعداد صحیح
$\mathbb{Z}_{P^\infty}$	$\{\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z} \mid a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$
$\sigma[M]$	رسته ویس بائر

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی وپیش نیازها

در سرتاسر این پایان‌نامه فرض می‌کنیم که R حلقه‌ای شرکت‌پذیر با عنصر همانی بوده و تمام مدول‌ها را R-مدول راست در نظر می‌گیریم؛ مگر آن‌که خلاف آن ذکر شود. این فصل شامل دو بخش است که در آن مفاهیم مورد نیاز فصل‌های بعدی را ذکر می‌کنیم. در بخش اول، مفاهیم و گزاره‌های مرتبط با انژکتیو، پروژکتیو، نوتری و آرتینی را مطرح می‌کنیم. همچنین با فرض اینکه N زیر مدولی از R-مدول M است؛ ابتدا $(N :_R M)$ را تعریف کرده و نشان خواهیم داد که ایده‌آلی از حلقه R است. در بخش دوم، برخی از خواص رادیکال یک زیرمدول را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. R-مدول J را انژکتیو گوییم؛ اگر برای هر دیاگرام دقیق زیر از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

همریختی R-مدولی $h : B \longrightarrow J$ وجود داشته باشد به طوری که $hof = g$.

مثال ۲.۱.۱. [۱۱] $\mathbb{Q}$ یک $\mathbb{Z}$-مدول انژکتیو است.

قضیه ۳.۱.۱. [۲۴] R- *مدول* A، *انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر ایده‌آل* I *از* R، *هر همریختی* $f : I \to A$ *به همریختی* $\overline{f} : R \to A$ *توسیع یابد.*

تعریف ۴.۱.۱. R- مدول P را پروژکتیو گوییم؛ اگر برای هر دیاگرام دقیق زیر از R- مدول‌ها و R- همریختی‌ها

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & \circ
\end{tikzcd}$$

همریختی R- *مدولی* A $h : P \longrightarrow A$ *وجود داشته باشد به طوری که* $goh = f$.

مثال ۵.۱.۱. حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ ، $\mathbb{Z}$- مدولی پروژکتیو است.

تعریف ۶.۱.۱. حلقه ناصفر R را بخشی گوییم؛ هرگاه هر عضو غیر صفر آن وارون ضربی چپ و راست داشته باشد.

مثال ۷.۱.۱. الف) به وضوح میدان ها حلقه‌هایی بخشی هستند.

ب) حلقه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، حلقه‌ای بخشی نیست.

تعریف ۸.۱.۱. حلقه R را منظم فون نویمان [۱] گوییم؛ اگر برای هر $a \in R$، $x \in R$ موجود باشد به طوری که $a = axa$.

مثال ۹.۱.۱. الف) هر میدان F، یک حلقه منظم فون نویمان است. زیرا برای $\circ \neq a \in F$، کافیست قراردهید $x = a^{-۱}$. در این صورت $a = axa$.

ب) حلقه $\mathbb{Z}$ منظم فون نویمان نیست. زیرا برای $a = ۲ \in \mathbb{Z}$، $x \in \mathbb{Z}$ وجود ندارد که $۲ = ۴x$.

تعریف ۱۰.۱.۱. R- مدول M را ساده گوییم؛ اگر $\{\circ\}$ و M تنها زیرمدول‌های آن باشند.

مثال ۱۱.۱.۱. الف) برای هر عدد اول p، $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}_p$ ساده است.

ب) $\mathbb{Z}$- مدول $\mathbb{Z}_۴$ ساده نیست. زیرا $\{\overline{\circ}, \overline{۲}\}$ زیر مدول ناصفر و سره‌ای از آن است.

[۱] Von Neumann

گزاره ۱۲.۱.۱. [۸، گزاره۱ .۳] *فرض کنید M یک R-مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

الف) M، *مجموعی از زیرمدول‌های ساده است؛*

ب) M، *جمع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده است؛*

ج) هر زیرمدول M، *جمعوند مستقیم آن است.*

تعریف ۱۳.۱.۱. R-مدول M را که در یکی از شرایط هم‌ارز گزاره ۱۲.۱.۱، صدق کند، نیم‌ساده گوییم.

مثال ۱۴.۱.۱. الف) $M = \mathbb{Z}_۲ \oplus \mathbb{Z}_۳$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول نیم‌ساده است.

ب) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ به‌عنوان $\mathbb{Z}$-مدول نیم‌ساده نیست.

گزاره ۱۵.۱.۱. [۱۶، گزاره۱ .۵] *برای حلقه جابجایی و یکدار* R، *گزاره‌های زیر معادلند.*

الف) R، *منظم فون نویمان است؛*

ب) هر R-*مدول ساده، انژکتیو است.*

گزاره ۱۶.۱.۱. *فرض کنید* M، R-*مدولی نیم‌ساده باشد و* N *زیر مدولی از* M. *در این صورت* N *نیم‌ساده است.*

برهان. بنا به تعریف $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ که در آن M_i ها ساده‌اند. به‌سادگی دیده می‌شود که $M \cap N = (\bigoplus_{i\in I} M_i) \cap N = \bigoplus (M_i \cap N)$. از طرفی $M_i \cap N \leq M_i$ و M_i ها ساده‌اند؛ لذا $M_i \cap N = \{۰\}$ یا $M_i \cap N = M_i$. بنابراین $J \subseteq I$ وجود دارد که $N = \bigoplus_{i\in J}(M_i)$. در نتیجه N نیم‌ساده است. ■

گزاره ۱۷.۱.۱. *فرض کنید* $\sigma : M_۱ \longrightarrow M_۲$، *یک تکریختی* R-*مدولی باشد و* $N_۱$، *زیر مدولی از* $M_۱$. *در اینصورت* $\dfrac{\sigma(M_۱)}{\sigma(N_۱)} \cong \dfrac{M_۱}{N_۱}$.

برهان. واضح است. ■

گزاره ۱۸.۱.۱. *فرض کنید* M *یک* R-*مدول باشد؛ به‌طوری‌که توسط هر عضو غیر صفرش تولید می‌شود. در این‌صورت* M *ساده است.*

برهان. فرض کنید N، زیر مدولی غیر صفر از مدول M باشد. در این‌صورت $N \ni x \neq 0$ وجود دارد. لذا $M \ni x \neq 0$. بنا به فرض $M = xR \subseteq N \subseteq M$. بنابراین $M = N$. ■

گزاره ۱.۱.۱۹. *فرض کنید $\sigma : M_1 \longrightarrow M_2$ یک همریختی R-مدولی باشد. در این‌صورت برای $m_1 \in M_1$ داریم* $\sigma(m_1 R) \cong \dfrac{m_1 R}{\operatorname{Ker}\sigma \cap m_1 R}$.

برهان. واضح است. ■

تعریف ۱.۱.۲۰. [۲۳] فرض کنید Δ گروه آبلی جمعی و به‌طور کلی مرتب باشد. رابطه ترتیب روی Δ را با " $\leq$ " نشان می‌دهیم. یک ارزیاب V، روی میدان K، نگاشتی مانند $V : K^* = K - \{0\} \longrightarrow \Delta$ است که برای هر $a, b \in K^*$ در شرایط زیر صدق می‌کند.

الف) $V(ab) = V(a) + V(b)$،

ب) $Min\{V(a), V(b)\} = V(a+b)$.

در ضمن با اضافه کردن عنصری به صورت ∞ به $\triangle$، می‌توان نگاشت V را به K گسترش داد. بدین صورت که برای هر $\alpha \in \triangle$، تعریف می‌کنیم

$$\alpha + \infty = \infty + \alpha = \infty, \infty + \infty = \infty, \alpha < \infty, V(0) = \infty$$

اگر V یک ارزیاب روی K باشد؛ آن‌گاه $V = \{a \in K \mid V(a) \geq 0\}$ را حلقه ارزیاب K تعریف می‌کنیم. تنها ایده‌آل بیشین آن $m = \{a \in K \mid V(a) > 0\}$ است.

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنید K یک میدان باشد. یک ارزیاب گسسته روی K، تابع ارزیاب $V : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ است که پوشا باشد. همچنین حلقه ارزیاب متناظر با یک تابع ارزیاب گسسته را، یک حلقه ارزیاب گسسته (DVR) گوییم.

گزاره ۱.۱.۲۲. *فرض کنید M_1 و M_2 دو R-مدول باشند و $\sigma \in \operatorname{Hom}_R(M_1, M_2)$. در این صورت* $\dfrac{M_1 \oplus M_2}{\operatorname{Ker}\sigma} \cong \dfrac{M_1}{\operatorname{Ker}\sigma} \oplus M_2$.

برهان. واضح است. ■

گزاره ۱.۱.۲۳. [۱۱، *گزاره ۱.۱.۳*] *برای R-مدول M، شرایط زیر معادلند.*

الف) هر زنجیر از زیرمدول‌های M متوقف شود؛

ب) هر مجموعه ناتهی از زیر مدول‌های M، در شرط ماکسیمال صدق کند؛

ج) هر زیر مدول از M، با تولید متناهی باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. R-مدول M را نوتری گوییم؛ هرگاه در یکی از شرایط معادل گزاره ۲۳.۱.۱، صدق کند.

مثال ۲۵.۱.۱. الف) $\mathbb{Z}_n$ ها به عنوان $\mathbb{Z}$ مدول نوتری هستند.

ب) $\mathbb{Q}$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول نوتری نیست.

تعریف ۲۶.۱.۱. حلقه R را نوتری گوییم؛ هرگاه R_R نوتری باشد.

مثال ۲۷.۱.۱. $\mathbb{Z}$ نوتری است.

گزاره ۲۸.۱.۱. [۱۱، گزاره۳.۱.۲] *فرض کنید*

$$\circ \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow Q \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها باشد. دراین‌صورت M نوتری است اگر و تنها اگر L و Q نوتری باشند.

نتیجه ۲۹.۱.۱. *اگر R نوتری باشد، آن‌گاه برای هر ایده‌آل I از R، $\dfrac{R}{I}$ نیز نوتری است.*

برهان. واضح است. ■

گزاره ۳۰.۱.۱. [۱۱، نتیجه۳.۱.۲] *اگر R نوتری و M یک R-مدول با تولید متناهی باشد؛ آن‌گاه M نیز نوتری است.*

قضیه ۳۱.۱.۱. [۱۱، قضیه ۳.۱.۱] *اگر R نوتری باشد؛ آن‌گاه $R[x]$ نیز نوتری است.*

گزاره ۳۲.۱.۱. [۱۱، گزاره ۳.۳.۱] *فرض کنید M یک R مدول باشد. در این‌صورت شرایط زیر با هم معادلند.*

الف) هر مجموعه ناتهی از زیرمدول‌های M عضو مینیمال دارد؛