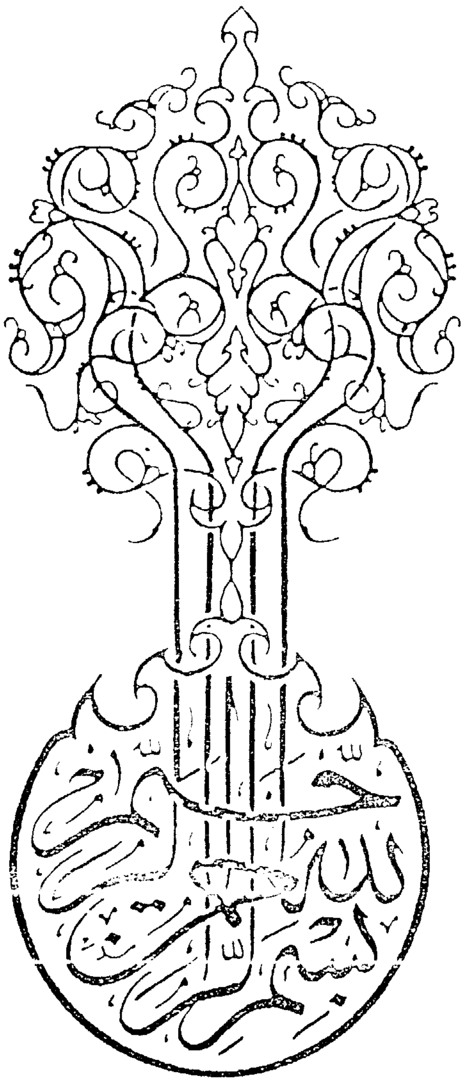
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکدهٔ علوم

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

عنوان

بررسی فضاهای محدب یکنواخت و موضعاً محدب یکنواخت

نگارشِ

آرزو ولدخانی

استاد راهنما

دکتر مسعود صباغان

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسیِ ارشد

در

ریاضی محض

تیر ۱۳۸۱

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

۲۵ /۱۰/ ۱۳۸۱

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض آرزو ولد خانی** تحت عنوان:

بررسی فضاهای محدب یکنواخت و موضعاً محدب یکنواخت

در تاریخ ۸۱/٤/۲٦ در **گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید. **هیأت داوران** بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایاننامه** ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد** در رشته **ریاضی محض** معادل با ٦ واحد با نمره هجده (۱۸) با درجه مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	دکتر مسعود صباغان	دانشیار	تهران	
۲. استاد مشاور	دکتر ارسلان شادمان	استاد	تهران	
۳. استاد داور	دکتر فاطمه آیت ا...زاده شیرازی	-	-	

معاون تحصیلات تکمیلی گروه
سامک یاسمی

مدیر گروه
حمید پزشک

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
حسن ابراهیم زاده

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه سیرکلی فضاهای محدب یکنواخت و فضاهای موضعاً محدب یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته شده است. شرطهای معادلی برای این فضاها نیز آورده شده است و در نهایت کاربرد این فضاها در نظریهٔ تقریب بررسی شده است.

مقدمه

فضاهای محدب یکنواخت در سال ۱۹۳۶ توسط کلارکسون بعنوان کار اصلی وی جهت اخذ دانشنامهٔ دکترا معرفی گردید. او نشان داد که برای هر $1 < p$، فضاهای L_p محدب یکنواخت هستند. سپس در سال ۱۹۳۹، پتیس نشان داد که هر فضای محدب یکنواخت انعکاسی می‌باشد. در سال ۱۹۴۰، بوآس در پیرو کار کلارکسون، روش ساده‌تری برای اثبات تحدب یکنواخت فضاهای L_p برای هر $1 < p$ ارائه کرد.

در سال ۱۹۴۰، مالون دی با نگرشی متفاوت به این فضاها، دسته‌ای از فضاها که محدب یکنواخت نیستند را مشخص کرد. وی همچنین تحدب یکنواخت حول یک نقطه را تعریف کرد و نشان داد که اگر مجموعهٔ B حول نقطهٔ b_0 محدب یکنواخت باشد آنگاه B با یک فضای محدب یکنواخت یکریخت است. همچنین فضایی را معرفی کرد که با هیچ فضای محدب یکنواختی یکریخت نیست. مالون دی در سال ۱۹۴۳ تحدب موضعی یکنواخت اطراف یک نقطه را تعریف کرد. بنا به این تعریف فضای X اطراف نقطهٔ b_0 موضعاً محدب یکنواخت است هرگاه کره‌ای حول b_0 وجود داشته باشد که در شرط تحدب یکنواخت صدق کند. وی به عنوان کاربردی از مطالب اخیر، قضایای ارگودیک منسوب به آلاقلو و بیرکوف را برای دسته‌ای از فضاهایی که محدب یکنواخت نیستند ثابت کرد. او سپس شرط لازم و کافی برای تحدب یکنواخت رده‌ای از فضاها را بیان کرد.

در سال ۱۹۵۵، لواگلیا فضاهای موضعاً محدب یکنواخت را تعریف کرد و نشان داد که حاصلضرب فضاهای موضعاً محدب یکنواخت یک فضای موضعاً محدب یکنواخت است. همچنین دسته‌ای از فضاها را که با فضاهای محدب یکنواخت یکریخت هستند مشخص نمود به بررسی تحدب موضعی یکنواخت و نرمهای قویاً مشتق‌پذیر نرم روی آن فضاها پرداخت. در سال ۱۹۸۱ پروس به بررسی عملگرهای فریشی روی فضاهای

محدب یکنواخت پرداخت.

در سال ۱۹۹۱، آلیپرانتیس و آبراموویچ و بورکینشا نشان دادند که عملگر فشردهٔ T روی فضای موضعاً محدب یکنواخت در تساوی داگاوت صدق می‌کند اگر و تنها اگر $\|T\|$ یک مقدار ویژه برای T باشد. در سال ۲۰۰۰، رینف دو شرط معادل برای تحدب یکنواخت را مشخص کرد.

همچنان که ملاحظه کردید، فضاهای محدب یکنواخت از سال ۱۹۳۶ وارد ریاضیات گردید. و چندی نپایید که وسعت گرفت و نظر برخی ریاضیدانان را به خود جلب کرد. همچنین طولی نکشید که این فضاها وارد نظریهٔ تقریب شدند در سالهای اخیر نیز مورد بررسی قرارگرفته‌اند.

در این پایان نامه در فصل اول مقدمات لازم را یادآوری می‌کنیم. در فصل دوم و فصل چهارم به بررسی خواص و شرایط معادل فضاهای محدب یکنواخت و موضعاً محدب یکنواخت پرداخته می‌شود و در فصلهای سوم و پنجم جنبه‌های کاربردی این فضاها بررسی می شوند. امیدوارم که این پایان نامه مورد استفاده دانشجویان ریاضی کشور قرار گیرد.

آرزو ولدخانی

تیر ۱۳۸۱

فصل اول

پیشنیازها

تعریف ۱.۱: فرض کنید X یک مجموعهٔ غیرتهی باشد. یک متر روی X ، یک تابع به صورت $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ است به طوری که برای هر $x, y, z \in X$ داریم:

$i)\ \ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

$ii)\ \ d(x, y) = d(y, x)$

$iii)\ \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

به مجموعهٔ X همراه متر d فضای متریک گفته می‌شود و با نماد (X, d) نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۲: فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان F باشد (در اینجا $F = \mathbb{C}$ یا $F = \mathbb{R}$) در این صورت یک نرم روی X، یک تابع به صورت $\| \| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ می‌باشد به طوری که برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in F$ داریم:

$i)\ \ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

$ii)\ \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

$iii)\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

فضای خطی X همراه نرم $\| \|$ فضای برداری نرمدار گفته می‌شود و با نماد $(X, \| \|)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۳: هر فضای خطی نرمدار کامل، یک فضای باناخ نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۴: فرض کنید X یک فضای خطی روی میدان $\mathbb{R}$ باشد در این صورت $A \subseteq X$ یک مجموعهٔ محدب است هرگاه برای هر $x, y \in A$ و هر $t \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$tx + (1-t)y \in A$$

به عبارت دیگر مجموعهٔ A محدب است هرگاه برای هر $x, y \in A$ خط واصل نقاط x و y نیز واقع در مجموعهٔ A باشد.

تعریف ۱.۵: فرض کنید X و Y دوفضای خطی نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد در این صورت نرم عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$$

تعریف ۱.۶: فرض کنید X یک مجموعه و $P(X)$ مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های X باشد در این صورت $\mathcal{M} \subseteq P(X)$ یک σ-جبر نامیده می‌شود هرگاه:

$$i)\ \phi, X \in \mathcal{M}$$

$$ii)\ \forall E \in \mathcal{M} \quad : \quad E^c \in \mathcal{M} \qquad (E^c = X \setminus E)$$

$$iii)\ \forall (E_i)_{i\in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M} \quad : \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{M}$$

تعریف ۱.۷: (فضاهای L^p)

فرض کنید X یک فضای خطی و $(X, \mathcal{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. همچنین فرض کنید $1 \leq p \leq \infty$

و E یک زیرمجموعه اندازه‌پذیر از X باشد. در این صورت مجموعهٔ تمام توابع اندازه‌پذیر مانند f که $|f|^p$ روی مجموعهٔ E انتگرال‌پذیر باشد را با نماد $L_p(E)$ نمایش می‌دهیم، یعنی:

$$L_p(E) = \left\{f : \int_E |f|^p d\mu < +\infty\right\} \qquad 1 \leq p \leq +\infty$$

در اینجا دو تابع با هم مساوی هستند اگر $\mu-$ تقریباً همه‌جا باهم مساوی باشند.

برای هر $f \in L_p(E)$ قرار دهید:

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

عدد $\|f\|_p$، pـنرم تابع f نامیده می‌شود.

خاصیت مثلثی pـنرم به نامساوی مینکوفسکی معروف است که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۱.۸: (نامساوی مینکوفسکی)

فرض کنید $1 \leq p \leq +\infty$ و E یک زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر X باشد. در این صورت برای هر $f, g \in L_p(E)$ داریم:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

اثبات: رجوع کنید به [۷].

قضیه ۱.۹: برای هر $۱ \leq p \leq \infty$ و هر زیرمجموعهٔ اندازه‌پذیر E از X، فضای $L_p(E)$ یک فضای باناخ است.

اثبات: رجوع کنید به [۷].

تعریف ۱.۱۰: (فضاهای ℓ_p)

فرض کنید $(X, \|\ \|)$ یک فضای باناخ و $E \subseteq X$ و $۱ \leq p \leq \infty$ باشد. قرار می‌دهیم:

$$\ell_p(E) = \Big\{ (x_n)_{n=۱}^{\infty} : \sum_{n=۱}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty, x_n \in E \quad (\forall n \in N) \Big\}$$

برای هر $x = (x_n)_{n=۱}^{\infty} \in \ell_p(E)$ قرار دهید:

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{n=۱}^{\infty} \|x_n\|^p \Big)^{۱/p}$$

که در آن عدد $\|x\|_p$، p-نرم عنصر x نامیده می‌شود. ℓ_p با نرم $\|\ \|_p$ یک فضای باناخ است.

تعریف ۱.۱۱: (فضاهای محدب یکنواخت)

فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار، و U گوی بستهٔ واحد آن باشد. فضای X یک **فضای محدب یکنواخت** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $۲ \geq \varepsilon > ۰$ عدد $\delta > ۰$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in U$ با شرط $\|x - y\| > \varepsilon$ داشته باشیم:

$$\Big\| \frac{x + y}{۲} \Big\| < ۱ - \delta.$$

به عبارتی دیگر، فضای X محدب یکنواخت است هرگاه برای هر $0 < \varepsilon \leq 2$ عدد $\delta > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in U$ با شرط $\|\frac{x+y}{2}\| \geq 1 - \delta$ داشته باشیم:

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

به سادگی دیده می‌شود که فضای X محدب یکنواخت است هرگاه برای هر $x_0 \in X$ و هر $r > 0$ و هر $0 < \varepsilon \leq 2$ عدد $\delta > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in B(x_0, r)$ با شرط $\|\frac{x+y}{2} - x_0\| \geq r - \delta$ داشته باشیم:

$$\|x - y\| < \varepsilon.$$

یکی از خواص هندسی کرهٔ واحد در فضاهای محدب یکنواخت این است که:

اگر نقطهٔ وسط یک پاره‌خط که دو سر آن روی سطح کره قرار دارد به سطح کره نزدیک شود، آن گاه نقاط انتهایی پاره خط نیز بایستی به یکدیگر نزدیکتر شوند:

همچنان که می‌بینید شکل ۱ بیانگر کره در فضایی محدب یکنواخت است. شکل ۲ کره را در فضایی

که محدب یکنواخت نیست نشان می‌دهد.

<u>قضیه ۱.۱۲:</u> فرض کنید X یک فضای باناخ و U گوی بستهٔ واحد آن باشد. در این صورت فضای X محدب یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر دنبالهٔ (x_n) و هر دنبالهٔ (y_n) در X با شرطهای $\|x_n\|, \|y_n\| \leq ۱$ (برای هر n) و $\lim_{n\to\infty} \|\frac{x_n + y_n}{۲}\| = ۱$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = ۰.$$

<u>برهان:</u>

اثبات لزوم- فرض کنید $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد. حال عدد δی وابسته به این ε را که در تعریف تحدب یکنواخت آمده در نظر می‌گیریم. برای این $\delta > ۰$ عدد N چنان موجود است که:

$$۰ \leq ۱ - \|\frac{x_n + y_n}{۲}\| < \delta \qquad (\forall n \geq N)$$

$$\Rightarrow \|\frac{x_n + y_n}{۲}\| > ۱ - \delta \qquad (\forall n \geq N)$$

(توجه داریم که $۱ \leq \frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{۲} \leq \|\frac{x_n + y_n}{۲}\|$ و لذا $۰ \geq \|\frac{x_n + y_n}{۲}\| - ۱$ (برای هر n)).

حال چون عدد δ متناظر با عدد ε در تعریف تحدب یکنواخت است داریم:

$$\|x_n - y_n\| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq N)$$

بنابراین طبق تعریف حد داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = ۰$$

اثبات کفایت: فرض کنید $0 < \varepsilon \le 2$ و $x, y \in U$ باشند. در این صورت چون U بسته است دنباله‌های (x_n) و (y_n) در U چنان موجودند که $x_n \longrightarrow x$ و $y_n \longrightarrow y$.

حال اگر فرض کنیم $\lim_{n\to\infty} \|\frac{x_n + y_n}{2}\| = 1$، با توجه به فرض قضیه داریم $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ به عبارتی دیگر برای $\varepsilon > 0$ عدد N چنان موجود است که:

$$\|\frac{x_n + y_n}{2}\| > 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \|x_n - y_n\| < \varepsilon \quad (\forall n \ge N)$$

حال با حدگیری از طرفین داریم:

$$\|\frac{x + y}{2}\| > 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon.$$

تعریف 1.13: (فضاهای موضعاً محدب یکنواخت)

می‌گوییم فضای خطی نرمدار X موضعاً محدب یکنواخت است هرگاه برای هر $x \in X$ با شرط $\|x\| \le 1$ و برای هر $0 < \varepsilon \le 2$، عدد $\delta > 0$ چنان موجود باشد که برای هر $y \in X$ با شرطهای $\|y\| \le 1$ و $\|x - y\| > \varepsilon$ داشته باشیم:

$$\|\frac{x + y}{2}\| < 1 - \delta$$

قضیه 1.14: فضای باناخ X موضعاً محدب یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر x با شرط $\|x\| \le 1$ و برای هر دنبالهٔ (x_n) با شرط $\|x_n\| \le 1$ اگر $\lim_{n\to\infty} \|\frac{x_n + x}{2}\| = 1$ آنگاه داشته باشیم: