دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشکده علوم

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

برخی روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال فردهلم

استاد راهنما

دکتر ناصر آقازاده

استاد مشاور

دکتر محمد حسین ستاری

پژوهشگر

آزاده امیدی

شهریور ۱۳۹۰

تبریز، ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به او به پاس لطف و عنایات بی‌پایان و بی‌دریغش

تقدیم به آزاده‌ترین لاله سرخ تاریخ بشریت

تقدیم به کسانی که از آن‌ها تلاش برای بهتر بودن را آموختم:

جناب آقای دکتر ناصر آقازاده و جناب آقای دکتر مهرداد احمدزاده

تقدیم به آنان که با تمام وجود دوستشان دارم

به پدرم، غزل ناب هستیم، استوارترین کوه تاریخ بودنم، به رسم بوسیدن دستان باوفایش.

به مادرم، به ماه تابناک آسمان زندگیم که تلالو تابناکش همواره روشنی‌بخش شب‌های زندگیم بوده و هست.

لحظه لحظه نگرانی‌هایتان را در به ثمر رسیدنم سپاس می‌گویم و دستان پر محبتتان را می‌بوسم و خاک پایتان را سرمه‌ی چشمانم می‌نمایم.

و تقدیم به ستارگان درخشان آسمان زندگی‌ام، **خواهر و برادرهای عزیزتر از جانم** که افتخار وجودشان برایم از هر مدرک و مقامی ارزنده تر و بالاتر است.

قدردانی و تشکر...

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

به نام خداوند لوح و قلم   حقیقت نگار وجود و عدم

خدایی که دانندهی رازهاست   نخستین سرآغاز آغازهاست

به نام او که هیچ قلم و زبانی را یارای توصیف بزرگی و کرامتش نیست.

الهی، تو دوست میداری که من تو را دوست دارم، با آنکه بینیازی از من، پس چگونه دوست ندارم که تو مرا دوست داری با این همه احتیاج که به تو دارم. حمد و ثنا و سپاس و ستایش خالق هستیبخش را که بار دیگر توفیق اندوختن دانش و فرصت تحصیل و تحقیق را روزیم نمود. اینک که به فضل و لطف خداوند توفیق اتمام این رساله نصیبم شده است سزاوار است مراتب بندگی و عبودیت خویش را در پیشگاه ملکوتی خداوند اعلام و اقرار نمایم، امید است که شکرانهای بر لطف و رحمت بیکران خداوند باشد.

در اینجا بر خود واجب میدانم مراتب تشکر و قدردانی را از همه بزرگوارانی که مرا در انجام این تحقیق یاری و مساعدت نمودهاند، ابراز نمایم.

صمیمانهترین سپاسگذاریهای خویش را تقدیم میکنم به زحمات بیشائبه و دلسوزانهی استاد فرهیخته، گرانقدر و بزرگوارم جناب آقای دکتر ناصر آقازاده که در خلال اجرای این تحقیق همواره اینجانب را از رهنمودهای ارزنده و بیدریغ خود بهرهمند ساختند و مشوق بنده در کارهای علمی و پژوهشی بودهاند. از خداوند متعال برای ایشان آرزوی سلامتی و موفقیت مسالت دارم.

از جناب آقای دکتر محمدحسین ستاری که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر محمد ضارب نیا که زحمت مطالعه و داوری این رساله را برعهده داشتند، سپاسگزارم.

بر خود لازم میدانم از زحمات استاد گرانقدر و دلسوزم جناب آقای دکتر مهرداد احمدزاده که افتخار شاگردی در محضر علم و اخلاق ایشان را داشتهام و همواره راهنماییهای ارزنده ایشان راهگشای من بوده است، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. طول عمر و موفقیت روزافزونشان را از خداوند بزرگ خواهانم.

همچنین از جناب آقای دکتر اسمعیل عابدی و جناب آقای دکتر مجتبی رنجبر که همیشه پاسخگوی سوالات من بودهاند، کمال تشکر را دارم .

از پدر و مادر مهربان، صبور و فداکارم که پس از پروردگار مایه هستیام بودند، دستم را گرفتند و راه رفتن در این زندگی پرفراز و نشیب را آموختند و قلب پرمهرشان را خالصانه آشیانهام کردند، از صمیم قلب تشکر میکنم و آرزوی کامیابی، سلامتی و طول عمر برای ایشان از خداوند منان مسالت دارم. میدانم که هیچگاه نمیتوانم پاسخگوی حتی قطرهای از دریای محبت آنها باشم.

از خواهر و برادرهای مهربان و عزیزم که با یاری خویش راه را بر من هموار ساختهاند، بی نهایت سپاسگزارم.

از برادر گرامیام آقای منصور آقازاده و همه دوستان عزیزم صمیمانه تشکر مینمایم.

برای تو و خویش چشمانی آرزو می‌کنم

که چراغ‌ها و نشان‌ها را در ظلماتمان ببیند

گوشی که صداها و شناسه‌ها را

در بی‌هوشیمان بشنود.

برای تو و خویش روحی آرزو می‌کنم

که این همه را در خود گیرد و بپذیرد

و زبانی که در صداقت خود ما را از خاموشی خویش بیرون کشد

و بگذارد از آن چیزها که در بندمان کشیده است

سخن بگوییم.

چکیده

در بعضی از معادلات انتگرال، محاسبه جواب دقیق کار دشواری است، در چنین مواردی جواب تقریبی این معادلات را به دست می‌آوریم. به این منظور، ابتدا روش‌های عددی را روی معادلات انتگرالی که جواب دقیقشان را داریم اعمال می‌کنیم. اگر خطا کوچک باشد و جواب تقریبی به جواب دقیق نزدیک باشد، رویه‌های موردنظر روش‌های خوبی هستند، سپس همگرایی آن‌ها را ثابت می‌کنیم. بنابراین می‌توانیم از این روش‌ها برای به دست آوردن جواب تقریبی معادلات انتگرالی که مقدار دقیق جواب را نداریم، استفاده نماییم. در این پایان‌نامه از چند جمله‌ای‌های لاگر برای حل معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم در بازه $(0, +\infty)$ استفاده می‌کنیم.

فصل اول، شامل تعاریف اولیه می‌باشد. در فصل دوم، ابتدا فضاهایی از توابع پیوسته را معرفی می‌نماییم سپس به بررسی یک فرآیند درونیابی می‌پردازیم. در فصل سوم، روش‌های عددی برای حل معادلات انتگرال مورد نظر را شرح می‌دهیم، همچنین خطای این روش‌ها را برآورد می‌کنیم. چند مثال که نتایج نظری را تصدیق می‌نماید در فصل چهارم آورده شده است. در فصل پایانی این روش‌ها را روی دستگاه معادلات انتگرال اعمال می‌کنیم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال فردهلم، تابع وزن لاگر تعمیم یافته، درونیابی لاگرانژ، درونیابی نیستروم، فرمول انتگرال‌گیری گاوس، چند جمله‌ای‌های متعامد، برش، تخمین خطا

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ معادلات انتگرال

فرم کلی معادله‌ی انتگرال غیرخطی را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت.

$$h(t)x(t) - \lambda \int_a^b k(t,s,x(t))ds = f(s), \tag{۱.۱}$$

که در آن $h(t)$، $f(t)$ و $k(t,s,x(s))$ توابعی معلوم هستند. به $k(t,s,x(s))$ کرنل[۱] (هسته) معادله‌ی انتگرال می‌گویند و $\lambda \neq ۰$ عددی حقیقی یا مختلط می‌باشد. تابع $x(t)$ مجهول است و در حدود انتگرال b می‌تواند متغیر t یا عدد ثابت باشد و a نیز عددی حقیقی فرض می‌گردد. در حالتی که هسته بصورت زیر باشد معادله انتگرال (۱.۱) را خطی می‌نامند.

$$k(t,s,x(s)) = k(t,s)x(s).$$

۱.۱.۱ معادلات انتگرال فردهلم

در معادله انتگرال (۱.۱) اگر حدود انتگرال ثابت باشند به آن معادلات انتگرال فردهلم می‌گویند که بصورت زیر دسته بندی می‌شوند.

الف. اگر در معادله‌ی (۱.۱)، $h(t) = ۰$ باشد آن را معادلات انتگرال فردهلم نوع اول می‌نامند.

ب. اگر در معادله‌ی(۱.۱)، $h(t) = ۱$ باشد آن را معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم می‌نامند.

ج. اگر در معادله‌ی(۱.۱)، $f(s) = ۰$ و $h(t) = ۱$ باشد آن را معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم همگن می‌نامند.

[۱] kernel

۲.۱.۱ انواع هسته در معادلات انتگرال

(i) هسته‌ی $k(s,t)$ را جدایی‌پذیر[۲] گوییم، هرگاه توابع $a_i(s)$ و $b_i(t)$ موجود باشند بطوری‌که

$$k(s,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(s) b_i(t).$$

(ii) هسته‌ی $k(s,t)$ را متقارن[۳] گوییم هرگاه

$$k(s,t) = k^*(t,s),$$

که $*$ نشان‌دهنده مزدوج مختلط می‌باشد.

(iii) هسته‌ی $k(s,t)$ را پیچشی[۴] گوییم هرگاه

$$k(s,t) = k(s-t).$$

۲.۱ فضای خطی و عملگرها

فرض کنیم X فضای خطی (برداری) روی میدان حقیقی یا مختلط باشد که از این به بعد به آن فضای خطی می‌گوییم.

۱.۲.۱ تعریف نرم

فرض می‌کنیم X فضای خطی و تابع $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ به ازای هر $x,y \in X$ و هر α اسکالر (حقیقی یا مختلط) دارای خواص زیر باشد.

$$\begin{aligned}
\|x\| &\geq 0, \\
\|x\| &= 0 \to x = 0, \\
\|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\|, \\
\|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

[۲] separable

[۳] symmetric

[۴] convolution

در این صورت تابع فوق را نرم[۵] روی فضای خطی X و X را فضای خطی نرم‌دار[۶] می‌نامند.

۲.۲.۱ دنباله‌ی کشی

دنباله‌ی $\{x_n\}$ در فضای خطی نرم‌دار X را دنباله‌ی کشی می‌نامند هرگاه:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon);\ \forall n, m > N(\epsilon) \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

به عبارت دیگر $\lim \|x_n - x\| = 0$ وقتی‌که $n \to +\infty$ میل می‌کند.

۳.۲.۱ فضای کامل

فضای X را کامل می‌گوییم، هرگاه هر دنباله‌ی کشی در X به عنصری از X همگرا باشد.

۴.۲.۱ فضای باناخ

هر فضای نرم‌دار مانند X را که نسبت به متریك القایی به وسیله‌ی نرم، فضایی کامل باشد، یك فضای باناخ[۷] می‌نامیم. به عبارت دیگر X یك فضای باناخ است هرگاه به ازای هر دنباله کشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد بطوری‌که $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. بدین‌سان، فضاهای باناخ مثال‌های خاصی از فضاهای متریک کامل هستند. پس فضای X را فضای باناخ می‌نامیم، هرگاه X یک فضای نرم‌دار و یک فضای کامل (تام) باشد.

۵.۲.۱ فضای $C[a, b]$

مجموعه تمام توابع با مقادیر حقیقی $x, y, \ldots$ و متغیر حقیقی مستقل t که روی بازه بسته $J = [a, b]$ تعریف شده و پیوسته باشند را با $C[a, b]$ نشان می‌دهیم. متریک تعریف شده در این فضا بصورت

$$d(x, y) = \max_{t\in J} |x(t) - y(t)|$$

می‌باشد. این فضا با نرم

$$\|x\| = \max_{t\in J} |x(t)|$$

فضای باناخ است [۳].

[۵] norm

[۶] normed linear space

[۷] Banach Space

۶.۲.۱ فضای $L^2[a,b]$

فضای همه توابع پیوسته $x(t)$ روی $[a,b]$ با مقدار حقیقی که $\int_a^b (x(t))^2 dt$ متناهی باشد، فضای نرم‌دار با نرم

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

را تشکیل می‌دهند که آن را فضای $L^2[a,b]$ گوییم. این فضا کامل نیست [۳].

۷.۲.۱ عملگر خطی

عملگر T از فضای خطی Xدر فضای خطی Y را یك عملگر خطی می‌نامند هرگاه برای اعضای x_1, x_2 از X و اسکالرهای α, β از R(یا C) داشته باشیم:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2).$$

۸.۲.۱ عملگر پیوسته

عملگر T از $U \subset X$، به عنوان زیر مجموعه‌ای از فضای خطی نرم‌دار X به فضای خطی نرم‌دار Y در $u_0 \in U$ پیوسته است هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \delta > 0; \quad \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon.$$

عملگر T را پیوسته گویند هرگاه در تمام نقاط U پیوسته باشد.

قضیه ۱.۱. *عملگر خطیT، پیوسته است اگر و فقط اگر در یك نقطه از U پیوسته باشد.*

برهان. [۳] □

۹.۲.۱ عملگر خطی کران‌دار

عملگر خطی $T : X \to Y$ که در آن X و Y فضاهای نرم‌دارند، کران‌دار است اگر

$$\exists c > 0; \quad \forall x \in X, \quad \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

نرم عملگر خطی و کران‌دار بصورت زیر می‌باشد.

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

قضیه ۲.۱. *اگر T عملگر خطی از فضای خطی و نرم‌دار X به فضای خطی و نرم‌دار Y باشد، T عملگر خطی کران‌دار است اگر و فقط اگر هر یك از شرط‌های زیر برقرار باشد.*

۱. $\exists c > 0;\ \forall x \in X,\ \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$.

۲. $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$.

۳. *اگر U زیر مجموعه کران‌دار از X باشد آن‌گاه $T(u)$ زیرمجموعه‌ای کران‌دار از Y باشد.*

۴. *T عملگر خطی پیوسته است.*

برهان. برای اثبات به مراجع [۲۵] و [۳۱] مراجعه شود. □

قضیه ۳.۱. *اگر عملگر خطی T از فضای خطی و نرم‌دار X به فضای خطی و نرم‌دار Y باشد و فرض کنیم دو شرط زیر برقرار باشند:*

۱. $\forall x \neq 0,\ \|Tx\| \leq c\|x\|$.

۲. $\exists x_0;\ \|Tx_0\| = c\|x_0\|$.

آن‌گاه $\|T\| = c$.

برهان. به [۱] مراجعه شود. □

۱۰.۲.۱ عملگر خطی فشرده

فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند، عملگر خطی $T : X \to Y$ را فشرده[۸] نامند، هرگاه هر زیر مجموعه کران‌دار از X را به مجموعه‌ای با بستار فشرده در Y تصویر کند.

برهان. [۳]. □

قضیه ۴.۱. *عملگر خطی T از فضای خطی نرم‌دار X در فضای خطی نرم‌دار Y را یك عملگر فشرده گویند، هرگاه برای هر دنباله‌ی کران‌دار $\{x_n\}$ در X، دنباله‌ی $\{Tx_n\}$ دارای زیر دنباله‌ی همگرا در Y باشد.*

برهان. [۳] □

قضیه ۵.۱. *هر عملگر خطی فشرده، کران‌دار است.*

برهان. [۲۵] □

قضیه ۶.۱. *فرض کنید X و Y فضاهای نرم‌دار باشند و $T : X \to Y$ عملگر خطی باشد. آن‌گاه:*

(a) *اگر T کران‌دار باشد و $\dim T(X) < \infty$، عملگر T فشرده خواهد بود.*

(b) *اگر $\dim X < \infty$، عملگر T فشرده است.*

برهان. [۳]. □

---

[۸] Compact Operator

۱۱.۲.۱ عملگر همانی

عملگر همانی[۹] $I_X : X \to X$ برای تمام x بصورت $I_X x = x$ تعریف می‌شود. همچنین I را به جای I_X به‌کار می‌بریم، بنابراین $Ix = x$.

۱۲.۲.۱ بهترین تقریب

فرض کنید U یك زیر فضای خطی نرم‌دار X باشد و $x \in X$، یك عضو $u^* \in U$ را بهترین تقریب[۱۰] نسبت به U نامند، اگر

$$\|x - u^*\| = \inf_{x \in U} \|x - u\|$$

u^* کوچکترین فاصله را تا x دارد.

قضیه ۷.۱. *فرض کنید $U \subset X$ زیر فضایی با بعد متناهی از فضای خطی نرم‌دار X باشد. آن‌گاه برای هر عنصر $x \in X$ بهترین تقریب نسبت به U وجود دارد.*

برهان. برای اثبات به [۲۵] مراجعه شود. □

۱۳.۲.۱ نماد Oی بزرگ

فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد بطوری‌که $\lim_{x \to 0} f(x) = l$ و $g(x)$ تابع دیگری باشد به طوری‌که به ازای kی مثبتی و برای همه‌ی مقادیر به قدر کافی کوچك x که $|x| > 0$ داشته باشیم:

$$\frac{|f(x) - l|}{|g(x)|} \leq k$$

در این صورت می‌نویسیم $f(x) - l = O(g(x))$ و گفته می‌شود که $f(x) - l$ از مرتبه‌ی $g(x)$ است. در حالت خاص که $l = 0$ و $g(x) = x^p$ می‌نویسیم $f(x) = O(x^p)$ و گوییم $f(x)$ از مرتبه x^p است.

۱۴.۲.۱ نماد oی کوچك

فرض کنید f تابعی باشد که در یك همسایگی صفر تعریف شده باشد، وقتی $x \to 0$ می‌نویسیم $f(x) = o(x^n)$ هرگاه:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x)|}{|x|^n} = 0$$

یعنی وقتی $x \to 0$، $|f(x)|$ سریع‌تر از $|x|^n$ به سمت صفر میل می‌کند.

---

[۹] Identity operator

[۱۰] Best Approximation

۳.۱ درونیابی

یک خانواده از توابع یک متغیره $\Phi(x; a_0, a_1, \ldots, a_n)$ با $n+1$ پارامتر $a_n, \ldots, a_1, a_0$ را در نظر می‌گیریم که مقدار آن‌ها یک تابع از این خانواده را مشخص می‌کند. مسئله درونیابی Φ عبارتست از تعیین پارامترهای a_i بطوری‌که به ازای $n+1$ زوج (x_i, f_i) که $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ حقیقی یا مختلط با $x_i \neq x_k$، $i \neq k$،

$$\Phi(x_i; a_0, \ldots, a_n) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

برقرار باشند. زوج‌های (x_i, f_i) را نقاط حامی[11]، x_i را طول‌های حامی و مقادیر f_i را عرض‌های حامی می‌نامند. گاهی مقادیر مشتق Φ نیز معلوم هستند.

اگر Φ به طور خطی به $a_n, \ldots, a_1, a_0$ وابسته باشند، مسئله درونیابی فوق را خطی گویند.

$$\Phi(x; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \equiv a_0\Phi_0(x) + a_1\Phi(x) + \ldots + a_n\Phi_n(x)$$

این دسته درونیابی شامل درونیابی چند جمله‌ای‌ها

$$\Phi(x; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

و درونیابی مثلثاتی

$$\Phi(x; a_0, a_2, \ldots, a_n) = a_0 + a_1 e^{ix} + a_2 e^{2ix} + \ldots + a_n e^{nix} \quad (i^2 = -1)$$

می‌باشد.

البته درونیابی چند جمله‌ای‌ها به عنوان پایه‌ای برای چندین روش انتگرال‌گیری عددی حائز اهمیت هست. درونیابی مثلثاتی به طور وسیع برای آنالیز فوریه به طور عددی مربوط به سری زمانی و به طور کلی برای دوره تناوب استفاده می‌شوند.

دسته درونیابی‌های خطی شامل درونیابی اسپلاین نیز می‌شود. در حالت خاص، در اسپلاین درجه سوم، فرض می‌شود که توابع Φ به ازای هر x، متعلق به $[x_0, x_n]$ دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته‌اند و در هر بازه $[x_i, x_{i+1}]$ بر یک چند جمله‌ای درجه سوم منطبق می‌شود که $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ معلومند.

دو دسته درونیابی دیگر حائز اهمیت هستند، درونیابی منطق و درونیابی نمایی بصورت‌های

$$\Phi(x; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m) \equiv \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$$

[11] Support points

و

$$\Phi(x; a_\circ, a_۱, a_۲, \ldots, \lambda_\circ, \lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_n) \equiv a_\circ e^{\lambda_\circ x} + a_۱ e^{\lambda_۱ x} + \ldots + a_n e^{\lambda_n x}$$

درونیابی منطق در روند بهترین تقریب یک تابع معلوم نقش مهمی را ایفا می‌کند و درونیابی نمایی، برای نمونه، در آنالیز تجزیه رادیواکتیو به‌کار می‌رود.

قضیه ۸.۱. *به ازای $n+۱$ نقطه حامی دلخواه (x_i, f_i) که $i = \circ, ۱, ۲, \ldots, n$ به ازای $i \neq k$، $x_i \neq x_k$، یک چند جمله‌ای منحصر به فرد $P \in \Pi_n$ موجود است بطوری‌که:*

$$P(x_i) = f_i, \quad i = \circ, ۱, ۲, \ldots, n$$

نکته ۹.۱. *هرگاه $\{l_i(x)\}_{i=\circ}^n$ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ مبتنی بر نقاط متمایز $x_\circ, x_۱, \ldots, x_n$ باشند، داریم*

$$l_\circ(x) + l_۱(x) + \ldots + l_n(x) = \sum_{i=\circ}^{n} l_i(x) = ۱$$

۱.۳.۱ درونیابی نیستروم

معادله انتگرال

$$\lambda x_n(t) - \int_D k(t,s) x_n(s) ds = y(t), \quad t \in D$$

را در نظر می‌گیریم. به طور مثال اگر D بازه $[\circ, ۱]$ باشد، آن‌را بصورت $\circ, \circ/۱, \circ/۲, \ldots, \circ/۹, ۱$ افراز می‌کنیم. با استفاده از قانون انتگرال‌گیری گاوس، انتگرال را تخمین می‌زنیم:

$$\lambda x_n(t) - \sum_{j=۱}^{n} w_j k(t, t_j) x_n(t_j) = y(t)$$

که $x_n(t_j)$ و w_jها مجهول هستند. سپس $[\circ, ۱]$ را روی محور t مانند محور s افراز می‌کنیم.

$$\lambda x_n(t_i) - \sum_{j=۱}^{n} w_j k(t_i, t_j) x_n(t_j) = y(t_i) \qquad (۲.۱)$$

برای به دست آوردن w_jها از قاعده انتگرال‌گیری نیوتن کاتس داریم

$$\int_\circ^۱ x_n(t) dt = \sum_{j=۱}^{n} w_j x_n(t_j)$$

با قرار دادن توابع $۱, x, x^۲, \ldots, x^n$ به جای $x_n(t)$، w_jها به دست می‌آیند. سپس مقادیر w_jها را در معادله (۲.۱) قرار می‌دهیم، حال یك دستگاه n معادله و n مجهول داریم و مقادیر x_n در t_jها به دست می‌آید.

مثال ۱.۱۰. معادله انتگرال

$$g(s) = s + \lambda \int_0^1 (st^2 + s^2 t) g(t) dt$$

را در نظر بگیرید، که هسته آن

$$k(s,t) = st^2 + s^2 t$$

می‌باشد، جواب دقیق معادله بصورت

$$g(s) = \frac{180s + 80s^2}{119}$$

است. می‌خواهیم جواب این معادله را به روش نیستروم به دست آوریم. $[0,1]$ را بصورت $0, 0.1, \ldots, 0.9, 1$ افراز می‌کنیم

$$\int_0^1 g(t)dt = \sum_{j=1}^{n} w_j g(t_j),$$

$$\int_0^1 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j \rightarrow w_2 + \ldots + w_{11} = 1,$$

$$\int_0^1 t dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j \rightarrow (0.1) w_2 + \ldots + (1) w_{11} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 t^2 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^2 \rightarrow (0.1)^2 w_2 + \ldots + (1)^2 w_{11} = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 t^3 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^3 \rightarrow (0.1)^3 w_2 + \ldots + (1)^3 w_{11} = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 t^4 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^4 \rightarrow (0.1)^4 w_2 + \ldots + (1)^4 w_{11} = \frac{1}{5},$$

$$\int_0^1 t^5 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^5 \rightarrow (0.1)^5 w_2 + \ldots + (1)^5 w_{11} = \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 t^6 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^6 \rightarrow (0.1)^6 w_2 + \ldots + (1)^6 w_{11} = \frac{1}{7},$$

$$\int_0^1 t^7 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^7 \rightarrow (0.1)^7 w_2 + \ldots + (1)^7 w_{11} = \frac{1}{8},$$

$$\int_0^1 t^8 dt = \sum_{j=1}^{11} w_j t_j^8 \rightarrow (0.1)^8 w_2 + \ldots + (1)^8 w_{11} = \frac{1}{9},$$

$$\int_{۰}^{۱} t^{۹}dt = \sum_{j=۱}^{۱۱} w_j t_j^{۹} \to (۰/۱)^{۹}w_{۲} + \ldots + (۱)^{۹}w_{۱۱} = \frac{۱}{۱۰},$$

$$\int_{۰}^{۱} t^{۱۰}dt = \sum_{j=۱}^{۱۱} w_j t_j^{۱۰} \to (۰/۱)^{۱۰}w_{۲} + \ldots + (۱)^{۱۰}w_{۱۱} = \frac{۱}{۱۱},$$

جواب عددی معادله انتگرال با استفاده از روش نیستروم به صورت زیر به دست می‌باشد

$$g(s) = s + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j k(s, t_j) g(t_j),$$

$$g(s) = s + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j (s t_j^{۲} + s^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(t_i) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j (t_i t_j^{۲} + t_i^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰) = ۰ + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j (۰) g(t_j),$$

$$g(۰/۱) = ۰/۱ + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۱) t_j^{۲} + (۰/۱)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۲) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۲) t_j^{۲} + (۰/۲)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۳) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۳) t_j^{۲} + (۰/۳)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۴) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۴) t_j^{۲} + (۰/۴)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۵) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۵) t_j^{۲} + (۰/۵)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۶) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۶) t_j^{۲} + (۰/۶)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۷) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۷) t_j^{۲} + (۰/۷)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(۰/۸) = t_i + \lambda \sum_{j=۱}^{n} w_j ((۰/۸) t_j^{۲} + (۰/۸)^{۲} t_j) g(t_j),$$

$$g(0.9) = t_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j((0.9)t_j^2 + (0.9)^2 t_j)g(t_j),$$

$$g(1) = t_i + \lambda \sum_{j=1}^{n} w_j((1)t_j^2 + (1)^2 t_j)g(t_j),$$

$$g(0) = 0,$$

با جای‌گذاری نقاط گره‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} g(0.1) \quad = \quad & 0.1 + (0.000355072)g(0.1) + (-0.000486262)g(0.2) + (0.00545935)g(0.3) \\ & + (-0.0087031)g(0.4) + (0.021413)g(0.5) + (-0.0182765)g(0.6) \\ & + (0.025477)g(0.7) + (-0.00583514)g(0.8) + (0.0159782)g(0.9) \\ & + (0.00295175)g(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0.2) \quad = \quad & 0.2 + (0.00106522)g(0.1) + (-0.0012967)g(0.2) + (0.0136484)g(0.3) \\ & + (-0.0208874)g(0.4) + (0.0499636)g(0.5) + (-0.0417749)g(0.6) \\ & + (0.0573232)g(0.7) + (-0.012967)g(0.8) + (0.0351521)g(0.9) \\ & + (0.00644018)g(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0.3) \quad = \quad & 0.3 + (0.00213043)g(0.1) + (-0.00243131)g(0.2) + (0.0245671)g(0.3) \\ & + (-0.036553)g(0.4) + (0.0856518)g(0.5) + (-0.0704951)g(0.6) \\ & + (0.0955387)g(0.7) + (-0.0213955)g(0.8) + (0.0575217)g(0.9) \\ & + (0.0104653)g(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0.4) \quad = \quad & 0.4 + (0.00355072)g(0.1) + (-0.00389009)g(0.2) + (0.0382155)g(0.3) \\ & + (-0.0556998)g(0.4) + (0.128478)g(0.5) + (-0.104437)g(0.6) \\ & + (0.140123)g(0.7) + (-0.0311207)g(0.8) + (0.0830868)g(0.9) \\ & + (0.0150271)g(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(۰/۵) \quad = \quad & ۰/۵ + (۰/۰۰۵۳۲۶۰۸)g(۰/۱) + (-۰/۰۰۵۶۷۳۰۵)g(۰/۲) + (۰/۰۵۴۵۹۳۵)g(۰/۳) \\ & +(-۰/۰۷۸۳۲۷۹)g(۰/۴) + (۰/۱۷۸۴۴۱)g(۰/۵) + (-۰/۱۴۳۶۰۱)g(۰/۶) \\ & +(۰/۱۹۱۰۷۷)g(۰/۷) + (-۰/۰۴۲۱۴۲۷)g(۰/۸) + (۰/۱۱۱۸۴۸)g(۰/۹) \\ & +(۰/۰۲۰۱۲۵۶)g(۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(۰/۶) \quad = \quad & ۰/۶ + (۰/۰۰۷۴۵۶۵۱)g(۰/۱) + (-۰/۰۰۷۷۸۰۱۹)g(۰/۲) + (۰/۰۷۳۷۰۱۳)g(۰/۳) \\ & +(-۰/۱۰۴۴۳۷)g(۰/۴) + (۰/۲۳۵۵۴۲)g(۰/۵) + (-۰/۱۸۷۹۸۷)g(۰/۶) \\ & +(۰/۲۴۸۴۰۱)g(۰/۷) + (-۰/۰۵۴۴۶۱۳)g(۰/۸) + (۰/۱۴۳۸۰۴)g(۰/۹) \\ & +(۰/۰۲۵۷۶۰۷)g(۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(۰/۷) \quad = \quad & ۰/۷ + (۰/۰۰۹۹۴۲۰۲)g(۰/۱) + (-۰/۰۱۰۲۱۱۵)g(۰/۲) + (۰/۰۹۵۵۳۸۷)g(۰/۳) \\ & +(-۰/۱۳۴۰۲۸)g(۰/۴) + (۰/۲۹۹۷۸۱)g(۰/۵) + (-۰/۲۳۷۵۹۵)g(۰/۶) \\ & +(۰/۳۱۲۰۹۳)g(۰/۷) + (-۰/۰۶۸۰۷۶۶)g(۰/۸) + (۰/۱۷۸۹۵۶)g(۰/۹) \\ & +(۰/۰۳۱۹۳۲۶)g(۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(۰/۸) \quad = \quad & ۰/۸ + (۰/۰۱۲۷۸۲۶)g(۰/۱) + (-۰/۰۱۲۹۶۷)g(۰/۲) + (۰/۱۲۰۱۰۶)g(۰/۳) \\ & +(-۰/۱۶۷۱)g(۰/۴) + (۰/۳۷۱۱۵۸)g(۰/۵) + (-۰/۲۹۲۴۲۴)g(۰/۶) \\ & +(۰/۳۸۲۱۵۵)g(۰/۷) + (-۰/۰۸۲۹۸۸۶)g(۰/۸) + (۰/۲۱۷۳۰۴)g(۰/۹) \\ & +(۰/۰۳۸۶۴۱۱)g(۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(۰/۹) \quad = \quad & ۰/۹ + (۰/۰۱۵۹۷۸۲)g(۰/۱) + (-۰/۰۱۶۰۴۶۶)g(۰/۲) + (۰/۱۴۷۴۰۳)g(۰/۳) \\ & +(-۰/۲۰۳۶۵۳)g(۰/۴) + (۰/۴۴۹۶۷۲)g(۰/۵) + (-۰/۳۵۲۴۷۶)g(۰/۶) \\ & +(۰/۴۵۸۵۸۶)g(۰/۷) + (-۰/۰۹۹۱۹۷۴)g(۰/۸) + (۰/۲۵۸۸۴۷)g(۰/۹) \\ & +(۰/۰۴۵۸۸۶۳)g(۱), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(۱) \quad = \quad & ۱ + (۰/۰۱۹۵۲۹)g(۰/۱) + (-۰/۰۱۹۴۵۰۵)g(۰/۲) + (۰/۱۷۷۴۲۹)g(۰/۳) \\ & +(-۰/۲۴۳۶۸۷)g(۰/۴) + (۰/۵۳۵۳۲۴)g(۰/۵) + (-۰/۴۱۷۷۴۹)g(۰/۶) \end{aligned}$$