دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ی ریاضی محض (گرایش جبر)

فضای زاریسکی مدول ها

به کوشش:

مرضیه بیگی خرمایی

استاد راهنما:

دکتر نمازی

مهرماه۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب مرضیه بیگی خرمایی (۸۶۰۲۵۳) دانشجوی رشته ریاضی گرایش جبر دانشکده علوم اظهار می کنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار ندهم. کلیه حقوق این اثر مطابق با آئین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: مرضیه بیگی خرمایی

تاریخ و امضا:

به نام خدا

فضای زاریسکی مدول ها

به کوشش:

مرضیه بیگی خرمایی

پایان نامه:

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

ریاضی محض (گرایش جبر)

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه:.........عالی....................

دکتر شهره نمازی، استادیار بخش ریاضی (رییس کمیته)...............................

دکتر حبیب شریف، استاد بخش ریاضی..

دکتر عبدالرسول عزیزی، دانشیار بخش ریاضی..

مهرماه ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

سپاسگزاری

اکنون که به یاری خداوند متعال این مرحله از تحصیل خود را نیز به اتمام رسانده ام، بر خود واجب می دانم که از زحمات استاد گرامی، خانم دکتر نمازی که همواره با صبر و حوصله راهنما و مشوق من بوده اند تشکر نمایم. همچنین از اساتید بزرگوار، آقای دکتر شریف و آقای دکتر عزیزی و نماینده محترم تحصیلات تکمیلی آقای دکتر امینی کمال تشکر را دارم.

چکیده

فضای زاریسکی مدول ها

به کوشش

مرضیه بیگی خرمایی

در این پایان نامه ثابت خواهد شد که اگر M و M' مدول هایی روی یک حلقه ی دلخواه R باشند، آنگاه فضاهای زاریسکی $\xi(M)$ و $\xi(M')$ به عنوان نیم مدول هایی برروی نیم حلقه ی زاریسکی $S(R)$، یکریختند اگر و تنها اگر R −شبکه های $RAD(M)$ و $RAD(M')$ یکریخت باشند. در این حالت نشان داده می شود که اگرچه لزومی ندارد مدول های M و M' یکریخت باشند، اما تعدادی خواص مشترک دارند.

در ادامه ثابت می شود که برای مدول M برروی یک حلقه ی جابجایی R، فضای زاریسکی $\xi(M)$ دارای یک پایه ی تفریقی می باشد. همچنین پایه ی تفریقی تحت یکریختی $S(R)$ −نیم مدولی حفظ می شود ونشان داده می شود که هرگاه N یک جمعوند مستقیم از مدول رادیکال متناهیا تولیدشده ی M و L زیرمدولی از M باشد که $radL = N$، داریم $L = N$.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-۱ مقدمه ۲

۱-۲ اهداف کلی پایان نامه.......... ۳

۱-۳ قضایا و تعاریف مقدماتی.......... ۵

فصل دوم: فضای زاریسکی مدول ها

۲-۱ خواص رادیکال یک زیرمدول.......... ۱۷

۲-۲ فضاهای زاریسکی.......... ۳۱

۲-۳ مثالی از فضاهای زاریسکی یکریخت دو مدول ساده ی غیر یکریخت....... ۳۵

۲-۴ مدول های با فضاهای زاریسکی یکریخت.......... ۳۹

فصل سوم: پایه های تفریقی فضاهای زاریسکی

۳-۱ زیرفضاهای تفریقی.......... ۵۲

۳-۲ پایه های تفریقی.......... ۶۳

۳-۳ $S(R)$ –همریختی ها.......... ۶۷

۳-۴ تجزیه های جمع مستقیم.......... ۷۱

واژه نامه فارسی- انگلیسی.......... ۷۷

منابع.. ۷۹

فصل۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱-تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل پس از مقدمه، اهداف کلی پایان نامه آورده شده است. در پایان فصل اول تعاریف، نمادها و قضایایی که در فصل های بعدی کاربرد دارند، ذکر شده اند.

۱-۱ مقدمه

یک نیم حلقه ی $(S,+,.)$، یک مجموعه ی ناتهی S است که $(S,+)$ یک نیم گروه جابجایی با صفر 0_S و $(S,.)$ یک نیم گروه با عضو همانی 1_S است و قانون توزیع پذیری مشابه حلقه ها برقرار است و برای هر $a \in S$، $a0_S = 0_S = 0_S a$. همچنین M یک $S-$نیم مدول است هرگاه $(M,+)$ یک نیم گروه جابجایی با صفر 0_M باشد و S بر M عمل کند همان گونه که یک حلقه روی یک مدول چپ یکانی عمل می کند. مثال ها و خواص نیم حلقه ها و نیم مدول ها و همریختی های بین آنها در [۲]، آورده شده است.

در این پایان نامه هر حلقه، شرکت پذیر و یکدار و هر مدولی یکانی است. زیرمدول محض K از M را یک زیرمدول اول گویند، هرگاه برای $r \in R$ و $m \in M$، $rRm \subseteq K$ نتیجه دهد

$m \in K$ یا $rM \subseteq K$. در سال های اخیر کارهای بسیاری بر روی زیرمدول های اول انجام شده است، به عنوان مثال در [۴] و [۶] و [۷].

برای زیرمدول N از مدول M واریته ی $V(N)$ مجموعه ی تمام زیرمدول های اول M شامل N است و $\xi(M)$ مجموعه ی تمام $V(N)$ها است جایی که N یک زیرمدول M است. در ادامه جمع و ضربی بر روی $\xi(M)$ قرار خواهیم داد و آن را فضای زاریسکی نامیم و برخی خواص آن را بررسی می کنیم.

فرض کنید M یک مدول و N زیرمدولی از M باشد $radN$ اشتراک تمام زیرمدول های اول M شامل N است. هرگاه $radN = N$ گوییم N یک زیرمدول رادیکال M است. مدول M را زمانی رادیکال گوییم که زیرمدول صفر یک زیرمدول رادیکال باشد. مجموعه ی تمام زیر مدول های رادیکال M را با $RAD(M)$ نشان می دهیم و برخی خواص آن را بررسی می کنیم.

۱-۲ اهداف کلی پایان نامه

بخش اعظم این پایان نامه برگرفته از مراجع [۸] و [۱۴]، می باشد. در فصل اول تعاریف و قضایایی که در فصل های بعد کاربرد دارند، بیان شده اند.

در فصل دوم به معرفی فضاهای زاریسکی پرداخته و برخی از ویژگی های آنها را مورد بررسی قرار می دهیم. ثابت می کنیم که اگر M و M' دو $R-$مدول باشند، آنگاه $S(R)-$نیم مدول های $\xi(M)$ و $\xi(M')$ یکریختند اگر و تنها اگر $R-$شبکه های $RAD(M)$ و

$RAD(M')$ یکریخت باشند. در ادامه مثالی آورده می شود که نشان می دهد مدول های ساده ی غیر یکریختی بر یک حلقه ی ساده موجودند به طوری که فضای زاریسکی آنها یکریخت است. همچنین ثابت می کنیم که برای هر $R-$مدول M یک $S(R)-$یکریختی بین $\xi(M)$ و $\xi(\frac{M}{rad0})$ وجود دارد.

در انتهای فصل خواهیم دید که در حالتی که R یک PID و M و M'، $R-$مدولهایی متناهیا تولید شده هستند، $S(R)-$یکریخت بودن $\xi(M)$ و $\xi(M')$ معادل با یکریخت بودن $\frac{M}{rad0}$ و $\frac{M'}{rad0'}$ است.

در فصل سوم ابتدا زیرفضای تفریقی را برای $\xi(M)$ تعریف می کنیم جایی که M یک $R-$مدول است. همچنین اگر Δ یک زیر مجموعه ی $\xi(M)$ باشد، آنگاه کوچکترین زیر فضای تفریقی شامل Δ را معرفی کرده و با $G(\Delta)$ نشان می دهیم. در ادامه زیرنیم مدول های اول فضای زاریسکی $\xi(M)$ را تعریف کرده و برخی خواص آنها را بررسی می کنیم.

در بخش دوم فصل سه، مجموعه ی مولد مستقل خطی تفریقی را تعریف کرده و می بینیم که $\Delta=\{V(N_1),...,V(N_n)\}$ یک مجموعه مولد تفریقی $\xi(M)$ است اگر و تنها اگر $rad(\sum_{i=1}^{n}N_i)=M$. همچنین نشان داده ایم Δ یک زیرمجموعه ی مستقل خطی تفریقی $\xi(M)$ است اگر و تنها اگر $V(0)\notin\Delta$ و $radN_i\bigcap rad(\sum_{j\neq i}N_j)=rad0$، برای هر $1\leq i\leq n$. در انتهای بخش پایه ی تفریقی برای $\xi(M)$ را تعریف خواهیم کرد.

در بخش سه، ثابت می کنیم که مجموعه مولد مستقل خطی تفریقی و همچنین پایه ی تفریقی تحت $S(R)-$یکریختی ها منتقل می شوند. در انتهای فصل ثابت می کنیم که هر جمعوند مستقیم از یک مدول رادیکال M یک زیرمدول رادیکال M است و نشان می دهیم

که هر مدول متناهیا تولید شده دارای یک پایه ی تفریقی است. زمانی که R یک دامنه ی صحیح و M یک $R-$مدول آزاد از رتبه ی n باشد، $\xi(M)$ پایه ی تفریقی n عضوی دارد.

۱-۳ قضایا و تعاریف مقدماتی:

تعریف۱-۳-۱: فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. زیرمدول محض K از M را اول گویند اگر برای هر $r \in R$ و $m \in M$، $rRm \subseteq K$ نتیجه دهد $m \in K$ یا $rM \subseteq K$.

لم۱-۳-۲: فرض کنید M یک $R-$مدول و K یک زیرمدول محض Mباشد. در این صورت موارد زیر معادلند:

۱) K یک زیرمدول اول M است.

۲) برای هر ایده ال I از R و هر زیرمدول N از M، $IN \subseteq K$ نتیجه دهد $N \subseteq K$ یا $IM \subseteq K$.

۳) برای هر $r \in R$ و هر زیرمدول Nاز M، $rN \subseteq K$ نتیجه دهد $N \subseteq K$ یا $rM \subseteq K$.

اثبات: ۱←۲) فرض کنید K یک زیرمدول اول M باشد و $I \lhd R$ و N زیرمدول دلخواه M باشد و $IN \subseteq K$ و $N \not\subseteq K$. نشان می دهیم $IM \subseteq K$. چون $N \not\subseteq K$، $x \in N$ وجود دارد به طوری که $x \notin K$. اگر $a \in I$ پس $aRx \subseteq IN \subseteq K$ و چون K زیرمدول اول M است و $x \notin K$ بنابراین $aM \subseteq K$. پس $IM \subseteq K$.

۲←۳) ایده ال $I = RrR$ را در نظر بگیرید، نتیجه روشن است.

$1 \to 3$) فرض کنید $r \in R$ و $m \in M$ و $rRm \subseteq K$، پس طبق فرض $Rm \subseteq K$ یا $rM \subseteq K$ که این نتیجه می دهد $m \in K$ یا $rM \subseteq K$. ■

لم۱-۳-۳: فرض کنید K زیرمدول اول M باشد و $P = (K:M)$. در این صورت P یک ایده ال اول R است.

اثبات: فرض کنید I و J ایده ال های R باشند و $IJ \subseteq P$. داریم $(IJ)M \subseteq K$ پس $I(JM) \subseteq K$ و چون K زیرمدول اول M است، $IM \subseteq K$ یا $JM \subseteq K$ که نتیجه می دهد $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$. ■

در لم قبل زیرمدول K را یک زیرمدول $P-$اول M گویند. مجموعه ی تمام زیرمدول های اول M را با $spec(M)$ و تمام زیرمدول های $P-$اول M را با $spec_P(M)$ نشان می دهند.

تعریف۱-۳-۴: فرض کنید S مجموعه ای ناتهی باشد، به طوری که $(S,+)$ یک نیم گروه جابجایی با صفر 0_S و $(S,.)$ یک نیم گروه با عضو همانی 1_S باشد و قانون توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع نیز برقرار بماند و برای هر $a \in S$ داشته باشیم، $a0_S = 0_S = 0_S a$. در این صورت $(S,+,.)$ یک نیم حلقه نامیده می شود.

تعریف۱-۳-۵: فرض کنید S یک نیم حلقه باشد. یک $S-$نیم مدول چپ، یک نیم گروه جابجایی $(M,+)$ با صفر 0_M است به طوری که S بر M عمل می کند(به همان شکلی که حلقه بر مدول عمل می کند). و برای هر $a \in S$ و $m \in M$، $a0_M = 0_M = 0_S m$.

فرض کنید S یک نیم حلقه باشد و M و M' دو $S-$نیم مدول باشند. نگاشت $\phi: M \to M'$ را یک $S-$همریختی گویند، اگر برای هر x و y در M و هر $a \in S$ داشته باشیم:

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \quad \text{و} \quad \phi(ax) = a\phi(x).$$

تعریف۱-۳-۶: فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده ال دو طرفه ی R باشد. مجموعه ی تمام ایده ال های اول R شامل I که با $V(I)$ نشان می دهیم را واریته ی I گویند.

به وضوح داریم، $V(0) = spec(R)$ و $V(R) = \phi$. مجموعه ی تمام واریته های ایده ال های R را با $S(R)$ نمایش می دهند. برای ایده ال های دلخواه I و J از R جمع و ضرب زیر را بر $S(R)$ تعریف می کنیم:

$$V(I)+V(J) = V(I+J) = V(I)\bigcap V(J) \quad \text{و} \quad V(I)V(J) = V(IJ) = V(I\bigcap J).$$

به راحتی می توان دید که با این جمع و ضرب $S(R)$ یک نیم حلقه است زیرا $(S(R),+)$ یک نیم گروه جابجایی با صفر $V(0)$ و $(S(R),.)$ یک نیم گروه با عضو همانی $V(R)$ است. $S(R)$ را نیم حلقه ی زاریسکی R نامند.

لم۱-۳-۷: فرض کنید R یک حلقه باشد. موارد زیر برقرارند.

۱) برای هر گردایه ی $\{I_i\}_{i\in I}$ از ایده ال های R، $V(\sum_{i\in A} I_i) = \bigcap_{i\in A} V(I_i)$.

۲) برای ایده ال های I و J از R، $V(I\bigcap J) = V(I)\bigcup V(J)$.

اثبات: ۱) برای هر $i\in A$، $I_i \subseteq \sum_{i\in A} I_i$ پس $V(\sum_{i\in A} I_i) \subseteq V(I_i)$ و چون i دلخواه است پس $V(\sum_{i\in A} I_i) \subseteq \bigcap_{i\in A} V(I_i)$. برعکس، اگر $P \in \bigcap_{i\in A} V(I_i)$ لذا برای هر $i\in A$، $I_i \subseteq P$ بنابراین $\sum_{i\in A} I_i \subseteq P$ و در نتیجه $\bigcap_{i\in A} V(I_i) \subseteq V(\sum_{i\in A} I_i)$.

۲) به وضوح $V(I)\bigcup V(J)\subseteq V(I\bigcap J)$. فرض کنید $P\in V(I\bigcap J)$. چون $V(I\bigcap J)=V(IJ)$، $IJ\subseteq P$ و چون P یک ایده ال اول است، $I\subseteq P$ یا $J\subseteq P$. پس $P\in V(I)\bigcup V(J)$ در نتیجه $V(I\bigcap J)\subseteq V(I)\bigcup V(J)$. ■

$S(R)$ گردایه ای از زیرمجموعه های $X=spec(R)$ است و $V(0)=spec(R)$ و $V(R)=\phi$ در $S(R)$ قرار دارند. طبق لم بالا $S(R)$ نسبت به اشتراک دلخواه و اجتماع متناهی بسته است. پس $S(R)$ یک توپولوژی بر روی X است.

تعریف۱-۳-۸: فرض کنید M یک $R-$مدول و N یک زیرمدول M باشد. واریته ی N که با $V(N)$ نمایش می دهیم، تمام زیرمدول های اول Mاست که N را در بر دارند. ممکن است $V(N)$ تهی باشد یعنی N در هیچ زیرمدول اولی از M قرار نگیرد.

مثال۱-۳-۹: اگر $R=Z$، آنگاه مدول Z_p^{∞} هیچ زیرمدول اولی ندارد. به طور کلی اگر M یک $R-$مدول انژکتیو تابی باشد، آنگاه M هیچ زیرمدول اولی ندارد. زیرا یک $Z-$مدول انژکتیو مجموع مستقیمی از نسخه های Q و Z_p^{∞} است و چون M تابی است پس $M=\underset{i\in A}{\oplus} Z_p^{\infty}$. اگر N یک زیرمدول اول M باشد، چون محض است عضو $m=(\frac{a_1}{p^{i_1}},...,\frac{a_t}{p^{i_t}},0,...)$ در M موجود است به طوری که $m\notin N$. حال قرار دهیم $l=\max\{i_1,...,i_t\}$، در این صورت $p^l m=0\in N$ بنابراین $p^l M\subseteq N$. پس $m=p^l(\frac{a_1}{p^{i_1+l}},...,\frac{a_t}{p^{i_t+l}},0,...)\in N$ و این یک تناقض است در نتیجه M هیچ زیرمدول اولی ندارد.

مجموعه ی واریته های زیرمدول های $R-$مدول M را فضای زاریسکی M گویند و با $\xi(M)$ نشان می دهند. حال برای زیرمدول های N و L از M و ایده ال I از R، تعریف می کنیم:

$$V(L)+V(N)=V(L+N)=V(L)\bigcap V(N) \quad \text{و} \quad V(I)V(L)=V(IL).$$

به راحتی می توان دید که $\xi(M)$ با جمع و ضرب تعریف شده یک $S(R)-$نیم مدول چپ با صفر $0_{\xi(M)}=V(0)$ است. توجه شود که در حالت کلی $\xi(M)$ یک توپولوژی نیست چون لزوما نسبت به اجتماع متناهی بسته نیست. به عنوان مثال فضای برداری $M=R^2$ روی میدان R را در نظر بگیرد. فرض کنید N زیرفضای M باشد. اگر $N=0$، آنگاه $V(N)$ مجموعه ی تمام زیرفضاهای یک بعدی است. (زیرفضاهای یک بعدی زیرمدول های اول M هستند). اگر $\dim N=1$، آنگاه $V(N)=\{N\}$ و اگر $\dim N=2$، آنگاه $V(N)=\phi$. پس هیچ زیرفضایی از M دارای واریته ی ۲عضوی نیست. حال اگر N و L زیرفضاهای یک بعدی M باشند، آنگاه $V(N)\bigcup V(L)=\{N,L\}$.

تعریف۱-۳-۱۰: فرض کنید R یک دامنه ی جابجایی با میدان خارج قسمتی F باشد. برای هر ایده ال I از حلقه ی R تعریف می کنیم $I^*=\{f\in F: fI\subseteq R\}$. اگر $I^*I=R$، انگاه ایده-ال I را وارون پذیر گویند و I^* را با I^{-1} نشان می دهند.

واضح است که اگر $I\subseteq J$، انگاه $J^*\subseteq I^*$. هر ایده ال وارون پذیر متناهیا تولید شده است. زیرا اگر I ایده ال وارون پذیر حلقه ی R باشد، آنگاه $I^*I=R$ پس $1=I^*I$ بنابراین $1=\sum_{i=1}^{n} f_i a_i$ که $a_i\in I$ و $f_i\in I^*$. حال برای هر $a\in I$، $a=\sum_{i=1}^{n}(f_i a)a_i$ که $f_i a_i\in I^*I=R$. در نتیجه I با a_i ها که $1\le i\le n$ تولید می شود.

تعریف۱-۳-۱۱: فرض کنید R یک دامنه ی جابجایی باشد. هرگاه هر ایده ال متناهیا تولید شده ی R وارون پذیر باشد، R را یک دامنه ی پروفرگویند.

قضیه۱-۳-۱۲: اگر D یک حوزه ی صحیح و S مجموعه ی ایده ال های ناصفر D باشد و S^* مجموعه ی ایده ال های متناهیا تولید شده ی D باشد. موارد زیر معادلند:

۱) D یک دامنه ی پروفر است.

۲) برای هر $A\ ,B,C\in S$، $\quad A(B\bigcap C)=AB\bigcap AC$

۳) برای هر $A\ ,B,C\in S^*$، $\quad A(B\bigcap C)=AB\bigcap AC$

اثبات: [۲، قضیه۲-۲۵]. ■

تعریف۱-۳-۱۳: یک زیرمدول N از $R-$مدول M را اساسی گویند، هرگاه اشتراک آن باهر زیرمدول غیرصفر M، مخالف صفر باشد. اگر $M\neq 0$ مدولی باشد که هر زیرمدول غیرصفر آن اساسی باشد، آنگاه گوییم M یک مدول یکنواخت است. مدول M دارای بعد یکنواخت متناهی است، هرگاه M شامل هیچ جمع مستقیم با تعداد نامتناهی جمعوند از زیرمدول های M نباشد.

تعریف۱-۳-۱۴: گردایه ی $\{N_i\}_{i\in I}$ از زیرمدول های M را مستقل گوییم مشروط بر اینکه برای هر $j\in I$ ، $N_j\bigcap N_j^*=0$. که در آن N_j^* زیرمدول تولید شده به وسیله ی $\{N_i\}_{i\neq j}$ است.

لم۱-۳-۱۵: فرض کنید M یک مدول با بعد یکنواخت متناهی باشد. در این صورت M شامل یک زیرمدول اساسی است که جمع مستقیمی از زیرمدول های یکنواخت است.

اثبات: [۱۶، لم ۸-۲-۲]. ■

قضیه۱-۳-۱۶: فرض کنید M یک مدول با بعد یکنواخت متناهی باشد و $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} U_i$ یک جمع مستقیم متناهی از زیرمدول های یکنواخت M باشد که در M اساسی است. در این صورت:

۱) هر جمع مستقیم از زیرمدول های ناصفر M حداکثر n جمعوند دارد.

۲) یک جمع مستقیم از زیرمدول های یکنواخت M اساسی است اگر و تنها اگر دقیقا n جمعوند داشته باشد.

اثبات: [۱۶، قضیه ی ۹-۲-۲]. ■

عدد n در قضیه ی بالا را بعد یکنواخت M گویند و با $u(M)$ نشان می دهند.

نتیجه۱-۳-۱۷: موارد زیر برقرارند:

۱) $u(M)=1$ اگر و تنها اگر M یک مدول یکنواخت باشد.

۲) $u(M)=0$ اگر و تنها اگر $M=0$.

۳) اگر N یک زیرمدول M باشد و $u(M)=n$، آنگاه $u(N)\leq n$ و تساوی زمانی برقرار است که N در M اساسی باشد.

۴) $u(M_1 \oplus M_2)=u(M_1)\oplus u(M_2)$.

اثبات: [۱۶، نتیجه ی ۱۰-۲-۲]. ■