تقدیم به

پدر و مادر عزیزم،

همسر مهربانم و

دختر نازنینم

قدردانی

با حمد و ثنای خداوند یکتا و سپاسگذاری از رحمت‌ها و نعمت‌های بی‌منت و مداومش، امیدوارم تلاش‌های ما مورد رضایت و قبول آن حضرت قرار گیرد.

در ابتدا بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای گرانقدرم جناب آقای دکتر صافی تشکر کنم که اگر مساعدت‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغشان نبود تکمیل و تنظیم این پایان‌نامه میسر نمی‌شد. و نیز از جناب آقای دکتر محمدیان به خاطر راهنمایی‌های فراوان و بی‌دریغشان قدر دانی می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر دمیرچی که مشاور بنده در تدوین این پایان‌نامه بوده‌اند و از داوران محترم جناب آقای دکتر عباسی مولایی و جنای آقای دکتر بابایی سپاسگذارم.

از خانواده محترم، دوستان و سرورانی که با بنده همکاری داشته‌اند، خصوصاً سرکار خانم حسین‌پور، کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه روی مسئله معروف فروشنده دوره‌گرد متمرکز شده، با استفاده از برنامه‌ریزی خطی چندهدفی فازی آن را حل نمودیم، همچنین مسئله فروشنده دوره‌گرد چندگانه را شرح داده و به ارائه فرمول بندی برنامه ریزی خطی اعداد صحیح برای آن می پردازیم و به دلیل اینکه این فرمول‌بندی شامل قیودی برای حذف مسیرهای فرعی است، اهمیت و اعتبار قیود مذکور را اثبات می نماییم.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی خطی چند هدفی فازی، مسئله فروشنده دوره‌گرد، مسئله فروشنده دوره‌گرد چندگانه، برنامه‌ریزی خطی با اعدد صحیح

فهرست مطالب

پیشگفتار

همانطور که می‌دانید بیشتر مسائل جهان واقعی خوش تعریف نیستند و اطلاعات بدست آمده از آنها توأم با عدم اطمینان هستند، لذا نمی‌توان آنها را به صورت دقیق تعریف کرد. از این رو امکان دارد استفاده از رویکردهای رایج تحقیق در عملیات برای حل اینگونه مسائل مناسب نباشد. در اوایل قرن اخیر، نظریه مجموعه‌های فازی برای بررسی این عدم اطمینان توسط پروفسور زاده ارائه شد و تا کنون گسترش وتعمیق زیادی یافته وکاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. یکی از مسائل مهمی که در تحقیق در عملیات از این نظریه بی‌بهره نبوده، مسئله معروف فروشنده دوره‌گرد می‌باشد. این مسئله کاربردهای وسیعی در حوزه‌های مختلف مهندسی دارد، ازجمله مواردی که می‌توان نام برد، مسائل مسیر یابی وسائل نقلیه، طراحی ماموریت ربات‌ها، جا یابی کالا در انبار، طراحی مدارات چاپی و... می‌باشد.

در این پایان‌نامه روی مسئله فروشنده دوره‌گرد و حل آن توسط مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی کار کرده‌ایم و نیز به دلیل کاربرد بسیار زیاد مسئله فروشنده دوره‌گرد چندگانه به تشریح و ارائه فرمول‌بندی برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح که شامل قیود حذف مسیرهای فرعی است برای آن پرداخته‌ایم.

در فصل اول مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی بیان شده است، در فصل دوم مسائل برنامه‌ریزی خطی یک هدفی، مسائل برنامه‌ریزی خطی چند هدفی، مسائل برنامه ریزی خطی یک هدفی فازی و مسائل برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی ارائه شده است.

فصل سوم شامل دو بخش می‌باشد، که در بخش اول مسئله فروشنده دوره‌گرد تشریح شده و در بخش دوم به حل این مسئله با استفاده از مسائل برنامه‌ریزی خطی چند هدفی فازی پرداخته‌ایم.

در نهایت در فصل چهارم مسئله فروشنده دوره‌گرد چند گانه را توضیح داده وفرمول‌بندی

برنامه‌ریزی خطی عدد صحیحی برای آن ارائه نموده‌ایم که شامل قیود حذف مسیرهای فرعی است. لذا اعتبار و مجاز بودن این قیود را اثبات نموده‌ایم و در آخر برخی از کاربردهای مهم این مسئله را بررسی کرده‌ایم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی

۱.۱ مقدمه

نظریه مجموعه‌های فازی شاخه نسبتاً جدیدی از ریاضیات است که مبدع آن پرفسور عسگر زاده [۱] دانشمند ایرانی تبار می‌باشد. این نظریه، ابزارهایی را فراهم می‌آورد که می‌توان به وسیله آنها نحوه استدلال و تصمیم‌گیری انسانی را صورت بندی ریاضی بخشید و از الگوهای ریاضی به دست آمده، در زمینه‌های گوناگون علوم و تکنولوژی استفاده کرد. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم درباره آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. در اینجا با یک ویژگی مبهم یعنی «بزرگ» سر و کار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند بستگی به تصور ما از بزرگی دارد. مثلاً آیا ۱۰۰، عددی «بزرگ» است و عضو گردآیه اعداد حقیقی «بزرگ» قرار دارد یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ می بینیم که ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین نیست. از قضا بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره و واقعی با آن سرو کار داریم اینگونه‌اند. یعنی مفاهیمی هستند منعطف و مجموعه‌هایی هستند با کران‌های نادقیق.

پس آنچه در مجموعه بودن «اعداد بزرگ» اشکال ایجاد می‌کند، معلوم نبودن عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردآیه «اعداد بزرگ» است. ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ بنا به پیشنهاد زاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه $[0,1]$ به عنوان درجه

[۱] $Zadeh$

بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هرچه یک عدد بزرگتر بود، عدد متناظر برای عضویت آن در A (مجموعه اعداد بزرگ) به یک نزدیکتر باشد و بالعکس هر چه عدد مورد نظر کوچک بود، عدد مربوط به عضویت آن در A به صفر نزدیکتر باشد. به این ترتیب به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست و یا آنکه در این باره ساکت باشیم، می‌گوییم درجه بزرگی آن، مثلاً ۰/۷ است. به عبارت دیگر به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A هست یا عضو A نیست، می‌گوییم: با درجه ۰/۷ عضو A است.

مسلماً در این مورد باید برای هر عدد از $\mathbb{R}$، عددی از $I = [0, 1]$ را به عنوان درجه و میزان عضویت و تعلق در A نسبت دهیم. یعنی یک تابع در نظر بگیریم که قلمرو آن $\mathbb{R}$ و برد آن I باشد. شاید متوجه شده باشید که اساس کار تشریح شده در بالا چیزی نیست جز گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که یک تابع با برد $\{0, 1\}$ است، به یک تابع با برد $[0, 1]$.

به این ترتیب می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و مفاهیم و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد. [۲۰]

۲.۱ تابع عضویت

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. همانطور که در بخش قبل گفته شد، تابع نشانگر هر زیرمجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به $\{0, 1\}$ است که اینگونه تعریف می‌شود:

$$x_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \tag{۱.۱}$$

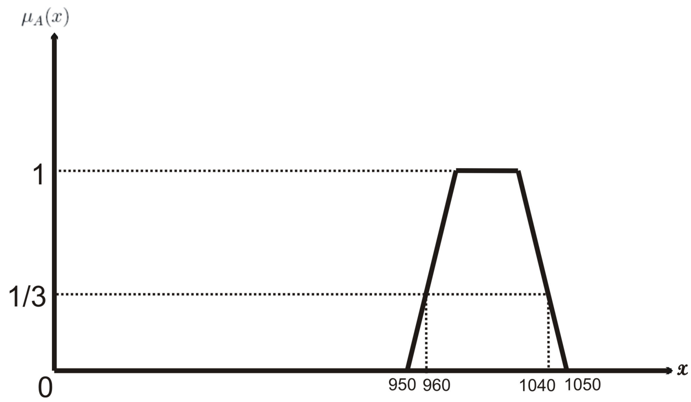
حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی را از بازه $[0, 1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعه معمولی نیست بلکه چیزی است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم (به طور دقیقتر، یک زیرمجموعه فازی از X). بنابراین یک مجموعه فازی A، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضاء آن از $I = [0, 1]$ اختیار

می‌شود. این مجموعه به طور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نمایش می‌دهیم مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد را از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_A(x)$ را می‌توان درجه پذیرش ما درقبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. در حالت حدی چنانچه x کاملاً عضو A باشد، داریم $\mu_A(x) = ۱$ و چنانچه اصلاً عضو A نباشد، داریم $\mu_A(x) = ۰$.

فرض کنید $A = [۰, ۲۰۰۰]$. یک زیرمجموعه فازی از X باشد که نشان دهنده ویژگی «نزدیک ۱۰۰۰» باشد، در این صورت تابع عضویت آن می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۱ - \frac{۹۸۰ - x}{۳۰} & ۹۵۰ \le x \le ۹۸۰ \\ ۱ & ۹۸۰ \le x \le ۱۰۲۰ \\ ۱ - \frac{x - ۱۰۲۰}{۳۰} & ۱۰۲۰ < x \le ۱۰۵۰ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_A(۹۶۰) = \mu_A(۱۰۴۰) = \frac{۱}{۳}$ یعنی اعداد ۹۶۰ و ۱۰۴۰ هر دو با درجه $\frac{۱}{۳}$ عضو مجموعه فازی A هستند و به عبارت دیگر با درجه $\frac{۱}{۳}$ ویژگی «نزدیک به ۱۰۰۰» را دارا می‌باشند.



شکل ۱.۱: نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A، اعداد نزدیک به ۱۰۰۰

نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A، در شکل (۱.۱) رسم شده است.

بنابراین در تعیین تابع عضویت یک مجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار مؤثر است.

اینکه یک تابع عضویت چه ویژگی‌هایی دارد و یا باید داشته باشد و نیز چگونگی ساختن آن در موارد مختلف، از بحث‌های اساسی نظریه مجموعه‌های فازی است.

چند مفهوم مقدماتی

فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_A(x) > ۰$، تکیه گاه A نامیده شده و با $sup\ A$ نشان داده می‌شود. مقدار $M = sup_x \mu_A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می‌شود. اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $sup\ \mu_A(x) = ۱$ آنگاه A نرمال نامیده می‌شود، در غیر این صورت A زیر نرمال [۲] است. بدیهی است که هر مجموعه فازی زیر نرمال A را می توان با تقسیم $\mu_A(x)$ بر ارتفاع A، نرمال کرد. اگر x عنصری باشد که برای آن $\mu_A(x) = \frac{۱}{۲}$، x را یک نقطه گذر (معبر) A گوییم.

نمادگذاری

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش همان است که در مثال (۱.۲.۱) از آن استفاده شد؛ یعنی به کار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به گونه زیر است:

$$A = \{(x, \mu_A(x))\ ;\ x \in X\}$$

هنگامی‌که X یک مجموعه متناهی (و یا نامتناهی شمارا) به صورت $\{x_۱, ..., x_n\}$ باشد، یک زیرمجموعه فازی A از X به صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \{\frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_A(x_۲)}{x_۲}, ..., \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}\}$$

$$A = \mu_A(x_۱)/x_۱ + ... + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{i=۱}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

که در عبارت دوم، منظور از علامت +، اجتماع است نه جمع حسابی و هنگامی که $\mu_A(x)$ یک مجموعه پیوسته باشد، نماد زیر به کار برده می‌شود:

$$A = \int_X \mu_A(x)/x$$

---

[۲] $Sub\ Normal$

که در آن منظور از علامت $\int$، اجتماع است. بعلاوه در بعضی موارد برای اختصار، به جای $\mu_A(x)$ می‌نویسیم $A(x)$. فرض کنید $X = [۰, ۱۰۰]$ و $x \in X$ به عنوان سن تلقی شود. زیرمجموعه فازی A از X که «پیری» را نشان دهد می‌تواند اینگونه تعریف شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} ۰ & x \le ۵۰ \\ \frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} & ۵۰ < x \le ۱۰۰ \end{cases}$$

که با نماد اشاره شده در بالا به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$A = \int_{۵۰}^{۱۰۰} \left(\frac{۱}{۱ + (\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} \right) /x$$

در این مثال $suppA = (۵۰, ۱۰۰]$ و همچنین $sup_x \mu_A \simeq ۰/۹۹$، پس A زیر نرمال است، چون $\mu_A(۵۵) = \frac{۱}{۲}$، پس ۵۵ سالگی نقطه گذر (معبر) پیری است.

۳.۱ عملگرهای مجموعه‌ای

مجموعه فازی A را تهی می‌گوییم اگر برای هر $x \in X$، $\mu_A(x) = ۰$.

مجموعه فازی A را تام گوییم اگر برای هر $x \in X$، $\mu_A(x) = ۱$.

گوییم مجموعه فازی A، زیرمجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ اگر برای هر $x \in X$، $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$.

دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$ اگر برای هر $x \in X$، $\mu_A(x) = \mu_B(x)$.

$A \cup B$، اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cup B)(x) = max \ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$(A \cup B)(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

$A \cap B$، اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود:

$$(A \cap B)(x) = min\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad \forall x \in X$$

و یا به بیان ساده‌تر

$$(A \cap B)(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

مانند حالت معمولی، A و B را جدا از هم گوییم اگر $A \cap B = \phi$، یعنی اشتراک تکیه گاه‌های A و B تهی باشد.

۴.۱ برش‌ها و تحدب

زیرمجموعه‌ای (معمولی) از عناصر X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی $\alpha (\alpha > ۰)$ باشد، α -برشA (یا مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و به A_α نشان دهیم. یعنی:

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

در بعضی موارد نیز از مفهوم α -برش قوی استفاده می‌شود که با $A_{\bar{\alpha}}$ نشان داده شده و اینگونه تعریف می‌شود:

$$A_{\bar{\alpha}} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$$

فرض کنید $X = \{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ و زیر مجموعه فازی A از X که نشان دهنده ویژگی «حدوداً سه» است، اینگونه تعریف می‌شود:

$$A = \{\frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۷}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}\}$$

در این صورت α -برش A و $\bar{\alpha}$ -برش قوی A به صورت زیر است:

$$A_\alpha = \begin{cases} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} & ۰ < \alpha \leq ۰/۳ \\ \{۲, ۳, ۴\} & ۰/۳ < \alpha \leq ۰/۷ \\ \{۳\} & ۰/۷ < \alpha \leq ۱ \end{cases} \qquad (۲.۱)$$

$$A_{\bar{\alpha}} = \begin{cases} \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} & ۰ < \alpha < ۰/۳ \\ \{۲, ۳, ۴\} & ۰/۳ \leq \alpha < ۰/۷ \\ \{۳\} & ۰/۷ \leq \alpha < ۱ \\ \phi & \alpha = ۱ \end{cases} \quad (۳.۱)$$

اتحاد تجزیه: هر مجموعه فازی مانند A را می‌توان به صورت زیر بر حسب مجموعه‌های تراز آن تجزیه کرد:

$$A = \cup_\alpha \alpha A_\alpha$$

در بعضی موارد بسته به اینکه تابع عضویت A گسسته یا پیوسته باشد رابطه فوق به صورت‌های زیر نوشته می‌شود:

$$A = \int_۰^۱ \alpha A_\alpha$$

یا

$$A = \sum_\alpha \alpha A_\alpha$$

که البته در آنها $\int_۰^۱$ و $\sum_\alpha$ اجتماع A_α ها را نشان می‌دهد. برای مجموعه A مثال (۴.۱) داریم:

$$A_{۰/۳} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$$
$$A_{۰/۷} = \{۲, ۳, ۴\}$$
$$A_۱ = \{۳\}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

$$A = ۰/۳\{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}\} \cup ۰/۷\{\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}\} \cup ۱\{\frac{۱}{۳}\}$$

تحدب

در نظریه مجموعه‌های فازی مفهوم تحدب نقش مهمی دارد و زمینه های کاربردی زیادی را شامل می‌شود. در این قسمت تعریف این مفهوم را ملاحظه می‌کنید. مجموعه فازی A را محدب گوییم، اگر هر α –برش A (برای تمام $۰ < \alpha \leq ۱$) محدب باشد. یک تعریف معادل

تحدب به صورت زیر است.

مجموعه فازی A محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم:

$$A[\lambda x_۱ + (۱ - \lambda)x_۲] \geq min\ \{\mu_A(x_۱), \mu_A(x_۲)\}$$

مجموعه فازی A را کراندار گوییم، اگر α -برش‌های A (برای هر $\alpha > ۰$) کراندار باشد. یعنی برای هر $\alpha > ۰$ یک $R(\alpha)$ متناهی وجود داشته باشد که برای هر $x \in A_\alpha$ داشته باشیم $\| x \| \leq R(\alpha)$، که در آن $\| x \|$ نرم اقلیدسی x است.

مطالبی که تاکنون ملاحظه کردید، مفاهیم و مقدمات لازم در مورد مجموعه‌های فازی بود که در فصل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

فصل ۲

برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی خطی فازی

اکنون در دو بخش برنامه‌ریزی خطی یک هدفه و راه‌های حل آن و نیز برنامه‌ریزی خطی چند هدفه و روش‌های حل آن را بررسی خواهیم نمود.

۱.۲ برنامه‌ریزی خطی یک هدفه

در این بخش به طور خیلی خلاصه، تعاریف و قضایای مربوط به برنامه‌ریزی خطی یک هدفه را آورده می شود. هچنین اشاره مختصری به شیوه حل یک مسئله برنامه‌ریزی خطی خواهیم داشت.

برنامه ریزی ریاضی، با مسائل کمینه سازی یا بیشینه سازی یک تابع با وجود تعدادی محدودیت سرو کار دارد. به طور نمادین، مسئله برنامه‌ریزی یک هدفه، (SOP) [1] را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} max \quad & z(x) = f(x) \\ s.t \quad & x \in S \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

[1] $Single\ Objective\ Programming$

که در آن $f(x)$ تابع هدف و S ناحیه شدنی است. در حالت خطی به جای (۱.۲) نمونه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} &max \quad z(x) = c^T x \\ &s.t \quad S = \{x | Ax = b, x \geq 0\} \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

که در آن $c \in R^n$ بردار ضرایب سود تابع هدف، $b \in R^m$ بردار منابع، $x \in R^n$ بردار متغیرهای تصمیم، $A \in R^{m \times n}$ ماتریس ضرایب است. هر بردار x را که در مجموعه محدودیت‌های $Ax = b$ و $x \geqslant 0$ صدق کند، یک جواب شدنی می نامند.

مجموعه همه جواب‌های شدنی دستگاه $Ax = b$ و $x \geqslant 0$ را فضای جواب شدنی مسئله (۲.۲) گویند.

هرگاه فضای جواب شدنی دستگاه $Ax = b$ و $x \geqslant 0$ تهی باشد دستگاه فوق ناسازگار است.

فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ با رتبه کامل باشد، در این صورت می‌توان ترتیب ستون‌های ماتریس A را طوری تغییر داد که به صورت $A = [B, N]$ در آید، که در آن B یک ماتریس معکوس پذیر $m \times m$ و N یک ماتریس $m \times (n - m)$ است. اگر مولفه‌های نظیر ستون‌های B را با x_B نمایش دهیم، می‌توانیم جواب پایه‌ای دستگاه فوق را به صورت زیر تعریف کنیم:

بردار

$$x = x_B x_N$$

یک جواب پایه‌ای برای دستگاه معادلات $Ax = b$ نامیده می‌شود هرگاه $x_B = B^{-1} b$ و $x_N = 0$.

در تعریف قبل، اگر $x_B \geq 0$، آنگاه x را جواب شدنی مسئله (۲.۲) می‌نامیم.

همانطور که می‌دانید جواب‌های پایه‌ای نقش مهمی در روش سیمپلکس دارند. قضیه زیر درباره وجود جواب‌های پایه‌ای می‌باشد. اگر دستگاه $Ax = b$ و $x \geq 0$، دارای یک جواب شدنی باشد، آنگاه این دستگاه یک جواب پایه‌ای شدنی نیز دارد.

برهان: به مرجع [۳] مراجعه شود. □

نقطه x برای مجموعه محدب S نقطه فرین گفته می‌شود هرگاه نتوان آنرا بصورت ترکیب محدب

اکید دو نقطه متمایز دیگر از S نمایش داد، یعنی اگر $x_۱, x_۲ \in S$ و $x = \lambda x_۱ + (۱ - \lambda) x_۲$ که در آن $\lambda \in (۰, ۱)$ آنگاه $x = x_۱ = x_۲$.

بردار d را یک جهت فرین برای مجموعه S گویند هرگاه نتوان آن را بصورت ترکیب مثبتی از دو جهت مجموعه S نمایش داد.

قضیه زیر رابطه بین جواب‌های پایه‌ای و نقاط فرین مجموعه محدودیت‌های مسئله (۲.۲) را نشان می‌دهد. متناظر با هر نقطه فرین، یک جواب پایه‌ای (نه لزوماً منحصر به فرد) از مجموعه S وجود دارد و بر عکس، متناظر با هر جواب پایه‌ای از S، یک نقطه فرین (منحصر به فرد) از این مجموعه وجود دارد.

برهان: به مرجع [۳] مراجعه شود. $\square$

x^* را یک جواب بهینه برای مسئله (۲.۲) می نامیم هرگاه $x^* \in S$ و برای هر $x \in S$ داشته باشیم: $c^T x \le c^T x^*$.

اگر یک جواب بهینه (متناهی) برای (۲.۲) وجود داشته باشد، آنگاه یک نقطه فرین بهینه یا بطور معادل یک جواب پایه‌ای شدنی بهینه نیز وجود دارد.

برهان: به مرجع [۳] مراجعه شود. $\square$ فرض کنید فضای جواب شدنی مسئله (۲.۲) ناتهی باشد. در این صورت یک مقدار بهینه متناهی برای مسئله (۲.۲) وجود دارد اگر و فقط اگر $cd_j \ge ۰$ برای هر $j = ۱, \cdots, L$ که در آن $d_۱, \cdots, d_L$ جهت‌های فرین فضای جواب شدنی مسئله هستند و اگر وجود داشته باشد $j = ۱, \cdots, L$ بطوریکه $cd_j < ۰$، آنگاه مقدار بهین نامتناهی است.

برهان: به مرجع [۳] مراجعه شود. $\square$

در مسئله (۲.۲) هرگاه بیش از یک جواب بهینه داشته باشیم، این جواب‌ها را جواب‌های بهینه دگرین می‌نامند.

در مسئله (۲.۲) هرگاه برخی از مولفه‌های x_B صفر باشند، جواب مذکور را یک جواب تباهیده گویند.

مرسوم‌ترین روشی که برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) [۲] به کار می‌رود روش

---

[۲] $Linear Programming$

سیمپلکس است. این روش در ابتدا توسط دانتزیک [۳] در سال ۱۹۴۷ مطرح شد و در سال ۱۹۴۸ به چاپ رسید. الگوریتم سیمپلکس در ابتدا با یک جواب پایه‌ای شروع شده و جواب‌های بعدی را به گونه‌ای می‌یابد که پایه‌ای و شدنی باشند و در ضمن به ازای آنها مقدار تابع هدف بهتر و یا حداقل به اندازه مقدار کنونی شود. برای مطالعه بیشتر درباره این روش می‌توان به مرجع [۳] مراجعه کرد.

۲.۲ برنامه‌ریزی خطی چند هدفه

روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی ریاضی یک هدفه، در ۶۰ سال گذشته مطالعه شده است. چون بسیاری از مسائل مهم در جهان واقعی بیش از یک هدف دارند از این رو تصمیم گیرنده‌ها دریافتند که باید جواب‌هایی را با توجه به برخی معیارها محاسبه کنند. مسئله برنامه‌ریزی چند هدفه MOP [۴] به صورت زیر مطرح می‌گردد:

$$\begin{aligned} &max \quad z_1(x)=f_1(x)\\ &max \quad z_2(x)=f_2(x)\\ &\vdots\\ &max \quad z_k(x)=f_k(x)\\ &s.t. \quad\ x\in S=\{x\in\mathbb{R}^n | Ax\le b, x\ge 0\}. \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

کان و تاکر [۵] ابتدا این مسئله را در سال ۱۹۵۱ فرمول‌بندی کردند [۷]، آنها همچنین شرایط بهینگی برای وجود جواب‌ها را بیان نمودند. در سال ۱۹۵۳ آرو [۶] و دیگران شرط بهینگی دیگری را معرفی کردند [۲]. بد [۷] در سال ۱۹۶۳ پایه برنامه‌ریزی خطی چند هدفه $(MOLP)$ و آنچه امروزه به عنوان روش سیمپلکس چند معیاره مطرح می‌شود را بنا نهاد [۵]. از آن زمان تا کنون برنامه‌ریزی خطی چند هدفه در جهات مختلفی با کاربردهای موفق توسعه یافته است. واضح است که یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه مانند یک مسئله برنامه‌ریزی یک هدفه

[۳] $Dantzing$

[۴] $Multiple\ Objective\ Programming$

[۵] $Kuhn-Tucker$

[۶] $Arrow$

[۷] Bod

است با این تفاوت که به جای فقط یک هدف دارای تعدادی تابع هدف است.
در حالت خطی مسئله (۳.۲) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} max \quad & z(x) = Cx \\ s.t. \quad & x \in S \end{aligned} \tag{۴.۲}$$

که در آن $A \in R^{m\times n}$، $b \in R^m$، $x \in R^n$، $C = (c_1, ..., c_k)^T \in R^{k\times n}$، $c_j \in R^n$، $j = 1, ..., k$ و $z(x) = (z_1(x), ..., z_k(x))^T = (c_1x, ..., c_kx)^T \in R^k$.

گاهی در برخورد با این مسائل از تابعی به نام تابع مطلوبیت استفاده می‌شود. این تابع که از $\mathbb{R}^k$ به $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود تابعی است روی همه توابع هدف که توسط تصمیم گیرنده معرفی می‌شود. تابع مطلوبیت می‌تواند جمع همه توابع هدف، حاصلضرب آنها، حاصل جمع وزن‌دار آنها و یا هر تابع دیگری باشد که مطلوب تصمیم گیرنده است. تصمیم گیرنده پس از تعیین تابع مطلوبیت که آن را با $U(z(x))$ نشان می‌دهیم مسئله زیر را حل می‌کند:

$$\begin{aligned} max \quad & \{U(z(x))\} \\ s.t. \quad & z(x) = Cx \\ & x \in S. \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

اگر (x^*, z^*) جواب بهینه برای مسئله (۵.۲) باشد آنگاه x^* یک نقطه بهینه و z^* یک بردار معیار بهینه نامیده می‌شوند. برای نشان دادن رویکرد تابع مطلوبیت مثال زیر را مطرح می‌کنیم: مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه زیر را در نظر بگیرید: [۱۲]

$$\begin{aligned} max \quad & z_1(x) = 2x_1 + x_2 \\ max \quad & z_2(x) = x_1 + 2x_2 \\ s.t. \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 18 \\ & -x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حال فرض کنید تابع مطلوبیت $U = x_1^2 + x_1x_2$ توسط تصمیم گیرنده معرفی شده باشد.