بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.A)

گرایش:

آنالیز ریاضی

عنوان:

یک قضیه میانگین ارگودیک برای نگاشت‌های آفین شبه غیرمبسوط مجانبی در فضاهای باناخ که در شرط اپیال صدق می‌کند

استاد راهنما:

دکتر امین محمودی کبریا

استاد مشاور:

دکتر داود ابراهیمی بقا

پژوهشگر:

زهرا قلیلیان

بهار ۱۳۹۲

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و تقدیم به

همسر و فرزند عزیزم که زندگی مرا متحول کردند.

تشکر و قدردانی :

سپاس پروردگاری را سزاست که انسان را آفرید و او را عقل و حکمت بخشید و اشرف مخلوقات خود در زمین قرار داد. زیباترین واژه های تقدیر و سپاس گذاری در توصیف ارزش و بهای تلاش های استاد فاضل، عاجز و ناتوان است؛ با این حال خود را مفتخر و موظف می دانیم که مراتب سپاس و قدردانی خود را به محضر جناب آقای دکتر امین محمودی کبریا که موجب گردیدند تا با نگرشی بهتر به مسائل نگریسته، چگونه نوشتن و چگونه اندیشیدن را با متانت و صداقت به ما آموخته و همواره ما را به تلاش و تکاپو وا می داشتند و ما را به آشنایی با اندیشمندانی فاضل؛ اساتید گران قدر جناب آقای دکتر داود ابراهیمی بقا و جناب آقای دکتر محمد صادق عسکری که موقعیت علمی مان را پس از لطف و عنایات حق تعالی، مرهون تلاش های آن بزرگواران هستیم راهنمایی کردند و با راهنمایی های ایشان توانستم برای هرچه بهتر بودن این پژوهش فعالیت کنم، ابراز نمایم. باشد که شما در سایه ی پروردگار عالم موفق و مؤید باشید.

ومن الله التوفیق

تعهد نامه اصالت پایان نامه کارشناسی ارشد

اینجانب زهرا قلیلیان دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نا پیوسته به شماره دانشجویی ۸۹۰۹۲۲۳۰۵۰۰ در رشته ریاضی محض که در تاریخ ۱۳۹۲/۲/۲۹ از پایان نامه خود تحت عنوان: یک قضیه مینیمکس ارگودیک برای نگاشت‌های آفین شبه غیر مبسوط مجانبی در فضاهای باناخ که در شرط اپیال صدق می کند. با کسب نمره ۱۷/۹۵ و درجه بسیار خوب دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:

۱- این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی وپژوهشی دیگران(اعم از پایان نامه، کتاب ، مقاله و........) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه‌های موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده‌ام.

۲- این پایان‌نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح،پایین‌تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳- چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و.... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴- چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط ومقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: زهرا قلیلیان

تاریخ وامضاء: ۱۳۹۲/۳/۱

بسمه تعالی

در تاریخ ۱۳۹۲/۲/۲۹

دانشجـوی کارشناسی ارشد خانم زهرا قلیلیان از پایان نامه خود دفـاع نمـوده و بـا نمـره ۱۷/۹۵ بحـروف هفده و نود و پنج صدم و بـا درجـه بسیار خوب مورد تصویـب قـرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم به مطالعه همگرایی ضعیف و قوی فرآیندهای تکرار ضمنی نقاط ثابت برای برخی نگاشت‌های خاص در فضاهای باناخ بپردازیم.

فرض کنیم E یک فضای باناخ، C زیر مجموعه محدب از E و $T: C \to C$ نگاشتی است به قسمی که مجموعه نقاط ثابت T یعنی $F(T)$ ناتهی است.

نشان خواهیم داد که اگر E در شرط اپیال صدق کند، اگر C ضعیفا فشرده و اگر T آفینی شبه غیر مبسوط مجانبی باشد آنگاه برای هر $x \in C$ دنباله $\{T^n x\}$ به یک نقطه $z \in F(T)$ همگرای تقریبا ضعیف است.

اگر E دارای یک نرم دیفرانسیل پذیر فرشه و C کران دار باشد آن گاه نشان خواهیم داد که دنباله $\{T^n x\}$ برای هر $x \in C$ همگرای تقریبا ضعیف به یک نقطه ثابت است در جایی که T یک انقباض است.

برای یک نگاشت غیر مبسوط T، همگرایی ضعیف دنباله $\{T^n x\}$ را بررسی کرده و برهان جدیدی از قضیه میانگین ارگودیک ارائه خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: نگاشت‌های آفین، نگاشت‌های شبه غیر مبسوط مجانبی، نقطه ثابت، همگرای تقریباً ضعیف، ارگودیک غیرخطی.

مقدمه

فرض کنیم E یک فضای نرم‌دار و C یک زیر مجموعه ناتهی از آن است. یک نگاشت $T : C \to C$ را یک انقباض (غیر مبسوط) نامیم هر گاه،

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \qquad (x, y \in C).$$

مجموعه نقاط ثابت T را با $F(T)$ نمایش می‌دهیم.

اولین قضیه ارگودیک غیر خطی برای نگاشت‌های غیر مبسوط توسط بایلون [1] [۲] درسال ۱۹۷۵ در فضاهای هیلبرت به صورت زیر بیان شده است:

فرض کنیم C یک زیر مجموعه محدب بسته از یک فضای هیلبرت H و T یک نگاشت غیر مبسوط از C به توی C است. هرگاه $F(T)$ ناتهی باشد آن‌گاه برای هر $x \in C$، میانگین‌های سزارو [2]،

$$S_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} T^k x$$

همگرای ضعیف به یک نقطه ثابت $y \in F(T)$ است.

با جایگزینی یک فضای باناخ به جای فضای هیلبرت H و با تغییرات در خواص نگاشت T تعمیم‌های متفاوتی از قضیه فوق حاصل شده است. در این پایان نامه به چند نمونه از این تعمیم ها خواهیم پرداخت برای اطلاعات بیشتر خواننده را به دیدن [۳۵، ۳۳، ۲۹، ۲۲، ۱۸، ۸] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنیم E یک فضای باناخ است که در شرط اپیال صدق می کند یعنی به ازای هر دنباله $\{x_n\} \leq E$ که به $x \in E$ همگرای ضعیف است داشته باشیم،

$$lim_{n\to\infty}\, inf\|x_n - x\| \leq lim_{n\to\infty}\, inf\|x_n - y\|$$

برای هر نقطه دلخواه $y \in E$ که $x \neq y$. فرض کنیم C یک زیر مجموعه محدب ضعیفا فشرده در E است و $T : C \to C$ نگاشتی آفینی شبه غیر مبسوط مجانبی است که $F(T) \neq \emptyset$. در فصل دوم نشان خواهیم داد که برای هر $x \in C$ دنباله $\{T^n x\}$ همگرای تقریبا ضعیف به یک نقطه ثابت $z \in F(T)$ است.

نتیجه اصلی فصل سوم را می‌توان به صورت زیر بیان نمود: فرض کنیم E یک فضای باناخ با شرط اپیال و C زیر مجموعه‌ای محدب ضعیفا فشرده از آن باشد. فرض کنیم $T : C \to C$ نگاشتی آفینی شبه غیر مبسوط است و $\{\alpha_n\}$ را دنباله‌ای دربازه $[0,1)$ اختیار می‌کنیم به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \alpha_n) = \infty$. آن‌گاه دنباله تعریف شده به فرم،

---

[1]. Baillon

[2]. Cesaro

$$x_1 \in C\,,\quad x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S_n(x_{n+1}) \qquad (n \geq 1)$$

که در آن $\{S_n\}$ دنباله میانگین‌های سزارو است، به یک نقطه ثابت T همگرای ضعیف است.

در فصل چهارم شرایط هم ارز با ناتهی بودن مجموعه نقاط ثابت $F(T)$ را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. فرض کنیم E یک فضای باناخ محدب یکنواخت است به طوری که یک نرم دیفرانسیل پذیر فرشه دارد. فرض کنیم C یک مجموعه بسته محدب از E است. برای یک نگاشت غیر مبسوط $T : C \to C$ احکام زیر معادلند:

(i) $F(T)$ ناتهی است.

(ii) دنباله $\{T^n x\}$ برای هر $x \in C$ کران‌دار است.

(iii) دنباله $\{S_n\, T^i x\}$، $(i = 1\,, 2\,, \ldots)$، برای هر $x \in C$ به یک نقطه ثابت $y \in C$ همگرای ضعیف است.

سرانجام در فصل پنجم با معرفی نگاشت‌های از نوع (γ)، ارتباط آن‌ها با همسایگی های ضعیف مجموعه $F(T)$ را بررسی خواهیم کرد. فرض کنیم E یک فضای نرم دیفرانسیل پذیر فرشه و C یک مجموعه ضعیفا فشرده از آن است. فرض کنیم T یک انقباض روی C است به طوری که T^n برای هر $n \in \mathbb{N}$ از نوع (γ) است. در این صورت برای هر $x \in C$ دنباله $\{T^n x\}$ همگرای تقریبا ضعیف به یک نقطه منحصر بفرد در $F(T)$ است.

در خاتمه لازم به ذکر است که مطالب این پایان نامه برگرفته شده از مراجع [۸]، [۲۲]، [۲۳]، [۳۲] و [۳۳] است.

فصل اول

پیش در آمدی بر آنالیز تابعی

در این فصل که شامل دو بخش است، تعاریف مقدماتی آنالیز تابعی را که در این مقاله مورد نیاز می‌باشند، می‌آوریم و همچنین به بررسی اصول انقباض متری که شامل اصل انقباض باناخ و توسیع بیشتر اصل باناخ است می‌پردازیم.

توجه داریم که منظور از فضای برداری یعنی فضای برداری روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ یا میدان حقیقی $\mathbb{R}$ است.

۱.۱. مفاهیم مقدماتی آنالیز

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d: X \times X \to R$ را یک **متر** بر X گوییم هر گاه در شرایط زیر صدق کند،

(آ) $d(x,y) \geq 0$ ، $\forall x,y \in X$

(ب) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(پ) $d(x,y) = d(y,x)$

(ت) $\forall x,y,z \in X \ , \ d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$d(x,y)$ را فاصله بین x, y گوییم.

تعریف ۱.۱.۲. مجموعه مجهز به یک متر **فضای متری** نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۳. گوییم فضای برداری X یک **فضای نرم‌دار** است اگر به هر $x \in X$ عدد حقیقی و نامنفی مانند $\|x\|$، به نام نرم x، چنان مربوط باشد که

(آ) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

(ب) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

(پ) اگر $x \neq 0$، $\|x\| > 0$.

از واژه نرم به معنی تابعی که x را به $\|x\|$ می‌نگارد نیز استفاده می‌کنیم.

هر فضای نرم‌دار را می‌توان یک فضای متری گرفت که در آن فاصله‌ی $d(x,y)$ بین x و y مساوی $\|x-y\|$ است.

تعریف ۱.۱.۴. **فضای باناخ** یک فضای نرم‌دار است که نسبت به متر تعریف شده به وسیله نرمش تام می‌باشد؛ این یعنی هر دنباله کوشی در آن باید همگرا باشد.

تعریف ۱.۱.۵. گوییم $\{x_n\}$ از توابع حقیقی در فضای باناخ X **به طور یکنواخت همگرا** به تابعی مانند x بر X است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند n_0 (فقط تابع ε) باشد به طوری که به ازای هر $n \geq n_0$ و هر $a \in X$، $|x_n(a) - x(a)| < \varepsilon$ باشد.

تعریف ۱.۱.۶. اگر X یک فضای برداری باشد، گوییم مجموعه $C \subset X$ **محدب** است اگر

$$tC + (1-t)C \subset C \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

به عبارتی دیگر، اگر $x \in C$ ، $y \in C$ ، و $0 \leq t \leq 1$ ، باید C شامل $tx + (1-t)y$ باشد.

تعریف ۱.۱.۷. فرض کنیم τ یک توپولوژی بر فضای برداری X باشد به طوری که

(آ) هر نقطه‌ی X یک مجموعه بسته باشد، و

(ب) اعمال فضای برداری نسبت به τ پیوسته باشند.

در این شرایط گوییم τ یک **توپولوژی برداری** بر X است، و X یک فضای برداری توپولوژیک می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۸. گوییم زیر مجموعه E از یک فضای برداری توپولوژیک X **کران‌دار** است اگر به هر همسایگی V از 0 در X عددی مانند $s > 0$ چنان نظیر باشد که به ازای هر $t > s$ ، $E \subset tV$.

تعریف ۱.۱.۹. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد.گوییم X **موضعاً محدب** است اگر یک پایه موضعی مانند β که اعضایش محدب‌اند موجود باشد.

تعریف ۱.۱.۱۰. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. گوییم X **موضعاً کران‌دار** است اگر 0 یک همسایگی کران‌دار داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی τ باشد. گوییم X **موضعاً فشرده** است اگر 0 همسایگی‌ای با بست فشرده داشته باشد.

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی با توپولوژی τ باشد. X یک **F – فضا**[1] است اگر توپولوژی τ آن به وسیله یک متر پایای تام مانند d القا شده باشد.

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد. X یک **فضای فرشه**[2] است اگر X یک F – فضای موضعاً محدب باشد.

تعریف ۱.۱.۱۴. فضای برداری توپولوژیک X با توپولوژی τ، **نرم‌پذیر** است اگر یک نرم بر X چنان موجود باشد که متر القاء شده به وسیله‌ی آن با توپولوژی τ سازگار باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. فرض کنیم $\{s_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی است. E را مجموعه همه ی x هایی می‌گیریم که برای آن‌ها زیر دنباله $\{s_{n_k}\}$ از $\{s_n\}$ موجود است که $s_{n_k} \to x$.

سوپریمم E را حد بالای دنباله $\{s_n\}$ گوییم و با نماد $lim_{n\to\infty}\, sup\, s_n$ نشان می‌دهیم. در صورتی که $\{s_n\}$ از بالا کران‌دار نباشد. می‌نویسیم $lim_{n\to\infty}\, sup\, s_n = +\infty$.

اینفیمم E را حد پایین دنباله $\{s_n\}$ گوییم و با نماد $lim_{n\to\infty}\, inf\, s_n$ نشان می‌دهیم. در صورتی که $\{s_n\}$ از پایین کران‌دار نباشد. می‌نویسیم $lim_{n\to\infty}\, inf\, s_n = -\infty$.

دنباله $\{s_n\}$ همگرا به s است اگر و تنها اگر $lim_{n\to\infty}\, sup\, s_n = lim_{n\to\infty}\, inf\, s_n$.

تعریف ۱.۱.۱۶. نگاشت f پیوسته نامیده می‌شود اگر در هر عنصر $x \in X$ پیوسته باشد ، و پیوسته یکنواخت نامیده می‌شود اگر، علاوه بر این،δ در تعریف پیوستگی را بتوان مستقل از x انتخاب کرد.

---

۱. F-Space

۲. Frechet

تعریف ۱.۱.۱۷. اگر d یک متر بر مجموعه X در فضای متری باشد، مجموعه $E \subset X$ را d **کران دار** گوییم اگر عددی مانند $M < \infty$ چنان موجود باشد که به ازای هر x و y در E، $d(x, y) \leq M$.

اگر X یک فضای برداری توپولوژیک با متر سازگار d باشد، مجموعه‌های کران‌دار و d کران‌دار حتی اگر d پایا باشد لزوماً یکی نیستند. به عنوان مثال، هر گاه d یک متر باشد آن‌گاه X خود d کران دار است (با $M = 1$) ولی، نمی‌تواند کران‌دار باشد مگر آن که $X = (0)$. هر گاه X یک فضای نرم‌دار بوده و d متر القا شده به وسیله نرم باشد ، آن‌گاه دو مفهوم کران داری یکی خواهند بود؛ ولی اگر d را با $d_1 = d/(1 + d)$ (یک متر پایا که همان توپولوژی را القا می‌کند) عوض کنیم، این دو مفهوم یکی نخواهند بود.

تعریف ۱.۱.۱۸. فضای باناخ X **به طور یکنواخت محدب** است هر گاه دنباله های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ موجود باشند که

$$\|x_n + y_n\| \to 2, \ \ \|y_n\| \leq 1, \ \ \|x_n\| \leq 1$$

ایجاب می‌کنند که $\|x_n - y_n\| \to 0$. به عنوان مثال، هر فضای هیلبرت به طور یکنواخت محدب است.

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید (X, d) یک فضای متری باشد و $f: X \to X$ تابعی از مجموعه X به توی خودش باشد. نقطه $a \in X$ را یک **نقطه ثابت** f نامیم اگر $f(a) = a$.

تعریف ۱.۱.۲۰. فرض کنید(X, d) یک فضای متری باشد. تابع $f: X \to X$ را یک **انقباض** نامیم اگر عددی مانند $0 < a < 1$ باشد به طوری که $d\big(f(x), f(y)\big) \leq ad(x, y)$؛ a را ثابت انقباض می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنیم E یک فضای باناخ و $x \in E$ باشد و فرض کنیم $\{x_n\} \subset E$ باشد. گوییم $\{x_n\}$ **همگرای ضعیف** به نقطه x در E است، و می‌نویسیم $x_n \rightharpoonup x$ در E، هر گاه

$$(f, x_n) \rightharpoonup (f, x) \qquad\qquad \forall f \in E^*$$

به طوری که E^* فضای دوگانی است.

به عنوان مثال، فرض کنیم $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد. وقتی می گوییم اصولاً $x_n \to 0$ یعنی هر همسایگی اصلی 0 حاوی تمام x_n ها با n به قدر کافی بزرگ است. وقتی می گوییم به طور ضعیف $x_n \to 0$ یعنی هر همسایگی ضعیف 0 شامل همه x_nها با n به قدر کافی بزرگ است. چون هر همسایگی ضعیف به شکل

$$V = \left\{x :\ |\Lambda_i x| < r_i, 1 \leq i \leq n \quad \text{به ازای} \ \right\}$$

است که در آن $\Lambda_i \in X^*$ و $r_i > 0$، به آسانی معلوم می‌شود که به طور ضعیف $x_n \to 0$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\Lambda \in X^*$, $\Lambda x_n \to 0$.

لذا هر دنباله همگرا به طور ضعیف همگراست. (عکس مطلب معمولاً نادرست است).

هرگاه K یک زیر مجموعه به طور ضعیف فشرده X بوده و $x_0 \in K$ یک نقطه ی حدی ضعیف مجموعه‌ی شمارش پذیری مانند $E \subset K$ باشد، آن‌گاه دنباله ای مانند $\{x_n\}$ در E هست که به طور ضعیف به x_0 همگراست.

به همین نحو ، مجموعه $E \subset X$ **به طور ضعیف کران‌دار** است (یعنی، E یک زیر مجموعه کران دار X_w است) اگر و فقط اگر هر V همانند فوق شامل tE به ازای $t = t(V) > 0$ای باشد. این رخ می‌دهد اگر و فقط اگر نظیر هر $\Lambda \in X^*$ عددی مانند $\gamma(\Lambda) < \infty$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in E$. $\left|\Lambda x \leq \gamma(\Lambda)\right|$ به عبارت دیگر، مجموعه $E \subset X$ به طور ضعیف کران‌دار است اگر و فقط اگر هر $\Lambda \in X^*$ یک تابع کران‌دار بر E باشد.

تعریف ۱.۱.۲۲. فضای توپولوژیک (X, τ) را **موضعاً فشرده** نامیم اگر هر نقطه از X همسایگی داشته باشد که بستش فشرده باشد. می‌دانیم که یک فضای نرم‌دار موضعاً فشرده است اگر و فقط اگر با بعد متناهی باشد.

تعریف ۱.۱.۲۳. فرض کنیم E فضای باناخ و $x \in E$ و $\{x_n\} \subset E$، گوییم $\{x_n\}$ **همگرای قوی به** $\boldsymbol{x}$ است و می‌نویسیم $x_n \to x$ در E هرگاه،

$$lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

تبصره ۱.۱.۲۴. واژه‌ی **ارگودیک** از مکانیک آماری می‌آید که در آن بر دستگاه‌هایی اعمال می‌شود که در آن‌ها متوسط مکانی مساوی متوسط زمانی برای بعضی از کمیات برقرار است. برای مشاهده یک مثال ریاضی ساده، فرض کنیم μ یک اندازه‌ی احتمال بر σ - جبری مانند $\mathcal{M}$ در مجموعه‌ای چون Ω بوده، ψ مجموعه‌ی Ω را به توی Ω بنگارد، و تکرارهای آن را با،

$$(n = 2,3,4, \dots)\ \psi^n = \psi o \psi^{n-1},\ \psi^1 = \psi$$

تعریف می‌کنیم. اگر زمان را گسسته بگیریم، متوسط زمانی تابع f بر Ω نسبت به تبدیل ψ عبارت است از،

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(f + fo\psi + \cdots + fo\psi^{n-1})$$

وقتی این حد به مفهومی موجود باشد.

متوسط مکانی تابع $f \in L^1(\mu)$ چیزی جز $\int_\Omega f d\mu$ نیست.

ما به نگاشت‌های یک به یک حافظ اندازه مانند ψ از Ω به روی Ω علاقه مندیم. این یعنی $\psi(E)$ و $\psi^{-1}(E)$ به ازای هر $E \in \mathcal{M}$ در $\mathcal{M}$اند و اندازه‌ی آن‌ها $\mu(E)$ می‌باشد. در این صورت واضح است که به ازای هر $f \in L^1(\mu)$،

$$\int_\Omega (fo\psi) d\mu = \int_\Omega f d\mu$$

هرگاه، علاوه بر این، $\psi(E) = E \in \mathcal{M}$ فقط به ازای $\mu(E) = 0$ یا $\mu(E) = 1$ رخ دهد، آن‌گاه گوییم ψ ارگودیک است.

تعریف ۱.۱.۲۵. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد، x_0 یک نقطه در X و

$$f: X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

تابعی حقیقی مقدار توسعه یافته است.

(الف) گوییم f **نیمه پیوسته بالایی** در نقطه x_0 است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ همسایگی U از x_0 موجود باشد به طوری که برای هر x در U، $f(x) \le f(x_0) + \varepsilon$. به ویژه برای حالت خاص فضای متریک می‌توانیم بگوییم $lim_{x\to x_0} sup\, f(x) \le f(x_0)$.

(ب)گوییم f **نیمه پیوسته پایینی** در نقطه x_0 است اگر برای هر $\varepsilon > 0$ همسایگی U از x_0 موجود باشد به طوری که برای هر x در U، $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$. به ویژه برای حالت خاص فضای متریک می‌توانیم بگوییم $\lim_{x\to x_0} \inf f(x) \geq f(x_0)$.

قضیه میانگین‌های سزارو ۱.۱.۲۶. فرض کنیم $a_n \to a$، $b_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i$؛ آن‌گاه،

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

برهان. ابتدا مفهوم $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ را یادآوری می‌کنیم:

برای هر $\delta > 0$ وجود دارد یک n_δ به طوری که برای هر $n > n_\delta$، $\|b_n - a\| < \delta$. حال، چون $\lim_{n\to\infty} a_n = a$، می‌دانیم که برای هر ε، وجود دارد n_ε به طوری که

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad ، \forall n > n_\varepsilon.$$

$\delta = 2\varepsilon$ را انتخاب می‌کنیم. ε، را ثابت اختیار می‌کنیم. n_ε را به صورت فوق در نظر می گیریم. فرض می‌کنیم که $n \geq n_\varepsilon$، و $b_n - a$ باشد.

$$|b_n - a| = |n^{-1}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i) - a| = \left|n^{-1}(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i) - a\frac{n}{n}\right|$$
$$= |n^{-1}(-na + \textstyle\sum a_i)| = |n^{-1}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(a_i - a)|$$

حال عبارت سمت راست را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

مجموع قسمت اول را بین 1 , n_ε قرار می‌دهیم و باقی مانده جملات را در رابطه جمعی دوم قرار می‌دهیم،

$$|b_n - a| = \left|\frac{1}{n}\sum(a_i - a)\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}(a_i - a)\right| \tag{۱.۱.۲۷}$$

$$+\left|\frac{1}{n}\sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n}(a_i - a)\right| \tag{۱.۱.۲۸}$$

حال کران دو رابطه جمعی (۱.۱.۲۷) و (۱.۱.۲۸) را در نظر می‌گیریم. ابتدا کران رابطه (۱.۱.۲۷)،

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}(a_i - a)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}|a_i - a| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \max_{j=1}^{n_\varepsilon}|a_j - a|$$
$$= \max_{j=1}^{n_\varepsilon}|a_j - a|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_\varepsilon} 1 = \max_{j=1}^{n_\varepsilon}|a_j - a|\frac{n_\varepsilon}{n}$$

و اگر n را باز کنیم داریم

$$n > \frac{n_\varepsilon \ max_{j=1}^{n_\varepsilon} |a_j - a|}{\varepsilon},$$

آن‌گاه از رابطه جمعی (۱.۱.۲۷) به رابطه زیر می‌رسیم،

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n_\varepsilon}(a_i - a)\right| < \varepsilon$$

حال کران رابطه (۱.۱.۲۸) را به طور مشابه باز می‌کنیم،

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n}(a_i - a)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n}|a_i - a| \le \frac{1}{n}\sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n_\varepsilon} max_{i=n_\varepsilon+1}^{n}|a_i - a|$$
$$= max_{i=n_\varepsilon+1}^{n}|a_i - a|\frac{1}{n}\sum_{i=n_\varepsilon+1}^{n} 1 = max_{i=n_\varepsilon+1}^{n_\varepsilon}|a_i - a|\frac{n-n_\varepsilon}{n}$$
$$\le max_{i=n_\varepsilon+1}^{n}|a_i - a| \le \varepsilon \qquad (۱.۱.۲۹)$$

نامساوی (۱.۱.۲۹) نتیجه ای برای چگونگی انتخاب n_ε است. بنابراین نشان می دهیم که، اگر ثابت δ را داشته باشیم و فرض کنیم $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$، n_ε را به گونه ای انتخاب می کنیم که $n_\delta = \frac{n_\varepsilon \ max_{j=1}^{n_\varepsilon} |a_j - a|}{\varepsilon}$ به طوری که برای هر $n > n_\delta$، $|b_n - a| < \delta$ است؛ به عبارت دیگر نشان دادیم $lim_{n\to\infty} b_n = a$. ■

تعریف ۱.۱.۳۰. گوییم فضای باناخ E یک نرم دیفرانسل پذیر فرشه دارد هرگاه به ازای هر $x, y \in E$، حد زیر **موجود باشد،**

۱.۲. اصل انقباض باناخ

به سادگی قابل توجه است که در اصل نگاشت انقباض باناخ، قضیه نقطه ثابت به طور گسترده در همه تجزیه و تحلیل‌ها به کار می‌رود؛ زیرا استفاده از شرط منقبض کننده روی نگاشت، اثبات را ساده و آسان می‌کند، به این علت که این شرط تنها نیاز مجموعه در یک فضای متریک کامل است؛ و تقریبا با کاربردهای استاندارد در تئوری دیفرانسیل و معادلات انتگرال یافت می‌شود. اصل اول قضیه باناخ که در سال ۱۹۲۲،

[۲۳] به شکلی ساده آشکار شد، برای حل معادله انتگرال موجود ساخته شده بود. فضایی که در روابط ذیل مورد استفاده قرار گرفته، فضای $C[0,1]$ یعنی فضای همه توابع پیوسته بر $[0,1]$ است.

فرض کنید (M,d) یک فضای متریک باشد. یک نگاشت $T: M \to M$ لیپشیتز[۱] گفته می شود اگر ثابت $k \geq 0$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x, y \in M$،

$$d\big(T(x),T(y)\big) \leq kd(x,y). \qquad (۱.۲.۱)$$

کمترین مقدار k که در عبارت (۱.۲.۱) صدق می‌کند، ثابت لیپشیتز؛ T نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲. یک نگاشت لیپشیتز $T: M \to M$ با ثابت لیپشیتز $k < 1$ یک نگاشت انقباضی نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۲.۳. (اصل نگاشت انقباضی باناخ) فرض کنید (M,d) یک فضای متریک کامل و $T: M \to M$ یک نگاشت انقباضی باشد. آن‌گاه T یک نقطه ثابت منحصر به فرد x_0 دارد، و علاوه بر این،

$$lim_{n\to\infty} T^n(x) = x_0 \qquad , \qquad \forall\, x \in M$$

برهان. چون T یک نگاشت انقباضی است، می‌دانیم که برای هر $x \in M$،

$$d\big(T(x),T^2(x)\big) \leq kd\big(x,T(x)\big).$$

با اضافه کردن $d\big(x,T(x)\big)$ به طرفین نامساوی بالا داریم؛

$$d\big(x,T(x)\big) + d\big(T(x),T^2(x)\big) \leq d\big(x,T(x)\big) + kd\big(x,T(x)\big)$$

که می‌توان نوشت؛

$$d\big(x,T(x)\big) - kd\big(x,T(x)\big) \leq d\big(x,T(x)\big) - d\big(T(x),T^2(x)\big)$$

جابه جایی آن معادل است با؛

$$d\big(x,T(x)\big) \leq (1-k)^{-1}\big[d\big(x,T(x)\big) - d\big(T(x),T^2(x)\big)\big]$$

حال تابع $\varphi: M \to \mathbb{R}^+$ را با استفاده از تساوی

$$\varphi(x) = (1-k)^{-1}d\big(x,T(x)\big),$$

---

[۱]. lipschitz